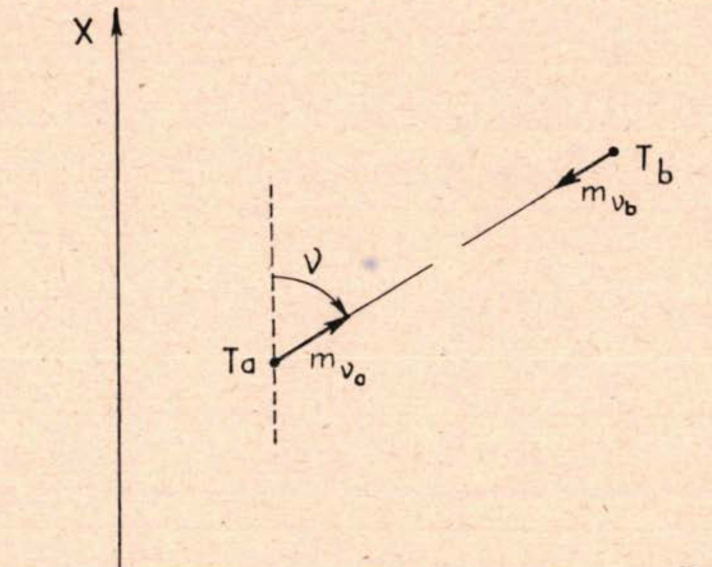
O TAČNOSTI DUŽINA DEFINIRANIH TRIANGULACIONIM TAČKAMA

DANKO RUNJE dipl. inž — Zagreb

Predmet razmatranja bit će ocjena tačnosti dužina triangulacionih strana kod mreže čije su tačke određene metodom presijecanja postepeno i pojedinačno.

Neka su u koordinatnom sistemu X Y zadane dvije tako određene tačke: T_a (Y_a X_a) i T_b (Y_b X_b) — Slika 1.



Sl. 1

Definirana dužina ovim tačkama dobit će se iz odnosa:

$$d^2 = (Y_b - Y_a)^2 + (X_b - X_a)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Postavlja se pitanje tačnosti tako određene dužine, odnosno da li njena srednja pogreška m_d u dovoljnoj mjeri ilustrira tu tačnost. U tu svrhu razmotrit ćemo formule po kojima se računa veličina m_d. Ove formule izrazit ćemo srednjim pogreškama određivanja svake krajne tačke dužine, u smjeru v njihove spojnice.

Veličina srednje pogreške određivanja bilo koje tačke T_n u nekom po volji odabranom smjeru v predstavljena je radij vektorom krivulje pogrešaka te tačke povučenim u tom smjeru (vidi sl. 2.). Kako ta pogreška ukazuje na linearnu pogrešku tačke u tom smjeru, to ćemo je u daljnjem tekstu zvati srednjom linearnom pogreškom tačke u smjeru v.

Označimo li ove pogreške u tački T_a sa m_{va}, a u tački T_b sa m_{vb} to prema zakonu o prirastu pogrešaka imamo:

$$m^2_d = m^2_{v_a} + m^2_{v_b} \qquad \text{. . . . . (2)}$$

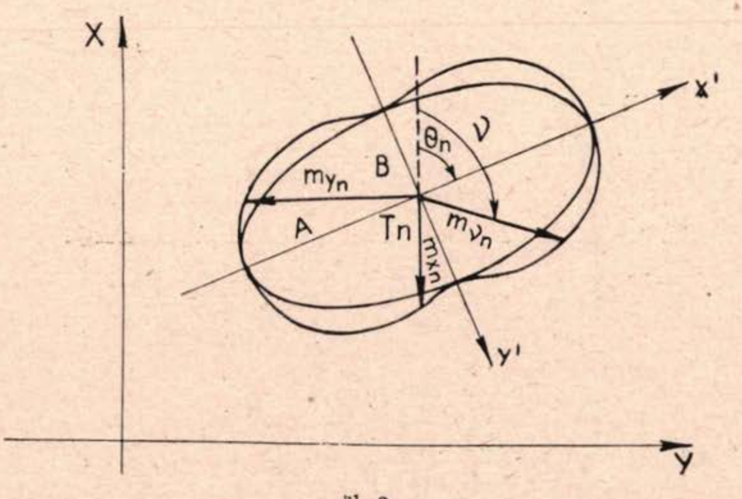
Brojna vrednost veličine m_{vn} za bilo koju tačku T_n može se odrediti iz odnosa:

$$m^2_{v_n} = A^2_n \cdot \cos^2(v - \Theta_n) + B^2_n \cdot \sin^2(v - \Theta_n) \qquad \text{. . . . . . (3)}$$

