

DODATNE TABLICE ZA TAHIMETRIJU

NIHAD KAPETANOVIĆ, dipl. inž. — Sarajevo

Za određivanje visinskih razlika i dužina u tahimetriji, kao što je poznato, važe slijedeće formule (vidi sliku):

$$H' = \frac{1}{2} \cdot K \cdot l \cdot \sin 2\alpha + c \cdot \sin \alpha \quad (1)$$

$$i \quad d = K \cdot l \cdot \cos^2 \alpha + c \cdot \cos \alpha \quad (2)$$

gdje su:

l odsječak na letvi

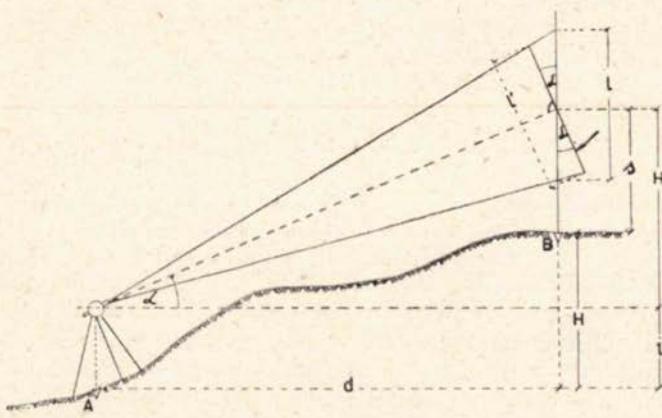
α vertikalni kut

K multiplikaciona konstanta tahimetra

c adicionalna konstanta tahimetra

H' visinska razlika horizontat — srednji konac (vidi sliku)

d horizontalna dužina



$$H = H' + l - \Delta$$

Računanje visinskih razlika H' i dužina d olakšavaju različita pomoćna sredstva kao tablice za tahimetriju, logaritmari, dijagrami. Najtačnije rezultate daju tablice. Zato se one i upotrebljavaju ovdje gdje se traži veća tačnost, npr. kod optičkih poligona vlakova. Kod nas se najviše upotrebljavaju tablice

za tahimetriju Dr-a Jordana (1),* i u novije vrijeme, tablice V. Kuzmanovića (2).^{*} Ovdje priložene dodatne tablice imaju za cilj da olakšaju i ubrzaju rad sa tablicama Dr-a Jordana uz sačuvanu ili čak povećanu njihovu tačnost.

Podsjetimo se, najprije, na rad s Jordanovim tablicama.

Formule (1) i (2) aproksimirane su u slične:

$$H' = 1/2 \cdot (K \cdot 1 + c) \sin 2\alpha \quad (1a)$$

$$d = (K \cdot 1 + c) \cos^2 \alpha \quad (2a)$$

Uslijed ove aproksimacije nastaje, ako radimo sa instrumentima kod koje je $c \neq 0$, pogreška u visinskoj razlici:

$$\epsilon_H = c \cdot \sin \alpha (1 - \cos \alpha) \quad (3)$$

i dužini:

$$\epsilon_d = c \cdot \cos \alpha (1 - \cos \alpha) \quad (4)$$

Ove pogreške dostižu, za veću adiciju konstantu i veći vertikalni kut, vrijednost od nekoliko centimetara, a imaju karakter sistematskih pogrešaka. U tablicama (2) na str. 86 date su tabelarne vrijednosti ovih pogrešaka za različite adicione konstante i razne vrijednosti vertikalnog kuta.

Druga sistematska pogreška nastaje uslijed zaokruživanja adicione konstante na decimetar. Ako je npr. $c = 0,35$ m, onda njenim zaokružavanjem na 0,4 m nastaje pogreška od 0,05 m. Za manje vertikalne kuteve ulazi ova pogreška u ukupnu pogrešku dužine u svom punom iznosu. Ako je kut veći nastaje pogreška u visinskoj razlici. Tako npr. za $\alpha = 30^\circ$ pogreška u visini nastala zaokružavanjem adicione konstante iznosi za $c = 0,35$:

$$(0,35 - 0,40) \cdot 0,433 = -0,02 \text{ m.}$$

Treća sistematska pogreška, samo za dužine, nastaje pri interpolaciji, i na nju će kasnije biti ukazano.

