LINEARNA I POVRŠINSKA DEFORMACIJA U GAUSS - KRÜGEROVOJ PROJEKCIJI

Alija SALIHOVIĆ — Sarajevo

UVOD

Poslije smrti Gaussa, profesor dr. L. Krüger dobio je u zadatak da pregleda i sredi njegove nedovršene radove. Tom prilikom Krüger je objasnio Gaussove formule za direktan prelaz sa elipsoida na ravninu, bez posredstva pomoćne sfere. Zbog toga je Garssova projekcija i nazvana Gauss-Krügerova projekcija, a koordinate, pravougle Gauss-Krügerove koordinate.

Velika prednost ove projekcije za krupnorazmjerne karte, nad svim ostalim projekcijama, je naročito u tome, što ona nije ovisna o obliku granica pojedinih država, pošto se u njoj sferoid Zemljin neposredno projicira na niz valjaka koji dodiruju Zemljinu površinu po meridijanima, čime se dobije niz zona ograničenih meridijanima.

Obzirom na usvojenu tačnost premjera (1 dm na km), širina zone može da bude 3^0. Važno je naglasiti da ova projekcija može obuhvatiti čitav pojas Zemlje uzduž nekog meridijana od južnog do sjevernog pola. Prema tome ova je projekcija najidealnija za internacionalnu upotrebu za karte krupnih mjerilâ.

Za potrebe zemaljskog premjera razvija se triangulacija, čiji je krajnji cilj dobivanje koordinata trigonometriskih tačaka. Da bi se ovo postiglo, neophodno je potrebno, bar na jednoj astronomskoj tački I reda odrediti astronomskim putem geografske koordinate φ i λ (geografsku širinu i geografsku dužinu) i azimut α jedne strane, a zatim postupno sračunati geografske koordinate ostalih tačaka triangulacije. Iz geografskih koordinata računaju se pravougle koordinate x, y pošto su one funkcije geografskih koordinata i među njima postoji ova veza:

$$x = f_1 \;(\varphi, \lambda); \;\; y = f_2 \;(\varphi, \lambda), \;\text{ili}\; \varphi = F_1 (x, y); \;\; \lambda = F_2 (x, y).$$

Kod ove projekcije zadatak je da se odredi takav oblik funkcije f_1 i f_2, odnosno F_1 i F_2, da se omogući računanje jednih koordinata iz drugih. Te s funkcije određuju pod ovim uslovima:

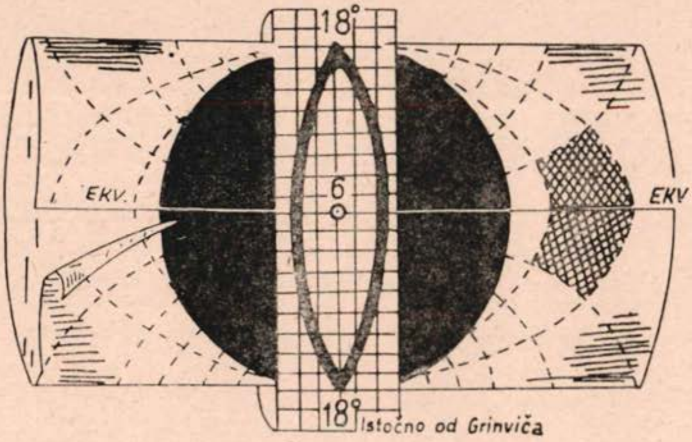
1. Projekcija mora biti konformna.
2. Glavni (srednji) meridijan mora se preslikati kao prava i predstavljati x-osovinu pravouglog koordinatnog sistema u ravni, prema kome je projekcija i simetrična.
3. Svaki dio x-osovine mora biti jednak odgovarajućem dijelu luka glavnog meridijana.

Dalje odlike Gauss-Krügerove projekcije jesu:

a) Razmjer duž srednjeg (dodirnog) meridijana jednak je jedinici.

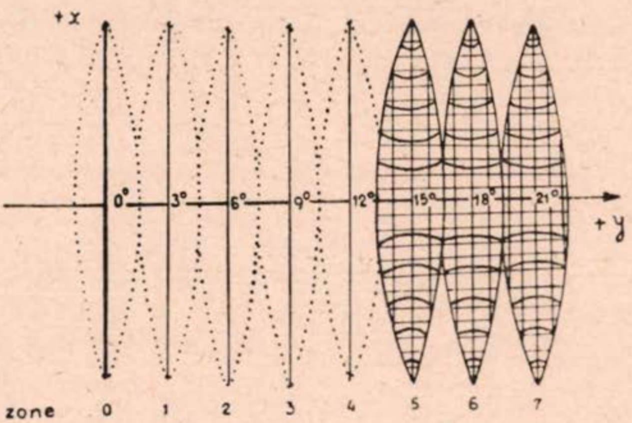
b) U njoj se može predstaviti čitava zona širine 3^0 od pola do pola, sa neznatnim deformacijama.

c) Svaka zona prenosi se na zaseban dodirni cilindar koji dodiruje površinu Zemljinog elipsoida duž srednjeg meridijana zone (sl. 1).



Sl .1

d) Svaka zona ima svoj koordinatni sistem koga obrazuje srednji meridijan kao x-osa i ekvator kao y-osa, tj. koordinatni početak se nalazi na ekvatoru u presjeku srednjeg meridijana zone sa ekvatorom, te se prema tome apscise računaju od ekvatora na sjever sa znakom plus i na jug sa znakom minus. Da bi se ovaj negativni predznak izbjegao, ekvatoru se, za računanje prema jugu, dodaje vrijednost od 10 000 km (sl. 2).