Izraz (3) predstavlja jednadžbu krivulje pogrešaka tačke T_n, a veličine: A_n, B_n i $\varnothing_n$ su elementi srednje elipse pogrešaka tačke T_n, koja je u stvari nosilac krivulje pogrešaka. m_{vn} može se izraziti i srednjim linearnim pogreškama tačke T_n u smjeru koordinatnih osi, veličinama m_{xn} i m_{yn}.

Ove vrijednosti definirane su prema 4. odnosom:

$$\left.\begin{aligned} m^2_{yn} &= \frac{[aa]}{[aa]\cdot[bb] - [ab]^2} \cdot m^2_{\varphi n} \\ m^2_{xn} &= \frac{[bb]}{[aa]\cdot[bb] - [ab]^2} \cdot m^2_{\varphi n} \end{aligned}\right\} \qquad \text{. . . . . . (4)}$$



Sl. 2

gdje je:

$m_{\varphi n}$ — srednja pogreška izjednačenih smjerova φ

$$[aa] = a^2_1 + a^2_2 + \ldots\ldots$$

$$[bb] = b^2_1 + b^2_2 + \ldots\ldots$$

$$[ab] = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots\ldots$$

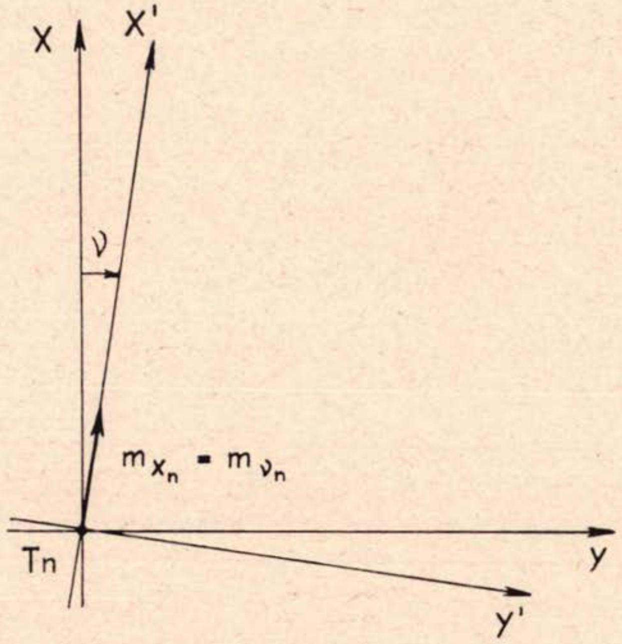
$$[aa] \cdot [bb] - [ab]^2 = D$$

a i b koeficijenti smjera i računaju se iz odnosa:

$$a = -\frac{\rho}{d} \cdot \sin\varphi$$

$$b = \frac{\rho}{d} \cdot \cos\varphi \qquad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Jednadžbe (4) vrijede za svaki pravokutni koordinatni sistem· S tim u vezi bit će srednja linearna pogreška tačke T_n u smjeru koordinatne osi **x'** sistema x'y' (sl. 3):



Slika 3

$$m^2_{x'_n} = \frac{[b'b']}{[a'a'] \cdot [b'b'] - [a'b']^2} \cdot m^2_{\varphi_n} \qquad \ldots\ldots (6)$$

Koeficijenti a' i b' mogu se izračunati za sistem x' y' dosljedno izrazu (5) iz odnosa:

$$a' = -\frac{\rho}{d} \sin(\varphi - \nu)$$

$$b' = \frac{\rho}{d} \cos(\varphi - \nu)$$

Koeficijente a' b' nije potrebno računati ukoliko su poznati koeficijenti a i b. Može se, naime, dokazati [vidi (4) str. 457, 458] da je:

$$\begin{aligned} [a'a'] &= [aa]\cos^2\nu + [bb]\sin^2\nu + [ab]\sin 2\nu \\ [b'b'] &= [bb]\cos^2\nu + [aa]\sin^2\nu - [ab]\sin 2\nu \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (8) \\ [a'a']\cdot[b'b'] - [a'b']^2 &= [aa]\ [bb] - [ab]^2 = D \end{aligned}$$

