ODREĐIVANJE STEPENA KORELATIVNE ZAVISNOSTI SLUČAJNIH VELIČINA

KRUNISLAV MIHAILOVIĆ dipl. inž. — Beograd

Obično se u geodeziji slučajne veličine odnosno slučajne greške tretiraju kao nezavisne veličine i ako je često puta ova zavisnost lako uočljiva i očigledna. Drugim rečima pretpostavka o nezavisnosti slučajnih veličina nije uvek opravdana. Zbog toga izvode se pogrešne konstrukcije i zaključci o postignutoj tačnosti. Ne uzimanje u obzir zavisnost između slučajnih veličina kod ocene tačnosti konačno usvojenih rezultata stvara se prividan utisak o postignutoj tačnosti. Stvarna tačnost može biti manja ili veća. Prvi utisak stvara zabludu kod izvršioca radova a drugi je u neposrednoj vezi sa produktivnosti radova odnosno ima uticaj na ekonomičnost izvršenih radova.

Pored toga zavisnost između slučajnih veličina iziskuje dalje proučavanje u pogledu ustanovljavanja odgovarajućih metoda za dalju obradu geodetskih merenja. Kod klasične primene principa najmanjih kvadrata nasleđenog od Gausa, pretpostavlja se da su slučajne veličine obuhvaćene u izravnavanju međusobno nezavisne. Međutim, strogo uzevši to nije uvek slučaj. Zato treba uopštiti princip najmanjih kvadrata koji bi uzeo u obzir korelativnu zavisnost između slučajnih veličina. U vezi s time i srednja kvadratna greška jedinice težine dobiće novu strukturu. Ovo je svakako interesantno istraživačko područje koje danas privlači pažnju mnogih naučnika u svetu. Zato mu treba posvetiti posebnu pažnju.

Zadatak postavljen ovim radom jeste ustanovljavanje stepena zavisnosti između slučajnih veličina kao osnovni elemenat kod ocene tačnosti kada su one međusobno korelisane. Kod proučavanja sistema slučajnih veličina veoma je važno pravilno uočiti karakter i stepen zavisnosti koje u većini slučajeva realno postoji između njih. Kod geodetskih merenja i obrade tih rezultata zapaža se stohastička (slučajna) zavisnost koja ima opšti značaj jer stepen zavisnosti je varijabilan i može uzimati sve vrednosti u intervalu čije su ekstremne vrednosti funkcionalna zavisnost i nezavisnost slučajnih veličina. Stohastička zavisnost u geodeziji je veoma česta i raznovrsna, mada njena pojava više puta ostaje latentna pa se ne može dovoljno jasno uočiti. Zapravo ovakav vid zavisnosti kod geodetskih merenja mnogo više je zastupljen nego što se obično dobija utisak. O tome profesor Čebtarev (/1/ str. 328) kaže: »Pojava korelacije između rezultata geodetskih merenja ima često-češće mesto nego što se na prvi pogled može pokazati«. O ovoj činjenici nažalost ne vodi se računa kod obrade podataka dobivenih merenjem.

Kod stohastičke zavisnost sa promenom jedne veličine druga se neće promeniti za određeni iznos već pokazuje tendenciju promene ka prosečnom iznosu. Svaki pojedini slučaj može od ovoga odstupiti. Kratko rečeno ovo je zavisnost u verovatnoći. U geodeziji uglavnom susrećemo linearnu stohastičku zavisnost /korelativnu zavisnost/. Profesor Vranić (/2/, str. 160—162) pokazao je da slučajne veličine koje pripadaju normalnom rasporedu su u linearnoj zavisnosti. Pošto se sa beznačajnim aproksimacijama može usvojiti da greške merenja pripadaju normalnom rasporedu proučavanje karelativne zavisnosti od posebnog je značaja za geodeziju. Zbog toga u daljim razmatranjima biće govora samo o tom obliku zavisnosti.