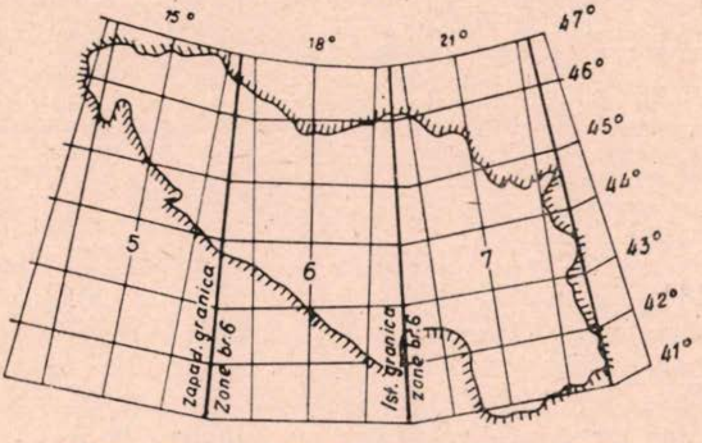


Sl. 2

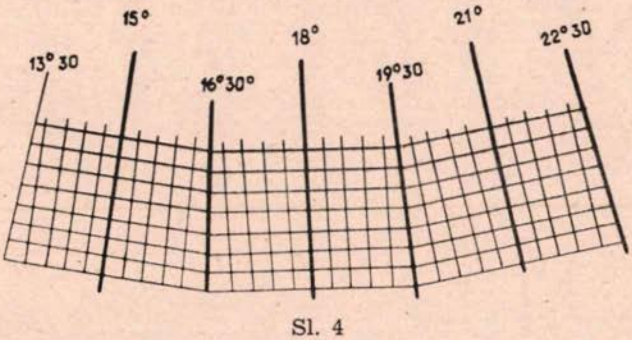
e) Ordinate se računaju od srednjeg meridijana svake zone na istok sa znakom plus i na zapad sa znakom minus. Da bi se i ovdje izbjegle negativne vrijednosti, usvojen je način prof. Baumgart-a, po kome se srednjem meridijanu svake zone dodaje 500 km. Prema tome sve ordinate istočno od srednjeg meridijana imaće vrijednosti veće od 500.000 m, a zapadno manje od 500.000 m.

Vrijednost x, kao što smo već rekli, označava stvarnu udaljenost od ekvatora.

Na planovima krupne razmjere nalazi se samo pravougla Gauss-Krügerova mreža koja je orijentisana u odnosu na srednji meridijan. Na topografskim kartama, međutim, osnovna je geografska mreža koja daje istinski pravac sjevera, a ucrtana je i pravougla Gauss-Krügerova mreža. Ove se mreže poklapaju samo duž srednjeg meridijana (sl. 4). Pošto se meridijani prema polovima približavaju (konvergiraju), to je i odstupanje pravca x-osi Gauss-Krügerove projekcije od pra-



Sl. 3 — Raspored Gauss-Krügerovih zona FNRJ



Sl. 4

vog geografskog sjevera nazvano konvergencija meridijana u ravni (zbližavanje). Prema tome, svi planovi na pr. Sarajeva (osim topografskih karata) zakošeni su udesno od pravog sjevera za više od 0°20′.

Pravouglu koordinatnu mrežu na topografskim kartama neki nazivaju i kilometarskom mrežom iz razloga što je nanijeta u vidu kvadrata sa stranama od po 4 cm odnosno 5 cm. Na kartama razmjere 1:50 000 ti su razmaci po 4 cm, odnosno dužina strane kvadrata po 2 km, a na karti 1:100 000 razmaci su po 5 cm, odnosno strane po 5 km itd.

IZRADA PLANOVA PRAKTIČNO OSLOBOĐENIH SVIH DEFORMACIJA

U kartografiji je poznato da nema uopšte mogućnosti da se neki dio Zemljine površine preslika na ravan, a da istovremeno bude oslobođen svih deformacija. Kod nas u usvojenoj Gauss-Krügerovoj projekciji, deformacije dužina kreću se od —10 cm do +10 cm po kilometru dužine, zavisno od udaljenosti od srednjeg meridijana.

No ipak izvjesne manje površine, kao naprimjer teritorij pojedinog grada, u mogućnosti smo, praktično, obzirom na grafičku tačnost krupnorazmjernih planova, predstaviti na planu bez ikakvih deformacija.

Zato Pravilnik II A na str. 166—170 i propisuje da se specifične linearne deformacije, prouzrokovane množenjem koordinata svih trigonometrijskih tačaka sa 0,0001 — uzimaju u račun kod mjerenja visoke tačnosti — gradskih premjera — u slučaju kad je postojeća deformacija veća od granične vrijednosti deformacija, koje iznose:

a) kada se grad premjerava po prvoj skali tačnosti 1:40 000,

b) kada se grad premjerava po drugoj skali tačnosti 1:32 000,

c) kada se grad premjerava po trećoj skali tačnosti 1:24 000.

Da bismo odredili postojeću deformaciju izračunaćemo srednju ordinatu područja premjera (aritmetička sredina iz zbira ordinata najzapadnije i najistočnije trig. tačke). Zatim ćemo iz tablica III M, prema toj ordinati, ustanoviti kolika je deformacija uslijed prirode same projekcije. Ukoliko nemamo pri ruci tablice, sračunaćemo po formuli:

$$\omega'_a = \frac{\bar{y}^2_m}{2r'^2_m}\,; \quad r' = \sqrt{MN}.$$

Ovdje su

$\bar{y}_m$ = srednja ordinata područja koje se kartira;

r'_m = srednji polumjer zakrivljenosti Zemlje područja koje se kartira.

Da bi se dužine, odnosno koordinate, oslobodile linearne deformacije, treba im dodati popravku:

$$u = u_1 + u_2.$$

Popravka u_1 iznosi 0,00010001 dio dužine strane ili brojne vrijednosti koordinate, i uvijek je pozitivna.

Dodavanjem ove popravke, dužina odnosno koordinata oslobođena je deformacije nastale množenjem svih koordinata konstantnim linearnim modulom : $m_0 = 1 - 0{,}0001$.