Uvođenjem ovih vrednosti u (6) dobit će se:

$$m^2_{x'_n} = \frac{[bb]\cos^2\nu + [aa]\sin^2\nu - [ab]\sin 2\nu}{D}\, m^2\varphi_n$$

odnosno prema (4):

$$m^2_{x'_n} = m^2_{x_n}\cdot\cos^2\nu + m^2_{y_n}\cdot\sin^2\nu - \frac{[ab]}{D}\sin 2\nu \qquad \ldots\ldots \quad (9)$$

Iz slike 3 se vidi da je $m_{x'n}$ u stvari srednja linearna pogreška T_n u smjeru ν to jest:

$$m_{x'n} = m_{\gamma n}$$

to prema (9) imamo:

$$m^2_{\gamma n} = m^2_{xn}\cdot\cos^2\nu + m^2_{yn}\cdot\sin^2\nu - \frac{[ab]}{D}\sin 2\nu \qquad \ldots \quad (10)$$

Treći član desne strane ove jednadžbe može se zanemariti kao mala veličina. Ovo je dopušeno s obzirtom da će koeficijenti a i b imati različite predznake. pa će i [ab] biti relativno mala veličina. Zanemarivanjem ovog člana dobit će se povoljniji i dovoljno tačni izraz za računanje:

$$m^2_{yn} = m^2_{x_n}\cdot\cos^2 y_n + m^2_{y_n}\sin^2 \nu n \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Često se krivulja pogrešaka tačke aproksimira kružnicom polumjera:

$$R = \frac{m^2_x + m^2_y}{2} = \frac{A^2 + B^2}{2}$$

Uz ovu aproksimaciju dobit će se da su linearne pogreške tačke u svim smjerovima iste. m_{vn} tačke T_n jednostavno se definira izrazom:

$$m^2_{v_n} = \frac{m^2_{x_n} + m^2_{y_n}}{2} = \frac{A^2_n + B^2_n}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Na kraju spomenimo i to da se m_{vn} može izraziti i srednjom položajnom pogreškom tačke koja se daje odnosom:

$$M^2_n = m^2_{yn} + m^2_{yn} = A^2_n + B^2_n \quad (13)$$

Prema (12) i (13) izlazi da je:

$$m^2_{v_n} = \frac{1}{2} M^2_n \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

Rezimiramo li ova izlaganja u vezi srednjih linearnih pogrešaka triangulacione tačke mogu se za računanje srednje pogreške m_d dužine zadane izrazom (1) izvesti slijedeće formule:

Prema (2) i (3):

$$m_d^2 = A_a^2 \cdot \cos^2(\nu - \Theta_a) + B_a^2 \cdot \sin^2(\nu - \Theta_a) + A_b^2 \cdot \cos^2(\nu - \Theta_b) + \\ + B_b^2 \cdot \sin^2(\nu - O_b) \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

Prema (2) i (10):

$$m_d^2 = \cos^2\nu \cdot (m^2_{xa} + m^2_{xb}) + \sin^2\nu\,(m^2_{ya} + m^2_{yb}) - \\ - \sin 2\nu \cdot \left[\left(\frac{[ab]}{D}\right)_{T_a} + \left(\frac{[ab]}{D}\right)_{T_b}\right] \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

Prema (2) i (11):

$$m_d^2 = \sin^2\nu \cdot (m^2_{ya} + m^2_{yb}) + \cos^2\nu \cdot (m^2_{xa} + m^2_{xb}) \quad \ldots\ldots\ldots (17)$$

Prema (2) i (12)

$$m_d^2 = \frac{m^2_{xa} + m^2_{ya}}{2} + \frac{m^2_{xb} + m^2_{xb}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (18)$$

Prema (2) i (14):

$$m_d^2 = \frac{M_a^2 + M_b^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Kod izvoda izloženih formula pošli smo od predpostavke da su srednje linearne pogreške tačaka T_a T_b u smjeru njihove spojnice, veličine m_{va} i m_{vb}, mjerilo tačnosti međusobnog odnosa tih tačaka.

U praksi, međutim, ta predpostavka neće biti u cijelosti ispunjena. Uzrok tome jesu pogreške koordinata danih (priključnih) tačaka, od kojih su tačke T_a i T_b određene.