Cinjenica je da mi i prilikom rada na terenu pravimo pogreške, ali su to slučajne pogreške različitog predznaka i njih možemo izbjegći. Ove pak sistematske, nastale pri računanju, možemo vrlo lako eliminirati pogodnom metodom računanja, kao što će se iz daljnog izlaganja vidjeti, pa nema razloga da to ne učinimo.

Dodatne tablice nemaju, međutim, samo zadatak da povećavaju tačnost računanja (to se postiže samo usput), nego prvenstveno da skrate dugo-trajni postupak interpolacije u Jordanovim tablicama. U Jordanovim tablicama dati su, naime, produkti $(K \cdot 1 + c) 1/2 \cdot \sin 2\alpha$ samo za cijele kose dužine, tj. vrijednosti $(K \cdot 1 + c)$ i to u intervalima od po 3', 2', odnosno 1', zavisno od kose dužine. Slično su i umnošci $(K \cdot 1 + c) \cos^2 \alpha$ dati samo za cijele metre kose dužine i u intervalima od 1°, 30' ili 20', zavisno od vertikalnog kuta i kose dužine. Čitanje letve do na milimetar, dobijemo kosu dužinu do na decimetar. Vertikalni kut možemo lako pročitati na 1', a po potrebi i tačnije. Ako ovako dobijenu vrijednost $K \cdot 1$ odnosno $(K \cdot 1 + c)$ zaokružimo na najbliži cijeli metar, a pročitani vertikalni kut na najbližu vrijednost datu u tablicama, dobijemo vrijednost H i d bez interpolacije. Sa tačnosti koju bi ovako dobili rijetko se možemo zadovoljiti. Srednja pogreška ovako računatih visinskih razlika iznosi prema (3)* $\pm 0,04$ m, a dužina $\pm 0,26$ m. Navedena tačnost može se, međutim, znatno povećati interpolaciom između, u tablicama

* Vidi str. 87.

datih, susjednih vrijednosti kutova i dužina. Dr Jordan navodi da će u tom slučaju srednja pogreška računanja visinskih razlika iznositi $\pm 0,01$ m, a dužina $\pm 0,1$ m. Dok je interpolacija između datih vrijednosti vertikalnog kuta jednostavna, jer se susjedne vrijednosti nalaze jedna ispod druge, dotele je interpolacija za dijelove metra (decimetre) vrlo nezgodna pošto se vrijednosti za susjedne metre nalaze na različitim stranicama tabelica. Naročito je nezgodno kada se te vrijednosti nalaze na različitim stranicama istog lista, a to je u 50% slučajeva. Razmotrimo na jednom primjeru koliko je ta interpolacija nepraktična.

Primjer 1.

Zadano je: $K \cdot l = 169,8$, $c = 0$, $\alpha = 19^\circ 23'$. Naći ćemo prvo H' .

Na str. 161 tablica (1) za $K \cdot l = 169$ i $\alpha = 19^\circ 23'$ nalazimo
(interpolacijom između $19^\circ 22'$ i $19^\circ 24'$): $H'_1 \dots 52,91$
na str. 162 (morali smo kao u 50% svih slučajeva okrenuti
iliš) nalazimo za $K \cdot l = 170$ i $\alpha = 19^\circ 23'$ ponovo interpola-
cijom između ($19^\circ 22'$ i $19^\circ 24'$): $H'_2 \dots 53,22$

razlika za 1 metar iznosi $0,31$

a za 0,8 m: $i_h = 0,8 \cdot 0,31 = 0,25$

pa je konačno $H' = H'_1 + i_h \quad H' \dots 53,16$

Pošto su vrijednosti za visinske razlike u tablicama zaokružene na centimetre, to greška za jednu visinsku razliku može iznositi najviše ± 5 mm. Stoga, pogreška razlike $H'_2 - H'_1$ može dostići vrijednost od najviše ± 1 cm. Obzirom da se interpolacija vrši samo za dijelove metra, pogreška vrijednosti i_h uvek je manja od 1 cm.

