»ARENA« — AMFITEATAR U PULI IZRADA PLANOVA ZA KONZERVATORSKU SLUŽBU I REKONSTRUKCIJU

VELJKO PETKOVIĆ dipl. inž — Zagreb

(kraj)

V.

GEODETSKO-ARHEOLOŠKA ANALIZA

Nakon ovako izvršenog snimanja i određivanja elemenata za utvrđivanje svih mogućih odnosa među detaljnim točkama za momenat mjerenja, sigurno se može na osnovu dobivenih podataka dati analiza i za kompletan objekat.

Prvo pitanje koje se može postaviti jest kakav je oblik »Arene« da li proizvoljna krivulja slična elipsi ili je to krivulja matematski određena i prenesena na teren. Ako se pretpostavi druga mogućnost postavlja se pitanje s kojom je tačnošću izvršeno iskolčenje i da li je tako veliki objekat smješten podno brijega u toku 2000 g pretpio deformacije.

A. Broch u svom članku »Das Amphiteater in Pula« od 1909. g. prvi se počeo baviti tim pitanjem. On je za ispitivanje oblika krivulje koristio plan u mjerilu 1 : 250 iz godine 1899. kojega je izradio Bečki ured za triangulaciju· Sa tog plana čitao je koordinate za 12 tačaka na nutarnjoj strani elipse. Prema podacima može se zaključiti da je tačnost očitavanja do ± 5 cm. Za određivanje matematskog oblika elipse potrebno je odrediti 5 nepoznanica prema općoj jednadžbi za krivulje 2 reda:

$$ay^2 + b_{xy} + cx^2 + dy + ex + f = 0 \qquad (1$$

ili ako se jednadžba podjeli sa f može se pisati u obliku

$$Ay^2 + B_{xy} + Cx^2 + Dy + Ex + 1 = 0 \qquad (2)$$

U tom je slučaju potrebno znati koordinate **x** i **y** za najmanje 5 tačaka, pa će se dobiti i 5 jednadžbi. Međutim, on je uzeo 7 prekobrojnih mjerenja i na taj način je dobio za nepoznanice A, B, C, D i E najvjerojatnije vrijednosti što je samo povećalo tačnost određivanja gornjih veličina odnosno, mogao je tačnije odrediti onu elipsu koja se bolje prilagođuje onoj Arene« dobijene na planu.

Rješenjem jednadžbi dobio je:

$$B^2 - 4AC < 0$$

što znači da tačke za koje je očitao koordinate leže na krivulji 2 reda — elipsi.

Da bi odredio eventualna odstupanja ovih tačaka od matematskog izraza za elipsu u gornju jednadžbu je uvrstio vrijednosti koordinata.

U daljenjem izvodu dobijene su vrijednosti za v_y i v_x kojima se moraju popraviti koordinate tačaka da zadovolje jednadžbu elipse.

$$(2Ay + Bx + D)\,v_y + (By + 2Cx + E)\,v_x + v = 0$$

ili

$$a_1 v_y + a_2 v_x + v = 0$$

odakle

$$v_y = -\frac{a_1 v}{a_1^2 + a_2^2}; \quad v_x = -\frac{a_2 v}{a_1^2 + a_2^2}$$

Rješenjem ovih jednadžbi dobiju se popravke za koordinate **x** i **y**, a ujedno se vidi za koliko treba popraviti koordinate, da zadovolje matematski oblik elipse. A. Broch je dobio ostupanja za koordinatu y od 0,00 m do 0,28 m, a za koordinatu x od 0,00 do 0,27.

Za srednje pogreške koordinata dobio je:

$$My = \pm\sqrt{\frac{[dy^2]}{12}} = \pm 1.2\,\mathrm{dm}; \quad Mx = \pm\sqrt{\frac{[dx^2]}{12}} = \pm 1.1\,\mathrm{dm}$$

a za srednju vrijednost pogreške tačaka dobija

$$M = \pm\sqrt{\frac{[dy^2 + dx^2]}{12}} = \pm 1{\cdot}6\,\mathrm{dm}$$

Na osnovu dobijenih podataka sračunao je veliku i malu os elipse kao i druge karakteristične veličine

$2a = 129.866$ m
$2b = 102.560$ m

linearni excentricitet $E = \sqrt{a^2 - b^2} = 39.83$ m

numeristički excentricitet $\grave{e} = \frac{E}{a} = 0{,}613$ m

opseg = 366.3 m
i površina = 1 ha 0,4 a 60 m²

Gornje vrijednosti se odnose na nutarnju elipsu. Za debljinu zida uzeo je u prosjeku 1,75 m., pa je tom veličinom popravio gornje vrijednosti i dobio za vanjsku liniju

$2a = 133{,}366$ m
$2b = 106{,}060$ m

linearni excentricitet = 40.43
numerički exceitricitet = 0.606

$$\text{opseg} = 377.3 \text{ m}$$
$$\text{i površina} = 1 \text{ ha } 11 \text{ a } 09 \text{ m}^2$$

U djelu »Die österr-ung Monarchie in Wert und Bild« dati su podaci za elipse amfiteatra

$$\frac{137}{110} \text{m} \left(+\frac{3.6}{3.9}\right)$$

U Meyers konversationlexikon

$$\frac{137.4}{110.5} \left(+\frac{4.0}{4.4}\right)$$

U dr. Kubitscheks und dr. Frankfurtes Führer durch Carnuntum

$$\frac{138}{113} \left(+\frac{4,6}{6,9}\right)$$

ovi zadnji podatci su očito dobijeni na osnovu grubih mjerenja, pa ih i ne uzimamo u obzir. 1822 u Venecıji je izišlo djelo kanonika Stankovića »Dello amfiteatro di Pola«. On je dao dimenzije osovina u venecijfskim stopama. Kada je A. Broch preračunavao te vrijednosti u metre dobio je za

$$2a = 137.8 \text{ m}$$
$$2b = 110.5 \text{ m}$$

odnosno kada je uzeo za 1 venecijsku stopu = 0.34737 m dobio je za veliku

$$\text{os } 2a = 132.35 \text{ m}$$
$$\text{opseg} = 378.63 \text{ m}$$
$$\text{za malu os } 2b = 106.12 \text{ m}$$