Popravka u_2 koja je uvijek negativna, dodaje se radi eliminisanja normalne deformacije dužina odnosno koordinata, nastalih prirodom same projekcije, a dobija se množenjem koordinata veličinom ω'_a.

Prema tome $u_2 = y \cdot \omega'_a$ ili $u_2 = x \cdot \omega'_a$

Ukupna popravka $u = u_1 + u_2 = y\,(0{,}00010001 + \omega'_a)$ odnosno
$u = u_1 + u_2 = x\,(0{,}00010001 + \omega'_a)$

Dodavanje popravke „u" može se zamijeniti množenjem koordinata modulom:

$$M = 1 + (0{,}00010001 + \omega'_a)$$

Deformacija koordinata može biti manja od naprijed navedenih graničnih vrijednosti samo u slučaju kad je faktor:

$F = (0{,}00010001 + \omega'_a)$ kojim se množe koordinate manji od tih vrijednosti, tojest ako je:

$(0{,}00010001 + \omega'_a) < 0{,}0000250$, za I skalu tačnosti,

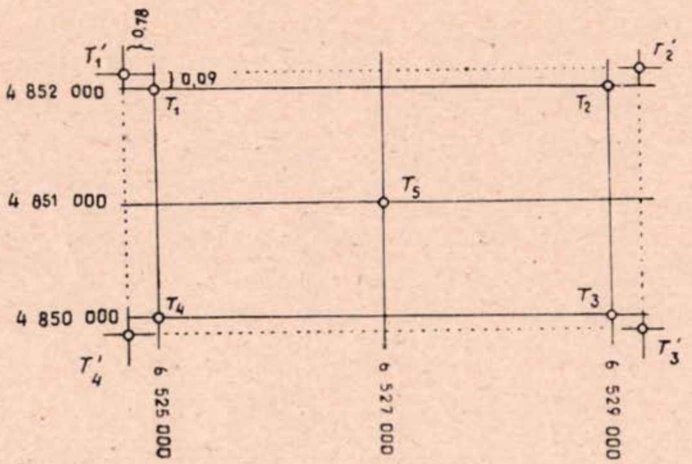
$(0{,}00010001 + \omega'_a) < 0{,}0000312$, za II skalu tačnosti,

$(0{,}00010001 + \omega'_a) < 0{,}0000417$, za III skalu tačnosti.

POSTUPAK ZA OTKLANJANJE DEFORMACIJA PROJEKCIJE

Da bi objasnili postupak oko otklanjanja linearnih deformacija projekcije pri premjeru gradskih naselja, tretiraćemo slučaj premjera jedne varoši. Radi lakšeg shvatanja, uzećemo da je teritorij koji se premjerava pravougaonik ograničen tačkama (sl. 5):

Tačka	y	x
T_s	6 527 000,00	4 851 000,00
T_1	6 525 000,00	4 852 000,00
T_2	6 529 000,00	4 852 000,00
T_3	6 529 000,00	4 850 000,00
T_4	6 525 000,00	4 850 000,00



Sl. 5

Koordinate tačaka su uzete kao okrugli brojevi radi lakšeg množenja i iskazivanja na slici ukupne deformacije.

Pošto je ordinata srednje tačke T_s = 27 000,00 m (udaljenje od x-ose, odnosno, u ovom slučaju od projekcije meridijana 18°), u tablici III M Pravilnika za triangulaciju nađemo popravku ω'_n, koja u ovom slučaju iznosi: $\omega'_n = 0{,}00000896$; ukoliko nemamo pri ruci te tablice izračunaćemo je po već navedenoj formuli. Tada će biti iznos za modul M:

$$M = 1 + (0{,}00010001 + \omega'_n) = 1{,}00009105,$$

a faktor

$$F = 0{,}0000\,9105.$$

(Kao što vidimo faktor F je veći i od dozvoljenog odstupanja za III skalu tačnosti).

Množenjem ordinate y = 27 000,00 m i apscise x = 4 851 000,00 m s modulom M dobijemo:

$$\breve{y} = 27\,000{,}00 \cdot 1{,}00009105 = 27\,002{,}46 \text{ m},$$

$$\breve{x} = 4\,851\,000{,}00 \cdot 1{,}00009105 = 4\,851\,441{,}68.$$

Da bi sav detalj varoši, odnosno kompleksa za koji se traži naročito visoka tačnost bio na planovima oslobođen deformacija nastalih i množenjem koordinata svih trig. tačaka konstantnim linearnim modulom $m_0 = 1 - 0{,}0001$, i deformacija nastalih zbog same projekcije, pomnožićemo koordinate svih trig. tačaka modulom M, a potom im dodati razliku:

$$r_y = y_m - \breve{y}_m \quad r_x = x_m - \breve{x}_m$$

Za naš slučaj ta razlika iznosi:

r_y = 6 527 000,00 — 6 527 002,46 = —2,46 m
r_x = 4 851 000,00 — 4 851 441,68 = —441,68 m

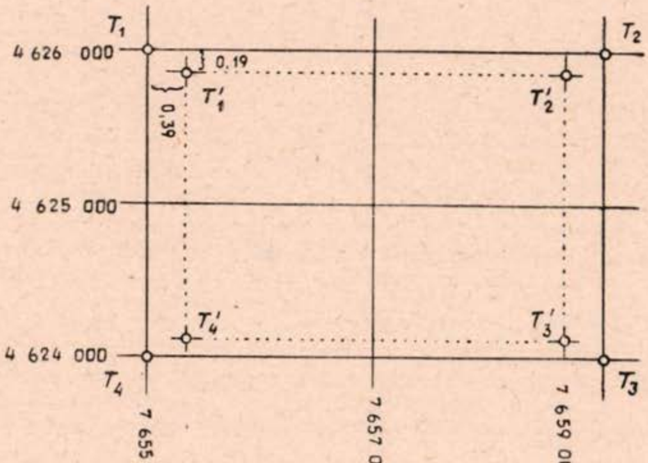
Tabela 1

Tačka	y•M=y̆	y̆+r_y	Razlika	x•M=x̆	x̆+r_x	Razlika
T_1	6 525 oo2,28	6 524 999,82	-o,18	4 852 441,77	4 852 ooo,o9	+o,o9
T_2	6 529 oo2,64	6 529 ooo,18	+o,18	4 852 441,77	4 852 ooo,o9	+o,o9
T_3	6 529 oo2,64	6 529 ooo,18	+o,18	4 85o 441,59	4 849 999,91	-o,o9
T_4	6 525 oo2,28	6 524 999,82	-o,18	4 85o 441,59	4 849 999,91	-o,o9

Gore sračunati primjer odgovara približno jednom dijelu grada Sarajeva.