II

Uzmimo funkciju opšteg oblika

$$y = f(x_1, x_2, \cdot \ldots\ldots x_n) \tag{1}$$

Ako uzmemo opšti slučaj postojanja korelacije između argumenata funkcije /1/onda će srednja kvadratna greška biti:

$$m_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial xi}\right)_0^2 m_{xi}^2 + 2\sum_{i<j} \left(\frac{\partial f}{\partial xi}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial xj}\right)_0 r_{ij}\, m_{xi}\, m_{xj} \tag{2}$$

Drugi član u formuli (2) daje vrednost za koju se menja srednja kvadratna greška zbog zanemarivanja korelativne zavisnosti On može biti pozitivan ili negativan. Prema tome klasične formule će dati veću ili manju vrednost što zavisi od predznaka koeficijenta korelacije.

Srednja kvadratna greška pojedinih argumenata funkcije može se odrediti na poznati način, ako se za njih uzme više podataka nego što je neophodno potrebno. Ako se može odrediti i koeficijenat onda je veoma jednostavna ocena tačnosti korelativno zavisnih veličina. Znači suština se svodi na određivanje stepena korelativne zavisnosti. Određivanje koeficijenta korelacije uopšteno uzevši veoma je složen problem koji zahteva svestranu analizu i apsolutno poznavanje tretirane problematike.

III

Koeficijenat korelacije može se odrediti na dva načina:

a) na osnovu teorijskih razmatranja i

b) empiričkim putem.

Prvi način se može primeniti samo onda ako je zavisnost između slučajnih veličina očigledna odnosno analitički definisana U ovom napisu pokušaćemo da obuhvatimo što više jednostavnih i različitih primera očigledne zavisnosti i pokazaćemo za svaki primer posebno kako se određuje koeficijent korelacije. Kod obrade geodetskih merenja može se zavisnost pojaviti u sledećim oblicima:

1. oblik zavisnosti

$$\beta'_i = \varphi(\beta_i, f)$$
$$f = \psi(\beta_1 \beta_2, \cdots \beta_i \cdots \beta_n) \tag{3}$$

Obično se uglovna odstupanja u nekoj zasebnoj figuri (trougao, poligonometrijski vlak, itd.) raspodeluje podjednako na sve argumente funkcije f.

$$\beta'_i = \beta_i + \frac{1}{n} f$$

gde je

β_i — vrednost ugla dobivena merenjem

β'_i — izravnata vrednost ugla.

n — broj elemenata iz kojih je obrazovano uglavno odstupanje f

$$f = T - \sum_{i=1}^{n} \beta_i$$

T — teoretska vrednost sume vrednosti uglova dobivenih merenjem.

Primenjujući isti postupak kao u /8/ za koeficijenat korelacije dobija se izraz

$$r_{\beta i,f} = -\frac{1}{\sqrt{n}} \quad ,f > o$$

$$r_{\beta i,f} = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad ,f < o \qquad (4)$$

Ako u formuli /4/ zamenimo n = 3 dobija se stepen korelativne zavisnosti između odstupanja f i ma koga ugla u trouglu

$$r_{\beta i,f} = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Primećuje se da stepen korelativne zavisnosti između naznačenih veličina sporo opada sa povećanjem broja n.

2. oblik zavisnosti

$$\beta'_i = \varphi(\beta_i, f)$$
$$\beta'_j = \varphi(\beta_j, f)$$

Veličine β_i, β_j, β'_i, β'_j i f imaju isto značenje kao pod 1.
Korelaciski moment

$$K_{\beta' i,\beta' j} = M\left[\frac{1}{n}\beta_i f + \frac{1}{n^2} f^2 + \frac{1}{n}\beta_j f\right] = -\frac{m^2_\beta}{n}$$

odnosno koeficijent korelacije

$$r_{\beta' i,\beta' j} = -\frac{1}{n-1} \qquad (5)$$

Za n = 3 dobija se vrednost koeficijenta korelacije između izravnatih uglova u trouglu

$$r_{\beta' i,\beta' j} = -\frac{1}{2}$$

Važnost uzimanja u obzir korelativne zavisnosti između izravnatih vrednosti uglova ilustrovaćemo jednim primerom.