Prilikom novog snimanja, 108 posebno odabranih tačaka za određivanje oblika krivulje uzimane su u raznim horizontma na vanjskom i unutarnjem plaštu. Cilj je bio, da se računajući visine osovina dođe do razlike u debljinama zidova i do eventualnih deformacija krivulje na raznim nivoima.

Može se smatrati da je izbjegnuta svaka nepravilnost u položaju izabranih tačaka, vodeći računa o izboru na sastavima kamenih blokova koji su neoštećeni (vidi sl. 7. Iz ovoga dijela zadatka izdvojena je krivulja same »Arene« tj. centralnog dijela, borilišta. Tu su se jedino mogle dobiti tačke na kontinuiranoj krivulji u jednom nivou. Dakle jedino moguće da se računski odredi cjelina. Na toj liniji uzeto je 13 tačaka. S obzrom na uščuvanost rubnog kamena moglo se toj elpsi dati u cijeloj analizi najveću težinu. To su potvrdili kasnije i računski rezultati.

U II katu na vanjskom i unutarnjem plaštu uzeto je po 13 tačaka.

U III katu na vanjskoj strani zida uzeto je 12 tačaka dok ih je na unutarnjem plaštu sniamljeno 16.

Od 108 snimljenih tačaka uzeto je u izjednačenje 69 tačaka. Potrebno je napomenuti da su tačke u II katu na vanjskom i unutarnjem plaštu smještene samo na pola elipse i to istočnog dijela, dok se tačke u III katu vanjskog i unutrašnjeg plašta nalaze na pola krivulje i to zapadne strane (vidi sl. 8).Ovakav izbor tačaka se morao napraviti iz razloga što postoje velike visinske razlike terena među katovima. Nije bilo moguće ni u II, a ni u III katu snimiti ovako izabrane tačke na cijeloj elipsi, a da kod toga uslijed kosog mjerenja ne bude pogrešaka.

Radi lakšeg računanja reducirane su sve koordinate detaljnih tačaka, koje su uzete u obzir za računanje oblika elipse, u koordinatni sistem čije je ishodište pomaknuto približno u središte elipse same »Arene« i plašteva. Ovdje prikazani postupak odnosi se samo na centralni dio tj. »Arenu«.

S obzirom na izabranih 15 tačaka i 15 jednadžbi oblika (2) na osnovu kojih su postavljene normalne jednadbe oblika:

$$\begin{aligned}
[x^2y^2]A + [y^2xy]B + [y^2x^2]C + [y^2y]D + [y^2x]E + [y^2] &= 0\\
[xyxy]B + [xyx^2]C + [xyy D + [xyx]E + [xy] &= 0\\
[x^2x^2]C + [x^2y]D + [x^2x]E + [x^2] &= 0\\
[y^2]D + [yx]E + [y] &= 0\\
[x^2]E + [x] &= 0
\end{aligned}$$

Rješenjem ovih jednadžbi dobit će se nepoznanica A, B, C, D, E. Ako se sada u jednadžbi elipse (2)uvrste vrijednosti za koordinate pojedinih tačaka x i y i pomnože sa odgovarajućim koeficijentima A, B, C, D, E, dobit će se za svaku pojedinu tačku ostupanje v, koja će ukazati za koliko koordinate pojedinih tačaka ne zadovoljavaju postavljeni oblik matematske krivulje II reda. Da se zadovolje jednadžbe (2) moraju se popraviti koordinate tačaka za odgovarajuće veličine v_y i v_x koje su još nepoznate. Za rješenje zadatka primjenjena su uvjetna mjerenja i za svaku tačku dobijene jednadžbe oblika:

$$\begin{aligned}
A(y+v_y)^2 + B(x+v_x)(y+v_y) + C(x+v_y)^2 + D(y+v_y) + \\
+ E(x+v_x) + 1 = 0 \qquad (3)
\end{aligned}$$

Ako se zanemare kvadrati veličini v_x i v_y, nakon rješenja i sređivanja jednadžbi dobija se:

$$(2Ay + Bx + D)\, v_y + (By + 2Cx + E)\, v_x + v = 0 \qquad (4)$$

Označe li se članovi u zagradi sa a_1 i a_2 dobija se skraćeni oblik jednadžbi:

$$a_1 v_y + a_2 v_x + v = 0 \qquad (5)$$

Da se ove riješe uz uvjet $[v_y^2 v_x^2]$ = minimum postavlja se normalna jednadžba oblika:

$$[aa]\, k + v = 0$$

a odatle rješenjem se dobija

$$K = -\frac{v}{a_1^2 + a_2^2}$$

i dalje (6)

$$v = -\frac{a_1 v}{a_1^2 + a_2^2}; \qquad v_x = -\frac{a_1 v}{a_1^2 + a_2^2}$$

Ako se ovim veličinama poprave dobijene kordinate onda će sve tačke biti dovedene na liniju pravilne matematike krivulje drugog reda.