Bacimo li pogled na sliku 13 vidićemo da su ispravljene koordinate trig. tačaka simetrično povećale ukupnu površinu (izvučeno crtkasto). Kao što se iz tablice vidi, najveće razlike su po y-osi i iznose 18 cm, a po x-osi 9 cm.

Još veće razlike, i po predznaku suprotne, biće u predjelu Pehčeva, gdje je srednja ordinata y približno 150 km (sl. 6).



Sl. 6

Za ovaj slučaj popravka ω'_n ne može se izvaditi iz gotovih tablica jer su one izrađene za dužine ordinata, samo do 150 km, pa je potrebno izračunati.

Posmatrajući sliku 6 vidimo kolike velike deformacije nastaju na planovima, naročito u krajevima znatnije udaljenosti od srednjeg meridijana, kao što su krajevi jugoistočne Makedonije. Na planovima razmjere 1:500 razlika od 39 cm iznosi 0,8 mm.

Tačka	$y \cdot M = \breve{y}$	$\breve{y} + r_y$	Razlika	$x \cdot M = \breve{x}$	$\breve{x} + r_x$	Razlika
T_1	7 654 969,7o	7 655 ooo,39	+o,39	4 625 o95,8o	4 625 999,81	-o,19
T_2	7 658 968,92	7 658 999,61	-o,39	4 625 o95,8o	4 625 999,81	-o,19
T_3	7 658 968,92	7 658 999,61	-o,39	4 623 o96,19	4 624 ooo,2o	+o,2o
T_4	7 654 969,7o	7 655 ooo,39	+o,39	4 623 o96,19	4 624 ooo,2o	+o,2o

Tabela 2

Greška u dužini između tačaka T_1 — T_2 iznosi 78 cm (na dužini od 4 km).

Propis Pravilnika II A koji određuje kolike smiju biti najviše specifične linearne deformacije kod gradskih premjera, smatram, da bi trebalo proširiti i na premjere važnijih industrijskih bazena, rudarskih revira, hidromelioracionih terena, aerodroma, luka, itd., tojest svih onih objekata gdje je potrebna visoka tačnost planova. Ovakvom obračunu pogoduje i to što danas imamo takve materijale za izradu planova i njihovu reprodukciju, koji minimalno mijenjaju svoje dimenzije, te bi sva mjerenja na planovima krupne razmjere bila visoke tačnosti.

U pravilniku II A na str. 169 stoji:

„Da bi detalj na gradskim planovima odgovarao detalju na planovima atara izrađenim na temelju koordinata neoslobođenih deformacija, potrebno je pomjeriti koordinatni početak gradske mreže. Ovo se pomjeranje sastoji u dodavanju koordinatama gradske mreže (y, x) razlike

$$r_y = y_m - \breve{y}_m \, ; \quad r_x = x_m - \breve{x}_m$$

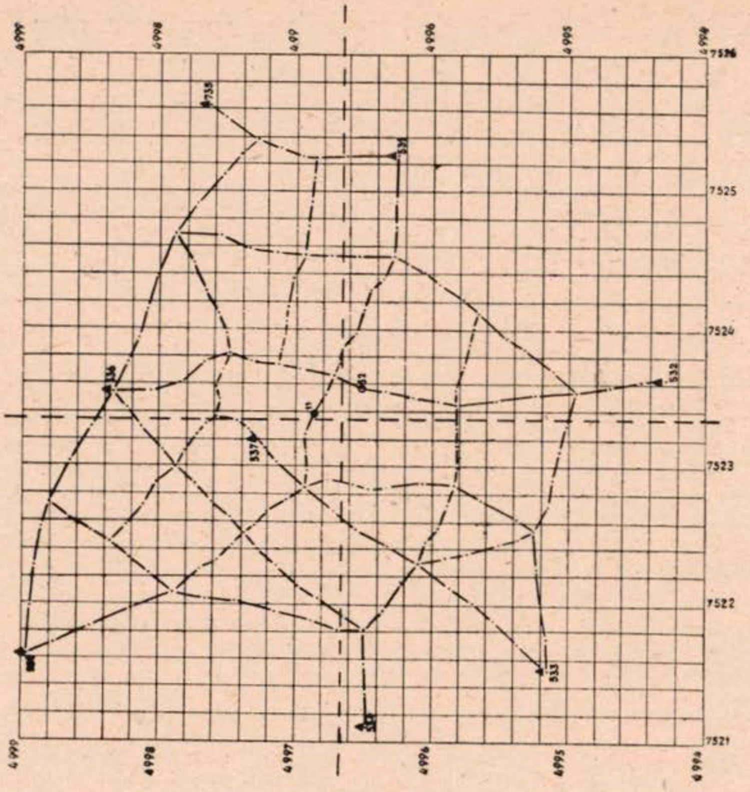
Ovaj pasus, međutim, iziskuje izvjesno detaljnije objašnjenje. Ne radi se ovdje stvarno o pomjeranju koordinatnog početka, bar ukoliko se tiče rasporeda listova. Raspored listova varoške mreže u krupnijoj razmjeri ostaje isti, samo koordinate trigonometriskih tačaka, da se tako izrazim, pulsiraju, dok ne zauzmu položaj kojim ograničavaju tačnu površinu (šire se kao što je slučaj sa teritorijom Sarajeva na sl. 5, ili se skupljaju, kakav je opet slučaj sa teritorijom varošice Pehčeva na sl. 6).