Indirektna vrednost strane dobija se po sinusnoj teoremi pošto su prethodno izravnati uglovi u trouglu

$$a = b\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}$$

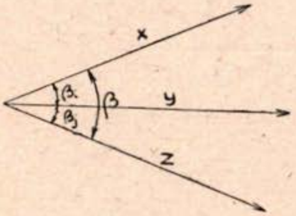
Ako logaritmujemo ovaj izraz diferenciramo po promenljivim veličinama a, b, α', β' i primenimo formulu /2/ neposredno se dobija relativna greška sračunate strane

$$\frac{m^2_a}{a^2} = \frac{m^2_b}{\varrho^2} + \frac{2}{3}\left(\mathrm{cotg}^2\alpha' \frac{m^2_\alpha}{\varrho^2} + \mathrm{cotg}^2\beta' \frac{m^2_\beta}{\varrho^2} + \mathrm{cotg}\,\alpha'\,\mathrm{cotg}\,\beta' \frac{m\alpha\, m\beta}{\varrho^2}\right)$$

Kao što vidimo za relativnu grešku sračunate strane dobija se izraz koji se znatno razlikuje od formula koje egzistiraju u našoj literaturi. U specijalnom slučaju kada je $\alpha = \beta$ ove formule daju identične vrednosti.

3. Oblik zavisnosti

Kod girusne metode opažaju se pravci čije razlike daju odgovarajuće uglove. /Slika 1/.



Slika 1

$$\beta_I = y - x \qquad m^2_{\beta I} = m^2_p 2$$
$$\beta_j = z - y \qquad m^2_{\beta j} = m^2_p 2$$
$$\beta = z - x \qquad m^2_\beta = m^2_p 2$$

x_a, y i z su vrednosti opaženih pravaca a m_p sredmnja kvadratna greška opažanog pravca.

Vrednost ugla β može se odrediti kao algebarski zbir dva susedna ugla

$$\beta` = \beta_i + \beta_j$$

$$m_p^2 2 = m_p^2 2 + m_p^2 2 + 4 r_{\beta i \beta j} m_p^2$$

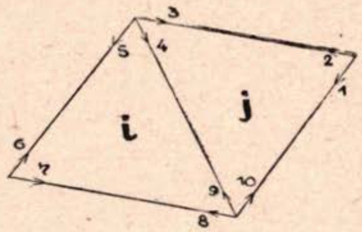
odakle

$$r_{\beta I,\, \beta J} = -\frac{1}{2}$$

Znači postoji znatna zavisnost između dva susedna ugla čije se vrednosti dobijaju kao razlike pravaca. Ovu činjenicu nužno je uzeti u obzir kod ocene tačnosti kada su uglovi mereni po girusnoj metodi. Na primer, srednja kvadratna greška izlazne strane, greška geometrijske veze itd.

4. Oblik zavisnosti

Videli smo kolika je zavisnost između uglova gde su pravci opažani po girusnom metodu, pa je sasvim logično da će uglovna odstupanja u susednim trouglovima biti također zavisne veličine. Iz slike 2 može se neposredno napisati



Slika 2

$$\begin{aligned} f_i &= 2 - 1 + 5 - 4 + 9 - 8 \\ f_j &= 4 - 3 + 7 - 6 + 10 - 9 \end{aligned} \qquad /6/$$

Pošto su pravci opažanja praktično pod istim uglovima srednja kvadratna greška odstupanja u trouglu biće:

$$m_{fi}^2 = m_{fj}^2 = m_{fij}^2 = m_p^2 6$$

Sumirajući jednačine (6) dobijamo:

$$f = 2 - 1 + 5 - 8 + 2 - 6 + 10 - 3$$

$$m_f^2 = m_p^2 8 \qquad (7)$$

gde smo sa f označili zbir odstupanja u dva susedna trougla

$$f = f_i + f_j$$

Kako su f_i i f_j međusobno korelisane na osnovu formule (2) možemo napisati

$$m_f^2 = m_{fi}^2 + m_{fj}^2 + 2 r_{fi,fj} m_{fi} m_{fj} \qquad (8)$$

Iz upoređenja formule (7) i (8) imamo

$$m_p^2 8 = m_p^2 \cdot 12 + 12 r_{fifj} m_p^2$$

odavde

$$r_{fi,fj} = -\frac{1}{3}$$

Iz toga slijedi da odstupanja f kod svih geodetskih mreža treba obrazovati iz nezavisnih elemenata.