Br. toč	Reducirane koordinate yo 509548,00	xo 950520,00	Kvadrati i umnošci reduciranih koordinata				
	y	x	y^2	xy	x^2	s	1
62	+13.05	+28.69	170.3025	+374.4045	823.1161	1410.5631	1
64	+ 1.47	+27·59	2.1609	+ 40.5573	761.2081	833.9863	1
65	— 8,01	+22.64	64.1601	—181.3464	512.5696	411.0133	1
66	+23·74	+ 4.03	563.5876	+ 95.6722	16.2409	704.2707	1
67	+24.81	+11.66	615.5361	+289.2846	135.9556	1078.2463	1
70	+20.82	+24.49	433.4724	+509.8818	599.7601	1589.4243	1
80	—17·72	—30.79	313.9984	+545.5988	948.0241	1760.1113	1
83	— 2.63	—28.23	6.9169	+ 74.2449	796.9329	848.2347	1
85	+11.01	—18.05	121.2201	—198.7305	325.8205	242.2521	1
87	+18.74	— 7,76	351·1875	—145.4224	60.2176	277.9628	1
89	—15.63	+16.06	244.2969	—251.0178	257.9236	252.6327	1
92	—25.26	+ 2.26	638.0676	— 57.0876	5.1076	564.0876	1
93	—28.80	— 8.78	829·4400	+252.8640	77.0884	1122.8124	1
95	—28.57	—20.46	816.2449	+584.5422	418.6116	1771.3687	1
96	—25.84	—25.92	667.7056	+669.7728	671.8464	1958.5648	1
	—38.82	— 2.57	5838.2976	2603.2184	6410.4051	14825.5311	15

Prva jednadžba prema tome glasi:

170,3025A + 374, 40445B + 823, 1161C + 13,05D + 28,69E + 1 = O

Iduće se mogu sastaviti po analogiji.

Sastav normalnih jednadžbi

Numeričke vrijednosti za					apsolutni član	Suma
A	B	C	D	E		
3 421 076,4	1 638 216,5	1 811 854,5	—42 676,2	—24 238,5	5 838.2976	6 810071.0
	1 811 854,5	1 744 832,3	—24 238,5	—25 879,5	2 603,2184	5 147388,5
		4 240 877,1	—25 879,5	— 7 976,9	6 410,4051	7 770117,9
			5 838,3	2 603,2	— 38,8200	— 84391,5
				6 410,4	— 2,5700	— 49083,8
					15,0000	— 14825,5

Rješenjem normalnih jednadžbi dobiju se koeficijenti A, B, C, D, E, pa ako se te vrijednosti uvrste u jednadžbu (2) i pomnože sa odgovarajućim veličinama koordinata pojedinih tačaka dobiju se popravke »v« prema tabeli 3.

	Ay^2	Bxy	Cx^2	Dy	Ex	1	V
62	—0.2893	+0.5031	—1.1337	—0.0837	+0.0085	1	+0.0049
64	—0.0037	+0.0545	—1.0485	—0.0094	+0.0082	1	+0.0011
65	—0.1090	—0.2437	—0.7060	+0.0514	+0.0067	1	—0.0006
66	—0.9573	+0.1286	—0.0224	—0.1524	+0.0012	1	—0.0023
67	—1.0455	+0.3887	—0.1873	—0.1592	+0.0034	1	—0.0001
70	—0.7363	+0.6852	—0.8261	—0.1336	+0.0072	1	—0.0036
80	—0.5333	+0.7332	—1.3058	+0.1137	—0.0091	1	—0.0013
83	—0.0117	+0.0998	—1.0977	+0.0169	—0.0083	1	—0.0010
85	—0.2059	—0.2671	—0.4487	—0.0707	—0.0053	1	+0.0023
87	0.5965	—0.1954	—0.0829	—0.1203	—0.0023	1	+0.0026
89	—0.4149	—0.3373	—0.3552	+0.1003	+0.0047	1	—0.0024
92	—1.0838	—0.0767	—0.0070	+0.1621	+0.0007	1	—0.0047
93	—.14088	+0.3398	—0.1062	+0.1848	—0.0026	1	+0.0070
95	—1.3864	+0.7855	—0.5766	+0.1833	—0.0060	1	—0.0002
96	—1.1341	+0.900	—0.9254	+0.1658	—0.0077	1	—0.0014

Za određivanje popravaka v_y i v_x za svaku pojedinu koordinatu snimljenih tačaka mora se izvršiti računanje prema jednadžbama (4,) (5) i (6). Vrijednosti za v_y i v_x prema jednadžbama (5) i (6) date su u tabeli 4.

Popravke za koordinate *T 4*

T	v_y m	v_x m
62	+0.01	+0.07
64	± 0.00	+0.01
65	± 0.00	—0.01
66	—0.02	—0.01
67	± 0.00	± 0.00
70	—0.04	—0.03
80	± 0.00	—0.02
83	—0.01	+0.01
85	+0.01	—0.01
87	+0.03	—0.04
89	+0.02	—0.01
92	+0 03	—0.01
93	—0.09	+0.01
95	± 0·00	± 0.00
96	+0.02	+0.01

Da se odredi s kojom su tačnosti određene koordinate tačaka sračunate su srednje pogreške za x i y:

$$m_y = \sqrt{\frac{[v_y^2]}{K}} = \pm \sqrt{\frac{0.0130}{15}} = \pm 0.03\,m$$

$$m_x = \pm \sqrt{\frac{[v_x^2]}{K}} = \pm \sqrt{\frac{0.0087}{15}} = \pm 0.02\,m$$

U svrhu računanja dimenzija elipse i druge njene karakteristične elemente potrebno je kao prvo odrediti tačke gdje velika os sječe liniju krivulje.