Ustvari, ovakvim računom, mi smo kroz ta mjesta (Sarajevo, odnosno Pehčevo) mimo odgovarajućih koordinatnih sistema br. 6 i 7, obrazovali posebne koordinatne sisteme u kome su srednji meridijani oni, koji prolaze kroz srednje tačke tih varoši, s tim što u ovom slučaju nisu uvučeni cilindri, nego tangirajući. Prema tome ovdje bi se moglo govoriti o pomjeranju, odnosno promjeni cijelog koordinatnog sistema.

Da ne postoji pomjeranje koordinatnog početka, u smislu istovremene promjene rasporeda listova, ilustriraćemo skicom poligonometriske mreže k. o. Vršca, iz pravilnika II A sl.7.

Na skici je crtkasto izvučen koordinatni početak, što je ustvari presjek meridijana i paralele kroz srednju tačku grada Vršca. U odnosu na taj koordinatni početak, trigonometriske tačke 534, 536, 735, 531 i 532, zavisno od svog položaja u mreži, zauzele su nova mjesta, tim više udaljena od svog položaja koga zauzimaju sa koordinatama neoslobođenim deformacija, što im je ordinata ili apscisa dotične tačke veća.

Kad bi sad smanjivanjem planova varoši Vršca htjeli da ih uklopimo u planove atara (van varoškir reon rađen u sitnijoj razmjeri), čije koordinate nisu oslobođene deformacija, pojavilo bi se izvjesno preklapanje detalja. Ovo bi se također pokazalo i kod Sarajeva, a u predjelu Pehčeva smanjeni varoški planovi i uklopljeni u vanvaroške, dali bi izvjesnu prazninu. Razumije se da bi taj međuprostor, zavisno od razmjere planova atara bio jedva vidljiv.



Sl. 4

Kao krajnje tačke mreže k. o. Vršca uzećemo:

najzapadniju 534 $y_z = 7\,521\,084{,}00$
najistočniju 735 $y_i = 7\,525\,612{,}00$
$y_z + y_i = 15\,046\,696{,}00$

$$y_m = \frac{y_z + y_i}{2} = 7\,523\,248{,}00$$

najsjeverniju 535 $x_s = 4\,998\,980{,}00$
najjužniju 532 $x_j = 4\,994\,300{,}00$
$x_s + x_j = 9\,993\,270{,}00$

$$x_m = \frac{x_s + x_j}{2} = 4\,996\,640{,}00$$

(Koordinate tačaka očitane sa skice poligonometriske mreže).

Prema tome koordinatni početak ispravljene gradske mreže biće:

$y = 7\,523\,348{,}00$
$x = 4\,996\,640{,}00$

Popravka u_2 za 23 km $= -0{,}00000651$
za 0,348 km $= -\ \ \ \ \ 20$
$-0{,}00000671$
$M = +1{,}00009330$

$x = 23\,348 \times 1{,}0000933 = 23\,350{,}18$ m
$y = 4\,996\,640 \times 1{,}0000933 = 4\,997\,106{,}19$ m

$r_y = 7\,523\,348{,}00 — 7\,523\,350{,}18 = — \quad 2{,}18$
$r_x = 4\,996\,640{,}00 — 4\,997\,106{,}19 = — 466{,}19$

tačka	y	x
536	7 523 520,00	4 998 355,00
531	7 525 255,00	4 996 274,00
532	7 523 610,00	4 994 300,00
534	7 521 085,00	4 996 474,00
⊙ 11	7 523 380,00	4 996 854,00
⊙ 32	7 523 580,00	4 996 535,00

Tabela 3

Tabela tačaka sa koordinatama neoslobođenih deformacija

Tabela 4

Tačka	$y \cdot M = \check{y}$	$\check{y} + r_y$	Razlika	$x \cdot M = \check{x}$	$\check{x} + r_x$	Razlika
536	7 523 522,19	7 523 520,01	+0,01	4 998 821,35	4 998 355,16	+0,16
531	7 525 257,36	7 525 255,18	+0,18	4 996 740,15	4 996 273,96	−0,04
532	7 523 612,20	7 523 610,02	+0,02	4 994 765,97	4 994 299,78	−0,22
534	7 521 186,97	7 521 084,79	−0,21	4 996 940,17	4 996 473,98	−0,02
⊙ 11	7 523 382,18	7 523 380,00	0,00	4 997 320,21	4 996 854,02	+0,02
⊙ 32	7 523 582,20	7 523 580,02	+0,02	4 997 001,18	4 996 534,99	−0,01

Tabela istih tačaka sa koordinatama oslobođene deformacija

Prema gore izabranom koordinatnom početku, ispravljene koordinate tačaka gradske mreže, šire se koncentrično (u predjelu Pehčeva skupljale bi se koncentrično), pošto se radi o konformnoj projekciji.

Ovdje se zapravo radi o izboru tačke — mjesta nultih deformacija.

Upoređujući prethodnu tabelu sa skicom poligonometriske mreže k. o. Vršca najbolje uočavamo to pomenuto kretanje (pulsiranje) tačaka. Trigonometriska tačka 536 pošto je na približno istom meridijanu kao i izabrani koordinatni početak, uglavnom se pomjerila na sjever od svog položaja sračunatog u opštem Gauss-Krügerovom sistemu, a pomjeranje po y-osi je neznatno, svega 1 cm.

Suprotno njoj, tačka 532 pomjerila se južnije (po x-osi) za 22 cm, a po y-osi također neznatno, svega +2 cm (istočno).

Trig. tačke 531 i 534 pomjerile su se pak, uglavnom po y-osi, jer su na istoj geografskoj širini kao i koordinatni početak, i to tačka 531 istočno za 18 cm, a 534 na zapad za 21 cm.