5. Oblik zavisnosti

Kod izravnavanja po metodi posrednih merenja najverovatnije vrednosti traženih veličina su u funkciji podataka dobivenih merenjem

$$\begin{aligned} x &= \varphi (l_1, l_2, \ldots l_n) \\ y &= \psi (l_1, l_2, \ldots l_n) \end{aligned}$$

Nije teško primetiti da su veličine **x** i **y** međusobno zavisne.

Koeficijent korelacije određuje se po formuli

$$r_{x,y} = \frac{Q_{xy}}{\sqrt{Q_{xx}}\,\sqrt{Q_{yy}}}$$

gde su: Q_{xx}, Q_{yy} i Q_{xy} koeficijenti težina

P r i m e r :

Dužina kao funkcija najverovatnijih vrednosti koordinata dobija se po formuli

$$D = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}$$

Radi lakšeg sporazumevanja usvojimo oznake $y_1 = x_2$, $x_2 = x_3$, $y_2 = x_4$

Srednja kvadratna greška dužine može se odrediti po formuli (2). Potrebni podaci za određivanja koeficijenata korelacije uzeti su iz (/3/ str. 165) i dati u Tab I.

$\sqrt{Q_{11}}$	0,096	$\sqrt{Q_{11}}\sqrt{Q_{22}}$	0,000109	Q_{12}	+0,000056	r_{12}	+0,51	K_{12}	-0,00012	$F_1^2 m_{x_1}^2$	0,00005
$\sqrt{Q_{22}}$	0,0114	$\sqrt{Q_{11}}\sqrt{Q_{33}}$	0,000082	Q_{13}	+0,000048	r_{13}	+0,58	K_{13}	-0,00002	$F_2^2 m_{x_2}^2$	0,00178
$\sqrt{Q_{33}}$	0,085	$\sqrt{Q_{11}}\sqrt{Q_{44}}$	0,000093	Q_{14}	-0,000025	r_{14}	-0,27	K_{14}	-0,00006	$F_3^2 m_{x_3}^2$	0,00002
$\sqrt{Q_{44}}$	0,097	$\sqrt{Q_{22}}\sqrt{Q_{33}}$	0,000097	Q_{23}	+0,000040	r_{23}	+0,41	K_{23}	+0,00009	$F_4^2 m_{x_4}^2$	0,00130
		$\sqrt{Q_{22}}\sqrt{Q_{44}}$	0,000110	Q_{24}	-0,000020	r_{24}	-0,18	K_{24}	+0,00028		
		$\sqrt{Q_{33}}\sqrt{Q_{44}}$	0,000082	Q_{34}	-0,000036	r_{34}	-0,43	K_{34}	+0,00008		
								$\sum_{i \neq j} K_{ij}$	+0,00025	$m_D'^2$	0,00313
								$m_D''^2 = 2 \cdot \sum_{i \neq j} K_{ij}$	+0,00050		

Tabela I

Srednja kvadratna greška strane može se razložiti na dva dela

$$m^2{}_D = m'^2{}_D + m''^2{}_D$$

gde su:

m'_D — srednja kvadratna greška strane kada se zanemaruje zavisnost između najverovatnijih vrednosti koordinata

m''_D — vrednost za koju se menja srednja kvadratna greška strane zbog zanemarivanja korelacije

$$m_D{}^2 = 0{,}00313 + 0{,}00050 = 0{,}00363$$

$$m'_D = \pm\, 0{,}056\text{m} \qquad m_D = \pm\, 0{,}060\text{m}$$

Kao što vidimo srednja kvadratna greška dužine neznatno se menja zbog uzimanja u obzir zavisnost između najverovatnijih vrednosti koordinata. Praktično ona se može zanemariti

Mi smo ovdje tretirali zavisnost između najvjerovatnijih velična čije se definitivne vrednosti dobijaju iz izravnanja po metodi posrednih merenja. Međutim, možemo uopšteno kazati da su izravnate veličine uvek zavisne bez obzira na metodu izravnanja.