Ako koordinate ovih dviju tačaka označimo sa x_1 i y_1, x_2 i y_2 i uvrstimo ih u općujednadžbu (2) dobija se:

$$Ay_1^2 + Bx_1y_1 + Cx_1^2 + Dy_1 + Ex_1 + 1 = 0$$

$$Ay_2^2 + Bx_2y_2 + Cx_2^2 + Dy_2 + Ex_2 + 1 = 0$$

Ako se ove dvije jednadžbe zbroje dobije se izraz:

$$A(y_1^2 + y_2^2) + B(x_1y_1 + x_2y_2) + C(x_1^2 + x_2^2) D(y_1 + y_2) + E(x_1 + x_2) + 2 = 0 \tag{7}$$

Dalje se može pisati da je

$$y_1^2 + y_2^2 = \frac{1}{2}[(y_2 - y_1)^2 + (y_2 + y_1)^2]$$

$$x_1y_1 + y_2x_2 = \frac{1}{2}[(y_2 - y_1)(x_2 - x_1) + (y_2 + y_1)(x_2 + x_1)]$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)^2 + (x_2 + x_1)^2]$$

Označe li se sa x_0 y_0 koordinate središta elipse, a sa α kut što ga zatvara velika os elipse sa osi x dobija se

$$(y_2 + y_1) = 2y_0$$

$$(x_2 + x_1) = 2x_0$$

$$(y_2 - y_1) = 2a \sin\alpha$$

$$(x_2 - x_1) = 2a \cos\alpha$$

ako se ove vrijednosti uvrste u jednadžbu (7) dobija se izraz za veliku os elipse:

$$a^2 = \frac{(Ay_0^2 + Bx_0y_0 + Cx_0^2 + Dy_0 + Ex_0 + 1)}{A\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha} \tag{8}$$

a za malu os elipse dobije se:

$$b^2 = \frac{(Ay_0^2 + Bx_0y_0 + Cx_0^2 + Dy_0 + Ey_0 + 1)}{A\cos^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha} \tag{9}$$

Koordinate centra elipse dobiti će se prema izrazima u općem obliku:

$$y_0 = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}$$

$$x_0 = \frac{2AE - BD}{B - 4AC}$$

Nakon ovoga izrazi (8) i (9) mogu se pisati u ovom obliku:

$$a^2 = \frac{-(Dy_0 + Ex_0 + 2)}{2(A\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha)}$$

$$b^2 = \frac{-(Dy_0 + Ex_0 + 2)}{2(A\cos^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)}$$

kut nagiba velike osi prem aosi x koordinatnog sistema, računa se prema formuli

$$tg 2a = -\frac{B}{A-C}$$

Rješenjem normalnih jednadžbi iz tabele 2 dobiju se nepoznanice:

$A = -0{,}001\,698\,54$
$B = +0{,}001\,343\,78$
$C = -0{,}001\,377\,38$
$D = -0{,}006\,417\,92$
$E = +0{,}000\,295\,83$

pa jednadžba koja se najviše približava krivulji »Arene« glasi:

$$-0{,}00169854\,y^2 + 0{,}00134378\,xy - 0.00137738\,x^2 - 0{,}00641792\,y + + 0{,}00029583\,x + 1 = 0$$

Uvrštavanjem vrijednosti ovih koeficijenata u gornje izraze dobiju se numeričke vrijednosti za:

a) reducirane koordinate centra elipse:

$y_0 = -2{,}288$ m
$x_0 = -1{,}009$ m

b) za kut između osi x u našem kordinatnom sistemu i velike osi

$\alpha = 18^0\,16'\,45''$

c) za veliku i malu os centralne elipse dobiju se vrijednosti:

2a = 68,962 m	2b = 42,516 m
a = 34,481 m	b = 21,258 m

Za sračunate elipse vanjskog i unutarnjeg plašta II i III kata date su u tabeli 5 samo vrijednosti za v_y i v_x koje karakteriziraju tačnost radova i samog snimanja kao i oblik krivulje. Na osnovu tih podataka iz tabele 4 i 5 može se zaključiti da od sračunatih 138 koordiiatnih razlika njih

99 se nalazi u granicama od 0— 5 cm
23 se nalazi u granicama od 5—10 cm
14 se nalazi u granicama od 10—20 cm
2 se nalazi u granicama od 20—30 cm

Ove razlike su rezultat raznih uvjeta koji su nastali prilikom gradnje, a i prilikom mjerenja. Nemože se potpuno isključiti slučaj da je negdje uzeta tačka i na bunji, što bi s obzirom na njenu debljinu mnogo promijenilo dužinu a time i koordinate. Postojala je mogućnost, da se iz računanja izbace koordinate koje su mnogo ostupale. Time bi se sve druge pogreše smanjile i dobile bolje slaganje. Pošto se išlo za tim, da se dobije što vjernija slika momentalnog stanja objekata nisu izvršene te popravke, koje čak promatrane iz kancelarije ne moraju biti opravdane. Redukcija koordinata snimljenih tačaka uzetih u računanje, izvršena je s toga što bi se s obzirom na veliki broj tačaka mnogo povećalo računanje, a na dobljanje oblika krivulje ne bi ništa bitno utjecale. Iz priloženih tabela 4 i 5 može se zaključiti da je najbolje slaganje kod »Arene« dakle centralne elipse. To je i razumljivo pošto je bio i najlakši izbor tačaka. Odstupanja kod centralne elipse su u prosjeku 3 cm. Može se sa puno sigurnosti ovu tačnost uzeti kao realnu i za druge elipse mimo ostupanja koja su mnogo veća. Ta bi se vrijednost podudarala i sa onom dobijenom iz analize tačnosti kod snimanja i kod kartiranja. Prema tome veličine v_y i v_x mogu se smatrati kao posljedice grešaka slučajno nastalih kod snimanja ili samog iskolčenja. Centralnu elipsu je bilo mnogo lakše konstatirati, jer je izvedena u ravnici. Elipsu zidova usljed visokih razlika je vjerojatno bilo teže izvesti na terenu. Može se na kraju zaključiti na osnovu ovih matematskih podataka da su stari »gromatici« to napravili sa velikom tačnosti. Važno je u ovoj analizi konstatirati, da cijela konstrukcija u ovom tlocrtu, nije u toku tolikih godina pretrpla nikakve promjene.