Poligonske tačke bliske koordinatnom početku 11 i 32, pomjerile su se neznatno, i to tačka 11 koja je sjeverno od koordinatnog početka za svega 2 cm po x-osi, a 32 koja se nalazi jugoistočno od koordinatnog početka, za 2 cm po y-osi i 1 cm po x-osi.

Sva iskolčenja kod prenosa regulacione osnove na teren, ako se vrše sa ovim ispravljenim koordinatama, daće maksimum tačnosti i slaganja s mjerenjem na terenu.

I grafički očitani elementi, pogotovu ako su uzeti sa planova rađenih na plastičnim folijama koje minimalno mijenjaju svoje dimenzije, također bi dali maksimalno slaganje.

DEFORMACIJE POVRŠINA

U ovoj projekciji, kao konformnoj, ne postoji deformacija uglova, što je već pomenuto; linearne deformacije smo prikazali, a sad da ustanovimo postoje li i kolike su površinske deformacije.

Razmjer površina je odnos između beskonačno male figure u projekciji, i njoj odgovarajuće beskonačno male figure na elipsoidu. Krug će se najčešće preslikati kao elipsa.

Pošto je površina elipse: $p = ab\pi$, a površina kruga sa radiusom $r = 1$ $p = \pi$, to će razmjer površine biti:

$$p = \frac{ab\pi}{\pi} = ab.$$

Sa a i b označavamo razmjer poluosa elipse, odnosno i razmjer po pravcima najvećih deformacija. Kod svih projekcija, u kojima se meridijani i paralele sijeku pod pravim uglovima, razmjer a i b je ujedno i razmjer po meridijanima i paralelama, tojest:

$a = n$ (razmjer po paraleli) i
$b) = m$ (razmjer po meridijanu)

U ostalim projekcijama, tojest u onim gdje meridijani i paralele zaklapaju izvjestan ugao, različit od 90^0, razmjer po paralelama i meridijanima biće konjugirani diametri m i n elipse.

Kako se ovdje radi o jednoj od konformnih projekcija, kod kojih je $a = b = m = n$, to

$$p = a^2 = b^2 = m^2 = n^2$$

Pošto je približna formula za razmjer dužina u nekoj proizvoljnoj tački:

$m_0 = 1 + \frac{y^2}{2\,R^2} - 0{,}0001$, to će prema prednjem izrazu razmjer površina biti:

$$p = m^2 = (1 + \frac{y^2}{2\,R^2} - 0{,}0001)^2 =$$

$$= 1 + \frac{y^2}{R^2} + \frac{y^4}{4\,R^4} - 0{,}0002 - \frac{0{,}00\text{)}y^2}{R^2} + 0{,}000\,000\,01$$

Kad faktore: $+ \frac{y^4}{4\,R^4}, - \frac{0{,}000y^2}{R^2} + 0{,}000\,000\,01$ kao beznačajno male

iznose zanemarimo, dobijemo konačnu formulu za razmjer površina:

$$p = 1 + \frac{y^2}{R^2} - 0{,}0002$$

Iz formule vidimo da je razmjer površina na srednjem meridijanu, pošto je $y = 0$ km, jednako:

$$p = 1 - 0{,}0002 = 0{,}9998.$$

Prema tome, stvarna površina jednog hektara na planu — na srednjem meridijanu, a pod pretpostavkom da ne postoji, odnosno da je isključena promjena dimenzija hartije, biće:

$$10.000\text{m}^2 \cdot 0{,}9998 = 99 \text{ a } 98\text{m}^2,$$

odnosno svaki hektar površine na srednjem meridijanu je manji za 2 m^2.

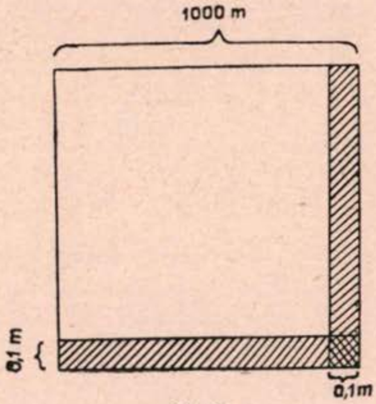
U formuli za razmjer površina, članovi:

$\frac{y^2}{R^2} - 0{,}0002$ predstavljaju površinsku deformaciju δ_p za svaki kvadratni metar

površine:

$$\delta_{p/1\,m^2} = \frac{y^2}{R^2} - 0{,}0002; \quad p = 1 + \delta_{p/1\,m^2}$$

Upoređujući ovaj iznos površinske deformacije sa linearnom deformacijom, vidimo da je greška u površini za svaki 1 m^2 dvostruko veća od linearne deformacije na 1 dužni metar. Do ovog iznosa površinske deformacije mogli smo doći i na ovaj, veoma jednostavan način. Neka nam sl. 8 predstavlja kvadrat sa stranom od 1.000 m, tojest 1 km^2 ili 100 ha u prirodi. U projekciji, na srednjem meridijanu, kvadrat će se preslikati sa stranama umanjenim za po 10 cm. Površinska greška će biti šrafirani dio:



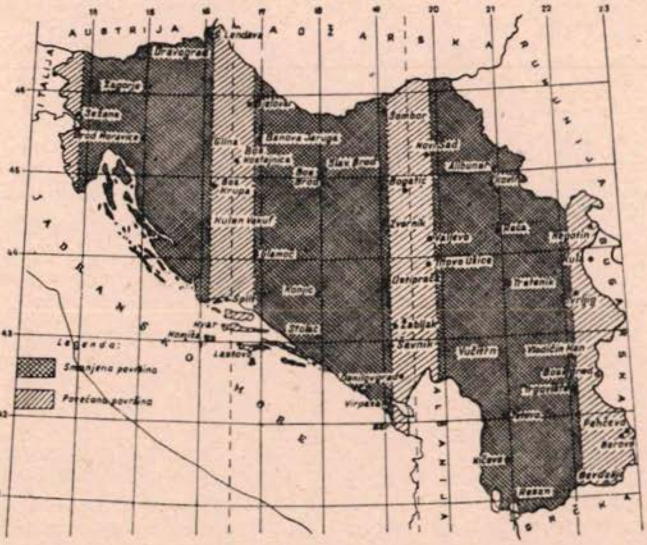
Sl. 8

1.000 m · 0,1 m = 100 m^2 · 2 = 200 m^2. Prema tome na 1 ha dolazi greška od 2 m^2.