Kod računanja koordinata nove tačke koordinate danih tačaka uvodimo u račun kao bezpogrešne veličine. No, unatoč tome pogreške danih tačaka djeluju na položaj tačke koja se određuje. Radi tih pogrešaka nova tačka bit će u kordinatnom sistemu xy pomaknuta. Veličina te pogreške, međutim, bit će samo svojim manjim dijelom okarakterizrana srednjim linearnim pogreškama tačke. S obzirom na ovo dopustimo za sada pretpostavku, što neće biti sasvim ispravno, da su srednje linearne pogreške novo određene tačke mjerilo tačnosti njenog određvanja u odnosu na dane tačke uzete kao bezpogrešno zadane. Dakle, u odnosu na neki zamišljeni sistem unutar kojeg će koordinate danih tačaka biti stvarno bespogrešne, a ne u odnosu na sistem xy u kojem su te tačke zadane s izvjesnom pogreškom položaja. Taj zamišljeni sistem bit će radi pogrešaka danih tačaka: pogrešan u mjerilu, translatorno pomaknut i zarotiran prema sistemu xy.

Iz ovoga slijedi: ako je tačka T_a određena od jedne grupe datih tačaka, a T_b od savim druge grupe, srednja pogreška dužine T_a — T_b izračunata iz veličine m_{va} i m_{vb} neće ukazivati na stvarnu tačnost dužine iz dva razloga. Prvi je razlog što se m_{va} i m_{vb} odnose na različite sisteme između kojih postoji nesklad, a drugi što vrijednosti m_{va} i m_{vb} ne obuhvaćaju i pogrešku mjerila sistema na koji se odnose. — Da bismo ovo obrazložili uzimamo za sada u razmatranje najjednostavniji slučaj određivanja tačke.

Neka je tačka T_a određena metodom presijecanja od svega dvije priključne (dane) tačke. Kako su ove priključne tačke zadane u koordinatnom sistemu xy s izvjesnom pogreškom položaja, to će te pogreške izazvati i odgovarajući pomak novo određene tačke u sistemu xy. Međutim, ta pogreška tačke T_a neće biti uopće okarakterizirana njenim srednjim linearnim pogreškama. Naime veličine m_{xa}, m_{ya} i m_{va} ovisit će u ovom slučaju isključivo o povoljnosti položaja tačke T_a u odnosu na priključne tačke i o tačnosti mjerenja a ne i o veličini pogrešaka priključnh tačaka. Iz ovoga slijedi da su srednje linearne pogreške tako određene tačke T_a mjerilo tačnosti njenog određivanja u odnosu na priključne tačke uzete kao bespogrešne veličine. Dakle u odnosu na sistem zadan priključnim tačkama unutar kojeg se koordinate tih tačaka mogu promatrati kao bespogrešne. Budući da su koordinate priključnih tačaka zadane u sistemu xy s izvjesnim pogreškama, to će sistem na kojeg se odnose veličine m_{xa}, m_{ya} i m_{va} biti: pogrešan u mjerilu, translatorno pomaknut i zarotiran prema koordinatnom sistemu xy. Pogreška mjerila sistema neće biti obuhvaćena veličinama m_{xa}, m_{ya} i m_{va}, jer su ove veličine potpuno neovisne o pogreškama priključnih tačaka.

Iz izloženog tumačenja proizlazi da veličine m_{xa} i m_{ya} ne predstavljaju srednje pogreške brojnih vrijednosti koordinata tačke T_a. Veličine m_{xa} i m_{ya} imale bi to značenje jedino da je tačka T_a određena od apsolutno bespogrešno zadanih tačaka. Ovako su m_{xa} i m_{ya} samo srednje linearne pogreške tačke T_a u smjeru koordinatnih osi x i y i predstavljaju mjerilo tačnosti određivanja tačke u tim smjerovima, ali u odnosu na sistem zadan danim tačkama.

Odredimo li od istih tačaka i drugu tačku T_b, to će ona biti pomaknuta uslijed pogrešaka danih tačaka za isti iznos kao i tačka T_a, a njene srednje linearne pogreške imat će isto značenje kao i tačke T_a. Odnosno, neće ukazivati na veličinu pomaka tačke T_b koji je izazvan pogreškama danih tačaka.

Izračunamo li iz srednjih linearnih pogrešaka tih tačaka srednju pogrešku dužine $T_a — T_b$, dobit će se vrijednost koja ilustrira njenu tačnost u odnosu na sistem a ne njenu stvarnu tačnost, jer $m_v a$ i m_{vb} ne sadržavaju pogrešku mjerila sitema.