U tabeli 6 dat je pregled, za svih pet sračunatih elipsa, vrijednosti za kut nagiba, linearni i numerički excentricitet, te veličine, kao i razlike u velikoj i maloj osi elipse.

II kat vanjski plašt			II kat unutarnji plašt			III kat vanjski plašt			III kat unutarnji plašt		
T	Vym	Vxm	T	Vym	Vxm	T	Vym	Vxm	T	Vym	Vxm
1	+0.01	+0.06	45	—0.02	+0.08	13	—0.12	—0.01	54	—0.11	—0.01
4	+0.01	+0.02	47	+0.04	—0.09	14	—0.20	+0.00	55	+0.15	+0.11
27	+0.01	+0.02	49	+0.00	—0.03	5	—0.05	—0.08	56	+0.10	+0.04
29	+0.03	+0.04	51	—0.01	—0.02	7	+0.05	+0.04	57	+0.04	+0.01
34	—0.01	—0.00	53	+0.10	+0.12	15	+0.08	—0.03	58	—0.21	+0.00
31	—0.12	—0.08	79	+0.02	+0.13	9	+0.18	+0.09	59	—0.05	+0.01
33	—0.01	—0.00	97	—0.05	—0.08	11	+0.05	+0.01	60	+0.02	—0.01
36	+0.11	—0.02	98	—0.04	—0.04	22	—0.04	+0.06	61	+0.01	—0.01
38	+0.07	—0.03	99	—0.09	—0.08	17	+0.06	—0.04	71	+0.04	—0.02
41	—0.12	+0.09	101	—0.01	—0.00	20	+0.04	—0.04	72	+0.02	—0.02
43	—.003	+0.03	103	+0.27	—0.01	23	—0.18	+0.07	73	+0.06	—0.06
44	—.002	+0.12	106	—0.05	+0.02	25	+0.01	—0.12	74	+0.00	—0.01
									75	—0.03	+0.05
my=±0.06 m			my=±0.10 m			my=±0.11 m			76	—0.04	+0.11
mx=±0.06 m			mx=±0.07 m			mx=±0.06 m			77	—0.00	+0.00
									78	—0.00	—0.08
									my=±0.08 m		
									mx=±0.05 m		

Na dnu stupca date su srednje pogreške sračunatih koordinata u grupama za svaku krivulju posebno.

	linearni excentricitet	numerički excentricitet	velika os a 2a	mala os b 2b	opseg	površina	$\frac{a}{b}$
Arena	27.148	0.79	34.481	21.258	177.55	23 ha, 02 m²	1.62
centralna elipsa			68·962	42.516			
II kat	39.83	0.62	64.700	50.984	364.60	1 ha, 03a, 61 m²	1.32
unutar. plašt			129.400	101.968			
II kat	40.19	0.61	66.447	52.917	376.06	1 ha, 10a, 44 m²	1.26
vanj. plašt			132.894	105.834			
III kat	40.68	0.63	64.848	50·500	363.70	1fha, 02a, 86 m²	1.30
unutr. plašt			129.696	101.000			
III kat	40.59	0.61	67.056	53.379	379.46	1 ha, 12a, 42 m²	1.26
vanj. plašt			134.112	106.758			
A. Broch unutr.	39.83	0.61	64.933	51·280	366.3	1 ha, 04a, 60 m²	1.26
plašt			129.866	102.560			
A. Broch vanj.	40.43	0.61	66.683	53.030	377.3	1 ha, 11a, 09 m²	1.25
plašt			133.366	106.060			

VI

Zaključak — Podaci koji su dobiveni na osnovu izvršenih geodetskih mjerenja i analiza uz odgovarajuće računanje i izjednačenje predstavljaju do sada vjerojatno najpotpunije što se je dalo u određivanju oblika krivulje koja je poslužila kao osnovni oblik temelja cijelom objektu. Nije ništa manje bilo interesantno da se konačno odredi veličina svih elemenata karakterističnih za jednu ovakovu elipsu i samu građevinu, sa praktičnog kao i naučno-istraživačkog stanovišta.

U literaturi se mogu naći i različita mišljenja o obliku krivulje i načinu njenog iskolčenja, koja je poslužila kao osnovica gradnji velikog broja starih rimskih amfiteatara. Može se reći da prevladava mišljenje da je to policentrična kružna krivulja. Podaci koji su dobiveni u ovoj radnji na osnovu prethodnih računanja i izjednačenja, dovoljno jasno govore da je to matematski postavljena krivulja drugog reda, — elipsa. Pošto su koordinate tačaka dobijene na osnovu mjerenja situacije nađene na terenu, može se tvrditi da nije to rješenje postignuto trigonometrijskim putem samo na papiru već i realizirano na terenu. Sam način iskolčenja se ne analizira, premda se nije mogao u biti razlikovati od današnjeg, kao što se nije mogao razlikovati niti od načina iskolčenja kod svih drugih amfiteatara koji su u tadašnje vrijeme građeni. Način prenošenja krivulje na teren koji je prikazan u radu Dr. Dyggve-a može biti prihvatljiv za amfiteatar u Solinu koji je građen na posve ravnom terenu, ali za Pulsku »Arenu« koja je građena na terenu sa velikim visinskim razlikama sigurno bi taj način pružio mnogo poteškoća. S toga, ne će biti sigurno, kako on to navodi u jednoj rečenici, da mnoga rješenja koja dobijaju trigonometrijskim putem ostaju na papiru.