STVARNA POVRŠINA FNRJ JUGOSLAVIJE

Pošto sad možemo sračunati površinske deformacije na svim udaljenostima od srednjeg meridijana, možemo ustanoviti i to, da li je, obzirom na ovu izabranu projekciju, usvojenu širinu zona i tačnost, cijela površina FNRJ za neki iznos veća ili manja, od statistički iskazane površine.

Na slici 9 prikazani su pojasevi smanjene, kao i povećane površine. Kao što je već navedeno, na srednjim meridijanima zona (15^0, 18^0 i 21^0), svaki hektar površine je manji za 2 m^2, na udaljenju od po 90 km lijevo i desno od srednjih meridijana površine su tačne, a na 127 km od srednjih meridijana svaki hektar površine je veći za 2 m^2.



Sl. 9

U slijedećoj tabeli sračunati su (logaritmarom) iznosi površinskih deformacija na 1 m² površine za svakih 5 km udaljenosti od srednjeg meridijana, do krajnje udaljenosti od 160 km (Jugoistočni krajevi naše države).

Tabela 5

y u km	smanjena površina po 1 m²
0	0,0002000
5	0,0001994
10	0,0001975
15	0,0001945
20	0,0001900
25	0,0001846
30	0,0001778
35	0,0001700
40	0,0001600
45	0,0001500
50	0,0001385
55	0,0001262
60	0,0001113
65	0,0000966
70	0,0000793
75	0,0000615
80	0,0000420
85	0,0000220
90	0,0000000
Σ =	0,0025012
sred.=	0,000132

y u km	povećana površina po 1 m²
90	0,000000
95	0,000022
100	0,000046
105	0,000070
110	0,000098
115	0,000125
120	0,000155
Σ =	0,000516
sred.=	0,0000737

120	0,000155
125	0,000185
130	0,000216
135	0,000249
140	0,000283
145	0,000316
150	0,000354
155	0,000390
160	0,000430
Σ =	0,002578
sred.=	0,000287

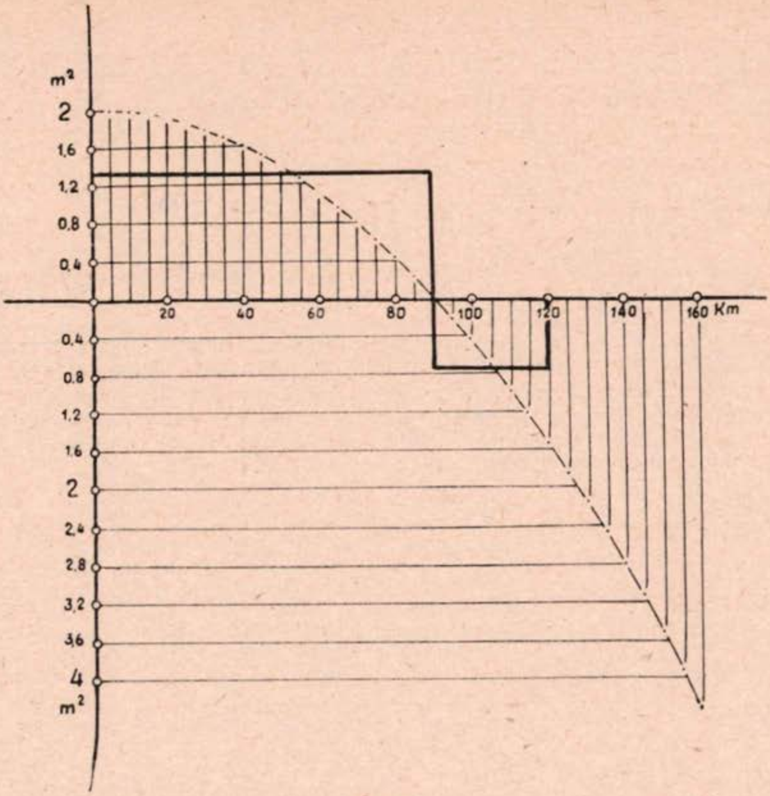
Tabela smanjenja odnosno povećanja površine po 1 m²

Iz gornje tabele vidi se da je srednji iznos smanjenja na udaljenosti od y = 0 km do y = 90 km = 1,32 m² po hektaru, a povećanja na udaljenosti od y = 90 km do y = 120 km = 0,74 m² po hektaru.

U zadnjoj koloni tabele sračunati su iznosi povećanja površine na udaljenosti y = 120 km do y = 160 km i iznosi 2,87 m² po hektaru, što je već znatna deformacija.

Po gornjim podacima izrađen je i grafikon (slika 10). Na apscisnu osovinu nanijete su vrijednosti smanjene, odnosno povećane površine u kvadratnim metrima po hektaru površine, a na ordinatnu osovinu udaljenja u kilometrima od x-ose (srednjih meridijana).

Računanjem iznosa površina ograničenih koordinatnim osima i krivom, i njihovim svođenjem na zajedničku osnovu, dobio sam srednje iznose za koliko se površina smanjuje odnosno povećava u pojedinim pojasevima, a to je, razumljivo, isti iznos kao i srednja vrijednost iz zbira u tabeli.