Svakako ovim nisu iscrpljeni svi mogući oblici zavisnosti kaji mogu nastati kod obrade rezultata merenja. Tretirani načini određivanja koeficijenata korelacije odnose se na zavisnost između slučajnih veličina koje nastaju iz potpuno određenih razloga. U navedenim oblicima zavisnosti stepen korelativne zavisnosti zastupljen je u znatnoj meri a što je najvažnije ne zavisi od tačnosti izvršenih merenja. Međutim, postoji zavisnost između slučajnih veličina druge naravi koja se ispoljava u znatno blažoj formi. Uzroci njene pojave je dejstvo više faktora koji se ne mogu uvek tačno ustanoviti niti se korelativna zavisnost može tako lako izraziti preko koeficijenata korelacije.Razlozi pojave ovakve zavisnosti su različite: težnja da se merenja izvode pod istim uslovima, da se merenja izvode neposredno jedno za drugim, istim instrumentom, od istog operatora, itd. U radu (4) čitaoci se mogu upoznati sa još nekim razlozima pojave zavisnosti između slučajnih veličina. Jednom rečju korelativna zavisnost se pojavljuje svuda gde su slučajne veličine odnosno slučajne greške opterećene zajedničkim vrednostima koje ispoljavaju sasvim određenu tendenciju.

b) Određivanje koeficijenata korelacije empiričkim putem

Uzmimo niz od n parova slučajnih veličina

$$(\beta_1, \beta'_1) (\beta_2, \beta'_2), \ldots\ldots (\beta_n, \beta'_n)$$

Slučajne veličine β i β' biće međusobno zavisne ako najverovatnija odstupanja v_i i v'_i pokazuju istu tendencju odnosno jednosmerno deluju. Onda će važiti relacija

$$\lim \frac{[v_i\, v'_i]}{n-1} = K_{\beta,\beta'} \tag{9}$$

ili ako su β i β' nezavisne veličine onda

$$\lim \frac{[v_i\, v'_i]}{n-1} = 0$$

Ako poztivnoj vrednosti v_i odgovara negativna vrednost v'_i onda će korelaciski moment definisan formulom (9) biti negativan. Znači da vrednost korelacionog momenta zavisi od vrednosti v_i i v'_i i od stepena njihove korelativne zavisnosti.

Pošto raspolažemo sa ograničenim brojem merenja možemo odrediti približnu vrednost korelaciskog momenta i koeficijenta korelacije po sledećoj formuli

$$K_{\beta,\beta'} = \frac{[v_i\, v'_i]}{n-1} \qquad r_{\beta,\beta'} = \frac{[v_i\, v_i]}{\sqrt{[v^2_i][v'^2_i]}} \tag{10}$$

Autor je pokušao da odredi korelativnu zavisnost između vrednosti dobivenih merenjem dva susedna ugla. Uglovi su opažani jedan za drugim u sto ponavljanja. Uzete su tri takve serije u različite dane pri praktično istim uslovima. Iz razumljivih razloga nisu dobivene očekivane vrednosti zato rezultate merenja nećemo prikazati već radi ilustracije pomenutih formula uzećemo jedan brojni primjer (Tabela II).