Jedno pitanje je interesantno da se riješi: gdje i u koliko centara se sijeku produžne linije pregradnih zidova koji čine konstruktivni temelj. Iz ovih mjerenja za Pulsku arenu, raspolaže se dovoljnim računskim podatcima na osnovu kojih bi se moglo tačno matematski na to odgovoriti. Momentalno se mogu koristiti četiri tlocrta afiteatra i to: u Puli, Solinu, (dr Dyggve), u Arles-u i u Nimes-u (dobijeni za ovu svrhu od »Direktion de L'Architecture--archives photograpfique »Paris«). Tlocrt amfiteatra kod Carmmtuma objavljen u knjizi »Der Römische Limes in Österreich« nije mogao poslužiti za analize i komparacije, jer je izrađen u najgrubljim crtama i bez detalja. Od ovog amfiteatra na 3 km nalazio se još jedan tzv. amfiteatar I. za kojeg nije bilo podataka. Kod amfiteatra u Puli i Solinu pregradni zidovi imaju po prilici isti smjer, prema tome može se pretpostaviti i isti broj i položaj sjecišta, međutim, ova druga dva imaju otprilike također isi smjer, ali različiti od ova dva prva. To se može rastumačiti činjenicom što se nalaze vrlo daleko i na različitim teritorijama. Pokušaj da se grafički odrede sjecišta linija zidova nije dobar ili u najmanju ruku može tek približno dati odgovor na ovo pitanje. Iz grafičkih podataka može se samo zaključiti da ima više sjecišta, da su simetrično postavljena i da uglavnom odgovaraju grupama linija po kvadrantima.

Za Pulsku »Arenu« ovaj problem može se riješiti pomoću matematskih formula, pošto imamo sračunate koordinate svih detaljnih tačaka. Ako se postave jednadđbe pravaca za niz linija kroz najmanje dvije tačke moći će se odrediti njihovo sjecište kao i njegove koordinate.

Ova činjenica da se ove linije sijeku u više centara navela je neke stručnjake na misao o policentričnoj krivulji tlocrtne linije amfiteatra.

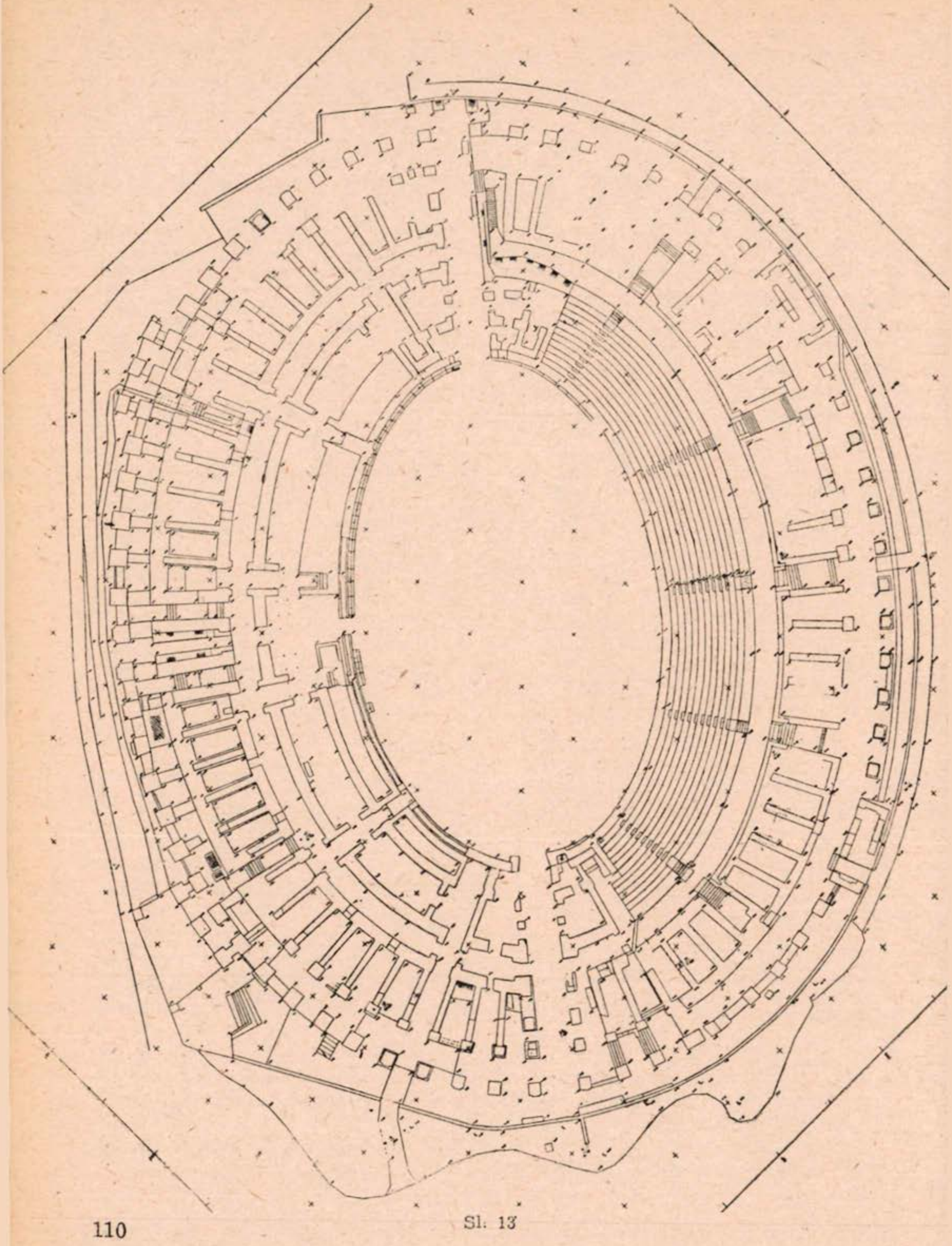
Na osnovu podataka iz tabele 5 i 6 za v_y i v_x može se sa mnogo sigurnosti zaključiti o veoma tačnom prenosu elipse na teren kao i o njenoj sigurnosti u toku 2000 godina. Ostupanja koja su se dobila za ove veličine su takvog reda da ih možemo smatrati kao normalnu pojavu pogrešaka koje su mogle nastati prilikom snimanja, a i prilikom gradnje.