Pretpostavimo sada da tačka T_b nije određena od istih tačaka kao T_a, već od neke druge dvije tačke. Budući da se pogreške danih tačka međusobno razlikuju, to je razumljivo da će tako određena tačka T_b biti pomaknuta u sistemu xy za neki drugi iznos koji se razlikuje od pomaka tačke T_a. Veličine m_{va} i m_{vb} u smjeru dužine $T_a — T_b$ u ovom slučaju neće zadovoljiti jednadžbu (2), tj. bit će:

$$m_d^2 \neq m_{va}^2 + m_{vb}^2$$

jer se m_{va} i m_{vb} odnose na dva različita sistema između kojih postoji nesklad. Tako izračunata vrijednost neće sadržati u sebi pogrešku koja proizlazi iz nesklada jednog i drugog sistema kao ni pogreške mjerila tih sistema.

Razmotrimo sada slučaj da se tačka T_n određuje od većeg broja danih tačaka. Pogreška novo određene tačke izazvana pogreškama danih tačaka ne bi bila ni u ovom slučaju uopće okarakterizirana njenim srednjim linearnim pogreškama kad bi sve dane tačke bile za isti iznos translatorno pomaknute i zarotirane u odnosu na sistem xy. No, u praksi ovakav pomak grupe danih tačaka unutar kojih se uklapa nova tačka ne treba očekivati. Svaka od danih tačaka grupe bit će za drugi iznos translatorno pomaknuta i zarotirana u odnosu na sistem xy. Drugim riječima — sistem definiran koordinatama većeg broja danih tačaka nije samo translatorno pomaknut, zarotiran i pogrešan u mjerilu već je i deformiran, do izvjesne mjere nejednolično razvučen. Unutar tako zadanog sistema nemamo jedinstvenu pogrešku mjerila. Ona se unutar sistema mijenja. Uslijed ovog momenta dobit će se nakon provedenog izjednačenja novo određene tačke povećane vrijednosti popravaka pravaca, odnosno povećani $m\varphi$ a samim tim i uvećane vrijednosti srednjih linearnih pogrešaka tačke. Međutim usprkos tome stvarna pogreška tačke izazvana pogreškama danih tačaka bit će samo djelomično okarakterizirana vrijednostima: m_x m_y m_v.

Prema tumačenjima Jochmanna (vidi /3/ str. 487), pogreška svake pojedine tačke može se promatrati kao složena veličina iz jednog nepravilnog dijela i drugog sistematskog. Ovaj nepravilni dio pogreške danih tačaka slijedi Gaussov zakon o pogreškama i utjecaj ovog dijela pogreške danih tačaka na položaj tražene tačke smanjuje se povećanjem broja priključnih tačaka. Za sistematski dio se ističe da djeluje na položaj tražene tačke u ovisnosti od rasporeda danih tačaka u odnosu na traženu tačku i da kod povoljnog rasporeda nova tačka poprima sistematsku pogrešku susjednih danih tačaka. Prema istim tumačenjima sistematsku pogrešku tačke može se zamisliti kao neznatno istezanje, translacija i rotacija koordinatnog sistema. Veličine ovih elemenata sistematske pogreške tačke ovise od brojnih vrijednosti koordinata tačke, tj. veličina sistematske pogreške se mijenja od tačke do tačke unutar triangulacione mreže po nekoj funkciji koja je nepoznata. No, za područje unutar kojeg leže priključne tačke i tačka koja se određuje može se uzeti da je:

1) ova funkcija približno konstantna, ili

2) da se u tom području funkcija mijenja linearno.

S obzirom na izloženo, kod ograničenog broja priključnih tačaka koje osim toga mogu biti zadane s neujednačenom tačnošću nepravilne pogreške djelovat će na položaj tražene tačke kao pogreške mjerenja. Uslijed prisutnosti ovih pogrešaka dobit će se povećana vrijednost popravaka pravaca, uvećani $m\varphi$ a samim tim i uvećane srednje linearne pogreške novo određene tačke. Odnosno, pogreška tačke izazvana ovim dijelom pogrešaka danih tačaka bit će u cijelosti okarakterizirana srednjim linearnim pogreškama tačke. Nasuprot ovome utjecaj sistematskog dijela pogrešaka danih tačaka na položaj novo određene tačke bit će samo djelomično obuhvaćen srednjim linearnim pogreškama tačke. Naime, do koje mjere će one utjecati na veličinu $m\varphi$ ovisit će o stupnju neujednačenosti sistematskih pogrešaka danih tačaka grupe. Prema tome samo u slučaju da sistematskim pogreškama danih tačaka nije poremećen međusobni odnos danih tačaka bit će veličine m_x, m_y i m_v potpuno neovisne o sistematskim pogreškama danih tačaka.