α	β_i	β_i'	v_i	v_i^2	v_i'	$v_i'^2$	$v_i v_i'$
1	48°26'26"	36 42 22	+13	169	−1	1	−13
2	12	06	−1	1	−17	269	+17
3	12	24	−1	1	+1	1	−1
4	06	28	−7	49	+5	25	−35
5	00	30	−13	169	+7	49	−91
6	06	18	−7	49	−5	25	+35
7	24	36	+11	121	+13	169	+143
8	16	12	+3	9	−11	121	−33
9	18	40	+5	25	+17	289	+85
10	12	16	−1	1	−7	49	+7
	48 26 13	36 42 23	+2	594	+2	1018	+114

$$K_{\beta_i \beta_i'} = \frac{114}{9} = 12{,}7 \qquad r_{\beta_i \beta_i'} = \frac{114}{\sqrt{594 \cdot 1018}} = 0{,}15$$

Tabela II

Približna vrednost srednje kvadratne greške određivanja koeficijenata korelacije određuje se po formuli

$$m_r = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}} = 0{,}31$$

Nije teško primetiti da za određivanje pouzdane vrednosti koeficijenata korelacije bliskog nuli treba veoma veliki broj merenja. Prema tome, koeficijenat korelacije može se odrediti po formuli (10) iz vrlo velikog broja podataka ili iz analize obimnijeg materijala što je izvan mogućnosti pojedinačnog proučavanja. U svakom slučaju ovo je predmet jednog sistematskog i permanentnog istraživanja kojima mogu da se bave geodetske institucije.

IV

Ako nemamo nikakove informacije o stepenu korelativne zavisnosti između slučajnih veličina onda se ona može odrediti iz obrade odstupanja f.

Uzmimo niz opažanja $x_1, x_2, \ldots x_n$ koja su međusobno korelisana. Neka su ove vrednosti sa odstupanjem f povezane sledećom relacijom

$$f = T - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Ako uzmemo opšti slučaj postojanja korelacije onda će srednja kvadratna greška biti

$$m_f^2 = \sum_{i=1}^{n} m_{xi}^2 + 2 \sum_{i<j} r_{ij}\, m_{xi}\, m_{xj}$$

Predpostavimo da su sva merenja izvršena pod istim uslovima i oslobođena sistematskih grešaka

$$m_{x_1} = m_{x_2} = \dots = m_{x_n} = m$$

$$m^2_f = m^2 \cdot n + 2m^2 \sum_{i<j} r_{ij}$$

odnosno

$$\sum_{i<j} r_{ij} = \frac{m^2_f - m^2 n}{2 m^2}$$

Do koeficjenta korelacije moguće je doći ako pretpostavimo da je isti stepen korelativne zavisnosti između svih argumenata funkcije f. Ovde mogu da se učine dve pretpostavke:

Prva pretpostavka

$$r_{x_1 x_2} = r_{x_1 x_3} = \dots = r_{x_{n-1} x_n} = r$$

Znači imamo n elemenata po dva u kombinaciji.
Uzimajući ovo u obzir dobijamo

$$r = \frac{m^2_f - m^2 n}{n(n-1) m^2} \qquad (11)$$

Lako je primetiti da donja granica koeficijenata korelacije zavisi od broja n tj. on može uzimati sve vrednosti iz intervala

$$\left[-\frac{1}{n-1}, 1 \right]$$

Druga pretpostavka

$$r_{x_1 x_2} = r_{x_2 x_3} = \dots = r_{x_{n-1} x_n} = r$$

$$-\frac{n}{2(n-1)} < r = \frac{m_f^2 - m^2 n}{2(n-1) m^2} \qquad (12)$$

ili ako imamo zatvorenu geometrijsku figuru odnosno ako je početni i završni argumenat funkcije f u korelativnom odnosu onda dobijemo izraz

$$-\frac{1}{2} < r = \frac{m_f^2 - m^2 n}{2nm^2} \leqslant 1 \qquad (13)$$

Formule (11), (12) i (13) navedene su kao još jedna mogućnost da se dođe do vrednosti koeficijenta korelacije. Jasno ovakvom načinu određivanja koeficijenta korelacije mogu se učiniti niz zamerki: pretpostavka o jednakosti koeficijenta korelacije, nemogućnost otklanjanja sistematskih grešaka iz rezultata merenja, itd. Nužno je naglasiti da se ovom načinu određivanja koeficijenta korelacije kao i kod eksperimentalnog postupka vezane za izvesne neminovne greške subjektivnog i objektivnog karaktera, pa stoga dobivene vrednosti na prikazani način moraju se primiti sa izvesnom rezervom.