Za određivanje veličina drugih elemenata elipse uzeti su u obzir samo podaci i računanja za drugi kat i centralnu elipsu arene. Ovim podacima se mogla dati veća težina s razloga što su tačke iz kojih su računate velika i mala os elipse, koordinate centra, sam oblik krivulje bile smještene na većem dijelu plašta nego one na trećem katu (v. sl. 8). Brojčane vrijednosti su date u tabeli 6. Odnos velike i male osi i u ovom slučaju je u omjeru 5 : 4 kao i kod drugih amfiteatara. Kod centralne elipse taj je odnos otprilike 5 : 3.

Ako se promatra »Arena« u sklopu plana grada Pule primjećuje se da su osovine elipse paralelne sa smjerom ulice. Iz ranijih radova je međutm poznato da je taj pravac zadržan iz najstarijih vremena kada su smjerovi ulica bili orijentirani u pravcu glavnih linija ager centurijatusa — cardo maximus i decumanus maximus.

Kut nagiba tj. otklon velke osi elipse od smjera osi x u Gauss Krügerovom koordinatnom sistemu teoretski morao bi biti isti za sve elipse. Razlike koje su se pojavile nastale su uslijed već prije spomenutih pogrešaka i relativno kratkih dužina.

Nagib velike osi elipse vrlo dobro se slaže sa onim koji je dobio A. Broch u koordinatnom sistemu sa ishodištem u točki Krimberg. To bi donekle i

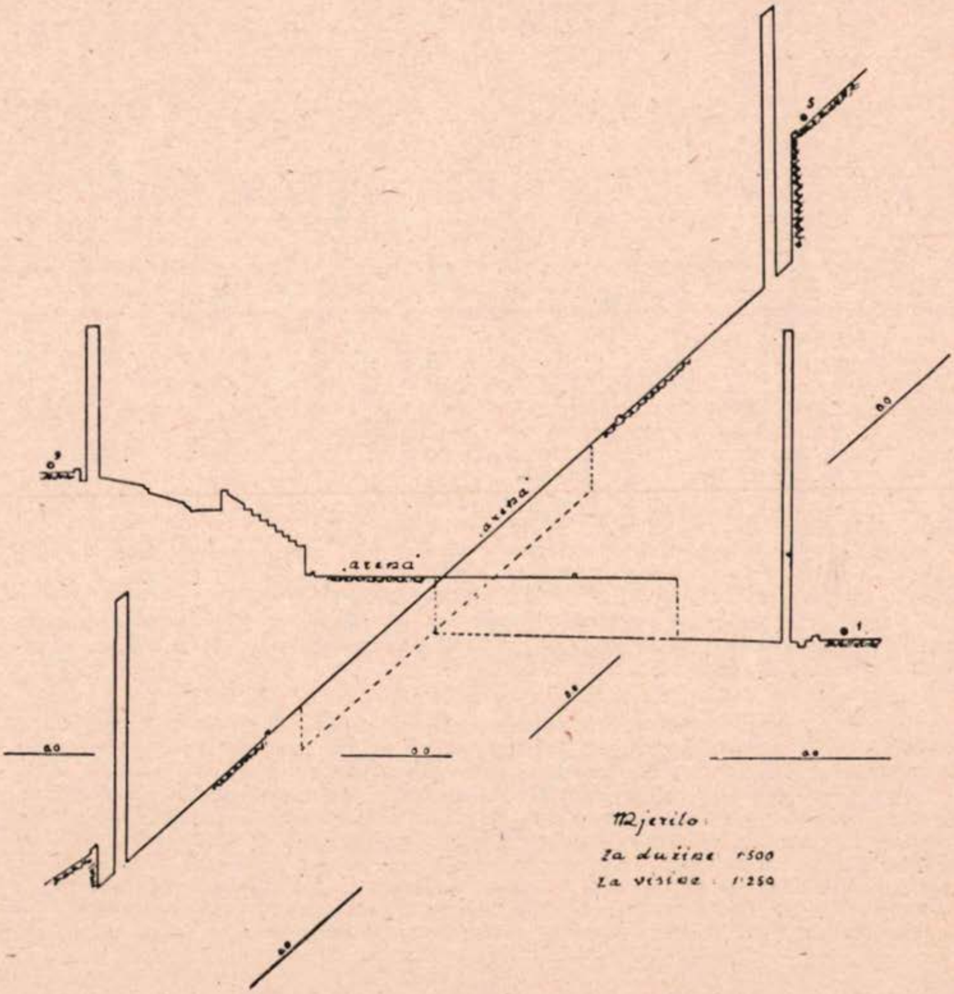


Sl. 13

odgovaralo onome podatku kojega navodi M. Mirabella za ostupanje od smjera A-E, a paralelno »al cardine massimo dell' agro coloncio della citta«.