Rezimiramo li ova izlaganja može se zaključiti da su srednje linearne pogreške pojedinačno određene tačke u ovom slučaju mjerilo tačnosti njenog određivanja u odnosu na sistem koji je pogrešan u mjerilu, translatorno pomaknut i zarotiran u odnosu na sistem xy za iznos koji odgovara približno veličini sistematskih pogrešaka danih tačaka.

Prilikom provedenog izlaganja istakli smo da se sistematske pogreške tačaka po svojoj veličini mijenjaju pri prelazu od tačke do tačke unutar triangulacione mreže. S tim u vezi moramo imati u vidu da će svaka novo formirana grupa definirati i novi sistem i da će svaki sistem imati drugu pogrešku mjerila i biti za drugi iznos translatorno pomaknut i zarotiran prema koordinatnom sistemu xy.

Prema tome srednje linearne pogreške pojedinačno određenih tačaka T_a i T_b od kojih je svaka određena od druge grupe danih tačaka ne mogu se uzeti kao pouzdano mjerilo tačnosti međusobnog odnosa tih tačaka. Ovo proizlazi iz toga što veličine m_{va} i m_{vb} tako određenih tačaka ne ukazuju na pogreške mjerila sistema na koje se odnose kao ni na pogrešku mjerila koja proizlazi iz nesklada tih sistema.

Grupe danih tačaka koje se prilikom postepenog i pojedinačnog uklapanja tačaka formiraju redovito su međusobno povezane preko izvjesnog broja tačaka. Radi ove povezanosti grupa moglo bi se očekivati da će nesklad između sistema susjednih grupa biti minimalan i da se može zanemariti. No unatoč toj povezanosti grupa postojat će izvjesni nesklad između sistema koji se kod prelaza od jednog sistema na drugi postepeno povećava, pa zatim smanjuje po nekoj nepoznatoj funkciji. U kojoj je mjeri smišljenim planom računanja ovaj nesklad između sistema sveden na minimum unutar mreže može se donekle zaključiti i po uticaju nepravilnog djela pogrešaka danih tačaka na veličinu $m\varphi$. Naime, kod mreže gdje je ovaj nesklad minimalan može se očekivati da će i nepravilni dio pogrešaka danih tačaka neznatno utjecati na vrijednost $m\varphi$. U mreži gdje je ovo ostvareno srednje pogreške izjednačenih orijentiranih smjerova trebale bi po svojoj veličini odgovarati tačnosti izvršenih mjerenja.

No takva ocjena dat će samo približnu sliku o postojećem neskladu između sistema. Stvarna veličina sistematskih pogrešaka po volji odabranih tačaka T_a i T_b ostaje, naime, nepoznanica. Prema tome će srednja pogreška dužine, definirane tim tačkama, izračunata iz odnosa:

$$m^2 d = m^2_{va} + m^2_{vb}$$

ukazivati na tačnost koja ne pruža pouzdanu sliku o stvarnoj tačnosti dužine. Stvarnu tačnost dužine mogli bi utvrditi jedino kad bi poznavali pogrešku mjerila koja je uzrokovana sistematskim pogreškama tačaka. Iz ovoga slijedi da se stvarna tačnost dužine zadane triangulacionim tačkama može odrediti jedino putem direktnog mjerenja ili putem preciznih poligonskih vlakova.

LITERATURA:

1. *Čubranić:* Srednja pogreška dužine iz položaja dviju tačaka (Geodetski list 1956)
2. *Geodetska uprava:* Osnovni geodetski radovi (Beograd 1953)
3. *Jochmann:* Astronomische Orientirungen in der niederen Geodasie. (VEB, 1956, Heft 5/8)
4. *Jordan-Eggert:* Handbuch der Vermessungskunde Erster Band (1948)
5. *Pinkwart:* Zur Definition des mittleren Punktfehlers und der mittleren Fehlerellipse (Zeitschrift für Vermessungswesen, 1938)