V

Pored tretiranih načina za određivanje koeficijenta korelacije postoje i druge mogućnosti.

Uzmimo jednostavnu nelinearnu funkciju

$$r = h \cdot tg \frac{\alpha}{2}$$

Ovo je poznata formula koja daje vrednost skraćenja koso merene duži na horzonat. Srednja kvadratna greška redukcije biće

$$m_r^2 = tg^2 \frac{\alpha}{2} m_h^2 + \frac{h^2}{4 \cos \frac{4\alpha}{2}} m_\alpha^2 + tg \frac{\alpha}{2} \frac{h}{\cos \frac{2\alpha}{2}} r_{h,\alpha} m_h m_\alpha \tag{14}$$

Ugao koji koso merena duž zaklapa sa horizontom nije neposredno meren. On se određuje po formuli:

$$\alpha = \arc \sin \frac{h}{S}$$

Odnosno srednja kvadratna greška biće:

$$m_\alpha^2 = \frac{1}{S^2 \cos^2 \alpha} m_h^2 + \frac{h^2}{S^4 \cos^2 \alpha} m_s^2 \tag{15}$$

Po formuli (15) može se odrediti srednja kvadratna greška ugla ako znamo sa kojom su tačnošću određeni elementi za svođenje koso merene duži na horizonat.

Do srednje kvadratne greške m_r može se doći drugim putem ako r izrazimo u funkciji merenih veličina.

$$r = S - \sqrt{S^2 - h^2}$$

$$m_r^2 = \frac{(\cos\alpha - 1)^2}{\cos^2 \alpha} m_r^2 + tg^2 \alpha \, m_h^2 \tag{16}$$

Koeficijenat korelacije određuje se iz neposrednog upoređivanja formule (14) i (16)

$$r_{h,\alpha} = \frac{1}{2h} \operatorname{Sin} \alpha \, tg^2\alpha \frac{m_s}{m_h m_\alpha} + \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} tg^2\alpha}{h \cdot tg \frac{\alpha}{2}} \frac{m_\alpha}{m_\alpha} - \frac{1}{2h} \operatorname{Sin} \alpha \frac{m_\alpha}{m_\alpha} - \frac{h}{2 \operatorname{Sin} \alpha} \cdot \frac{m_\alpha}{m_h}$$

Primer:

$S = 100{,}0 \text{ m}$ $\quad h = 17{,}40 \text{ m}$

$m_s = 0{,}1 \text{ m}$ $\quad m_2 = 0{,}01\text{m}$ $\quad m\alpha = 20{,}4 \cdot 10^{-5}$

$$r_{h,x} = 0{,}49$$

Suviše je naglasiti da navedeni primer ima teoriski značaj.

LITERATURA

1. *Čebotarev, A. S.:* Sposob naimenših kvadratov s osnovami teorii verojatnostej — Moskva, 1958.
2. *V. Vranić:* Verojatnost i statistika — Zagreb, 1958.
3. *N. Čubranić:* Račun izjednačenja — Zagreb, 1958.
4. Z. *Narobe:* O nekim izrazima tolerancije kod gradskih merenja s naročitim osvrtom na korekturni član, Geodetski list, Zagreb, 1964. god., broj 1—3.
5. *Sklidanenko, K. K.:* Korelativno-zavisinie slučajnie ošibki v geodezičeskih izmerenijah — Geodezija i kartografija, br. 10 Moskva, 1958
6. *B. Ivanović:* Korelacija u ekonomskim istraživanjima, Beograd, 1958.
7. *Ventcel, E. S.:* Teorija verojatnostej — Moskva, 1962.
8. *K. Mihailović:* Prilog usklađivanju pokazatelja kod određivanja graničnih grešaka u trigonometrijskoj mreži 1. reda Geodetski list br. 7—9, Zagreb, 1964. god.