Snimanjem plašteva terestričkom fotogrametrijom nije se postiglo što je u prvi moment zamišljeno. Nije dobijen kontinuirani snimak vanjskog plašta kao što je to bio slučaj za unutarnji. Tako je otpala mogućnost dobijanja, na osnovu korespodentnih tačaka vanjskog i unutarnjeg zida, na planu plašteva, u kancelariji povoljnih presjeka u horizontalnom i vertikalnom pogledu. Činjenica da je zid građen od rustikalno obrađenih blokova kamena koji imaju 1—2 m³ olakšala bi dobjanje i strukture zidova u pojedinim presjecima.

Na kraju se prilaže slika geodetskog plana koja je dobijena iz mjerila 1 : 100 (sl. 13). U toku radova ovaj plan je dopunjen detaljima koji su otkriveni nakon arheoloških iskapanja. Tako bi ovaj geodetski plan tlocrta i plašteva predstavljao i u konzervatorskom smislu osnov radovima na ovom ob-



Sl. 14

jektu. Iz pregleda plana plašteva i vertikalnih presjeka (sl. 14) po obim osima vidi se da je spomenik u cijelosti sačuvao svoj osnovni oblik i da nije u svom tlocrtu u dugom periodu svog postojanja pretrpio ozbiljnijih promjena ili deformacija.

LITERATURA

1. *A. Broch:* Das Amphitheater in Pola
2. *N. Čubranić:* Račun izjednačenja
3. *Š. Mlakar:* Amfiteatar u Puli
4. *E. Diggwe:* Recherches a Salona — L'Amphitheatre
5. *Š. Mlakar:* Antička Pula
6. *B. Pacella:* Apprestamento del Fototeodolite Zeiss n° 3 dell, I. G. M. alla fotografia dei vicini per la sorveglianza dei monumenti
7. *R. Egger:* Das zweite Amphitheater der wissenschaften in Wien. Heft XVI.

Saradnici: Na terenskim radovima: Lojen Mato, stud. geodezije.
Terestrička fotogrametrija: ing. Šmit Kruno.
Kartiranje: ing. Brukner Anica i
Obrada podataka: Ing. Mačković Vladimir (u okviru diplomskog rada)

»ARENA« — AMFITEATAR U PULI

Za potrebe našeg kulturnog života u zadnje vrijeme nastoji se iskoristiti sve one kulturno-historijske objekte koji se mogu rekonstrukcijom dovesti u takvo stanje da im ostane sačuvan izvorni oblik, a uz to omogući njihovo korištenje za veće i manje javne manifestacije.

Najizrazitiji primjer za ovakva rješenja sigurno predstavlja pulska »Arena«. Korištenje ovog objekta do sada, u onom stanju kakav je zatečen nakon oslobođenja Istre, pokazalo je niz teškoća. Međutim s obzirom na njegovu afirmaciju kao odgovarajućeg ambijenta za određene priredbe, javila se potreba za rekonstrukcijom i rješenjem cijelog kompleksa u vidu njegovog što većeg i praktičnijeg korištenja.

»Arenom« su se u prošlosti bavili naučni radnici raznih struka i o njoj je napisana bogata literatura. Međutim, za ovu svrhu trebalo je dati detaljan, potpun geodetski plan koji će poslužiti kao osnova za izradu projekta rekonstrukcije i analize u arheološkom smislu. Geodetski plan izrađen g. 1899. arhiviran u Beču koliko je poznato bio je do sada jedini geodetski izrađen snimak »Arene«.

Za ovu svrhu pristupilo se potpuno novom premjeru. Za plan tlocrta usvojeno je mjerilo 1:50, a za plan plašteva 1:100. Razvijena je geodetska osnova imajući u vidu snimanje detalja polarnom metodom. Mjerenju kuteva i dužina posvećena je maksimalna pažnja i uzeti su u obzir svi oni utjecaji koji mogu poslužiti za uklanjanje sistematskih pogrešaka. Rezultati su prikazani u tabeli I.

Kartiranje detalja izvršeno je po izračunatim koordinatama svih snimljenih 1800 detaljnih tačaka. Usporedbom direktno mjerenih dužina na terenu i onih očitanih sa plana dobijena je tačnost plana 1:50

$$m = 2\text{—}3 \text{ cm}$$

Za izradu plana plašteva primijenjena je terestrička fotogrametrija. Poteškoću prilikom kartiranja predstavljao je oblik »Arene«. Za rješavanje toga problema primijenjena je odgovarajuća metoda obrazložena u članku.

Prilikom mjerenja poligone mreže snimljeno je cca 100 detaljnih tačaka, uz posebnu pažnju i povećanom točnašću. Te tačke su poslužile za određivanje oblika krivulje u svim nivoima. Kao osnovna krivulja je uzeta ona sa samog borilišta, jer je bila kontinuirano snimljena, što nije bio slučaj za one na katovima. Analizom rezultata utvrđeno je da je oblik amfiteatra krivulja II reda od koje koordinate snimljenih tačaka relativno veoma malo odstupaju. Na osnovu tako sračunatih elemenata određene su veličine karakterističnih elemenata elipse.