Sl. 10

Još tačniji iznos srednjih vrijednosti dobićemo integrirajući izraz:

$$p = 1 + \frac{y^2}{R^2} - 0{,}0002$$

u granicama od y = 0 km do y = 90 km, i u granicama od y = 90 km do y = 120 km.

$$P \quad \text{srednje smanjenje} = \frac{1}{90}\int_0^{90} (1 + \frac{y^2}{R^2} - 0{,}0002)\, dy =$$

$$= \frac{1}{90}(y + \frac{y^3}{3\ R^2} - 0{,}0002y)_0^{90} =$$

$$= 1 + \frac{90^2}{3\ R^2} - 0{,}0002 = 1 + 0{,}0000667 - 0{,}0002 = 0{,}9998667$$

Sračunata vrijednost predstavlja srednju vrijednost razmjere površine u pojasu smanjenja.

Za srednju vrijednost razmjere povećanja površine, integriraćemo gornji izraz u granicama od y = 90 km do y = 120 km.

$$P_{sred.\ poveč.} = \frac{1}{30}\int_{90}^{120}(1 + \frac{y^2}{R^2} - 0{,}0002)\,dy =$$

$$= \frac{1}{30}(30 + \frac{120^3 - 90^3}{3\,R^2} - 0{,}0002 \cdot 30) = 1{,}000075$$

Sračunate vrijednosti 0,9998667 i 1,000075 predstavljaju koeficijente kojim treba množiti sračunate površine odgovarajućeg pojasa, da bi se dobila tačna površina.

Upoređujući vrijednosti deformacije površina iz tabele, odnosno grafikona, i vrijednosti dobivenih integriranjem, vidimo da su razlike neznatne - svega 0,000001.

U slijedećoj tabeli iskazani su iznosi smanjenja, odnosno povećanja površine po pojedinim pojasevima, odnosno i ukupnog smanjenja površine cijele SNRJ.

Površine pojedinih pojaseva računate su sa sitnorazmjernih karata i svedene na statistički iskazanu površinu naše države.

Tabela 6

Pojas sa srednjim meridijanom	Smanjena površina ha	a	Pojas sa srednjim meridijanom	Povećana površina ha	a
15°	593	00	13° 30′	7	46
18°	867	00	16° 30′	152	00
21°	1.049	00	19° 30′	186	00
	2.509	00	22° 30′	240	00
				585	46

Ukupno smanjenje: —2.509 ha 00 a
Ukupno povećanje: + 585 ha 46 a
Razlika: —1.923 ha 54 a

Ovdje moramo naglasiti da, danas, statistički iskazana površina naše države u iznosu od 255.804 km² nije tačna. Ta je površina dobivena iz podataka i elaborata svih dosadašnjih, raznih premjera, različite tačnosti (nažalost, uglavnom male tačnosti). Međutim i kad cijela naša teritorija bude nanovo premjerena u ovoj, usvojenoj, Gaus-Krigerovoj projekciji, planovi izrađeni i sračunate površine, opet će ukupna državna teritorija biti manja za cca 19 km² kako je to naprijed i objašnjeno.

Pri računjanju površina na planovima, ove se razlike u površini neće osjetiti, jer ih koordinate triangulacijonih tačaka već u sebi sadrže, odnosno prilikom usvajanja ove projekcije već se unaprijed pomirilo sa tom površinskom greškom.

Razlike u površini bi se istina mogle uzimati u obzir, tako, da iznos svakog lista odgovara zakrivljenoj sfernoj površini, ali ovo bi uveliko komplikovalo računanje.

Iz grafikona vidimo da se svaka trigonometriska sekcija istočno i zapadno od srednjih meridijana mijenja u površini i to: prve sekcije uz srednje meridijane od - 2 m² do - 1,87 m² po hektaru, odnosno da je svaka trigonometriska sekcija uz srednje meridijane manja u prosjeku za 6 ha 60 a, odnosno svaki list razmjere 1:2.500 za 6 a 60 m².

Dok se kod dužina, da bi ih dobili tačne, moraju popravljati mjereni iznosi sa plana, odnosno sračunatih iz koordinata tačaka, množenjem sa modulom m_0, dotle, da bi dobili tačne površine, faktički moramo kvariti one iznose sa plana.

Dok će svaki posjed u krajevima koji leže uz srednje meridijane, kao Dravograd, Slavonski Brod, Bosanski Brod, Tetovo i druga, ranije već navedena mjesta, biti manji na 10 ha za 20 m², dotle će posjedi u jugoistočnom dijelu države na svakih 10 ha biti veći za 40 m². Konkretno, prvi posjednici bi plaćali nešto manje poreza, a drugi više. Ovo je, doduše, novčano iskazano, neznatan iznos sve kad bi uzeli i najvišu kulturu i klasu.

ORIJENTACIJA PLANOVA

Već je pomenuto da u ovoj projekciji, kao komfornoj, ne postoji deformacija uglova, ali postoji zakošenost planova u odnosu na istinski meridijan.

Planovi su orijentirani tačno na sjever samo uz srednje meridijane, a sa udaljenjem od njih zakošenost je sve veća. Navedeno je već da su planovi Sarajeva zakošeni za cca 20', a planovi istočnog dijela naše države znatno više. Zakošenost planova već pomenutih varošica Pehčeva i Berova je oko 1°16'.

Ta zakošenost je istočno od srednjih meridijana udesno, a zapadno od srednjih meridijana ulijevo.

Literatura:

1) Ing.B. Borčić: Gauss-Krügerova projekcija, Beograd, 1955.
2) Ing. B. Borčić: Matematička kartografija, Zagreb, 1955.
3) Ing. A. Podpečan: Potreba tipografskih planova i karata, Beograd, 1957.
4) M. Terzić, general: Viša geodezija (Kartografija), Beograd, 1935.
5) A. V. Graur: Matematička kartografija, Lenjingrad, 1956.
6) D. Ž. Šobić, puk: Matematička kartografija, GIJNA-Beograd, 1955.
7) K. A. Sališčev: Osnovi nauke o kartografiji (prevod), Beograd, 1951.
8) Časopis: Geometarski i geodetski list, Beograd.
9) Časopis: Geodetski list, Zagreb.
10) Pravilnik za državni premjer, I. dio: Triangulacija, Beograd, 1951.
11) Pravilnik za državni premjer, II A. Beograd, 1958.