Interpolacija za dužinu iziskivala bi isto tako dosta vremena. Zato se ona obično i ne vrši, nego se preostali decimetri (u našem slučaju 8) jednostavno pribroje nađenoj horizontalnoj dužini za okruglu vrijednost metra. Ovo je ispravno samo za manje kuteve i manji broj decimetara, dok za veće kuteve nastaje pogreška od 1—2 dm. Npr. za $\alpha = 30^\circ$, 9 decimetara reducira se na: $90 \text{ cm} \cdot \cos^2 30^\circ = 67 \text{ cm}$, pa pogreška iznosi 23 cm. To je treća sistematska greška koju smo ranije spomenuli (na str. 3). Za naš primjer bilo bi dakle:

za $K \cdot l = 169$ i $\alpha = 19^\circ 23'$ (interpolacijom između $19^\circ 20'$
i $19^\circ 40'$): $d_1 \dots 150,4$
nereduciranih $\dots 0,8$
i konačno $d \dots 151,2$

Primjer 2.

Zadano je: $K \cdot l = 100,5$, $c = 0,35$, $\alpha = 34$; $K \cdot l + c = 100,9$

U Jordanovim tablicama za 100 $H'_1 \dots 22,80$
za 101 $H'_2 \dots 23,03$
 $H'_2 - H'_1 \dots 0,23$
 $i_h = 0,9 \cdot 0,23 \dots 0,21$
 $H' = H'_1 + i_h \dots 23,01$

Slično je i za dužinu:
za 100 $d_1 \dots 94,5$
nereduciranih $\dots 0,9$
 $d \dots 95,4$

Ako imamo dodatne tablice možemo izbjegći neugodnu i dugo-trajnu interpolaciju za dijelove metra i eliminirati sve tri sistematske pogreške o kojima smo govorili. Pomoću tih tablica vrijednosti i_h i i_d koje inače moramo odrediti interpolacijom, određujemo brzo, tačno i jednostavno.

Napišimo izraze (1) i (2) u ovom obliku:

$$H' = (\frac{1}{2} K \cdot 1 \sin 2\alpha)_m + (\frac{1}{2} K \cdot 1 \sin 2\alpha)_{dm} + c \cdot \sin \alpha \quad \dots \quad (1b)$$

$$d = (K \cdot 1 \cdot \cos^2 \alpha)_m + (K \cdot 1 \cdot \cos^2 \alpha)_{dm} + c \cdot \cos \alpha \quad \dots \quad (2b)$$

gdje indeks m označava metre, indeks dm decimetre veličina u zagradi. Vrijednosti prvih članova izraza (1b) i (2b) nalazimo u Jordanovim tablicama za cijele metre, a sumu vrijednosti preostala dva člana u dodatnim tablicama. Kod instrumenata sa $c = 0$ otpadaju treći članovi izraza (1b) i (2b), pa dodatne tablice sadrže samo veličine $i_h = (\frac{1}{2} K \cdot \sin 2\alpha)_{dm}$ i $(K \cdot 1 \cdot \cos^2 \alpha)_{dm}$ za pojedine decimetre u zavisnosti od veličine kuta α .

U prvoj vertikalnoj koloni dodatnih tablica (koje su za instrumente sa $c = 0$ date na str. 85) nalaze se intervali puta, a u prvim horizontalnim rubrikama (zaglavljima) decimetri kose dužine, tj. veličina $(K \cdot 1)_{dm}$. Na presjeku kutnog intervala u kome leži dati vertikalni kut i odgovarajućeg decimetra nalaze se odgovarajuće vrijednosti za i_h i i_d . Ove vrijednosti date su u centimetrima. Vrijednosti i_d mogu se, po potrebi, lako zaokružiti na decimetar, a sračunate su na centimetar da bi se, pomoću ovih, lakše konstruirale dodatne tablice i za instrumente kod kojih nije $c = 0$. Osim toga, interpolacijom između susjednih vrijednosti vertikalnog kuta, može se dužina i u Jordanovim tablicama (za cijele metre) odrediti do na centimetar, doduše ne sasvim tačno, pošto su vrijednosti za dužine u ovim tablicama zaokružene na decimetar. Kutni intervali uzeti su tako gusti da obezbjeđuju istu tačnost veličine i_h kao što je ona dobijena interpolacijom u Jordanovim tablicama. Obzirom na karakter funkcija $\frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha$ i $\cos^2 \alpha$ maksimalna odstupanja vrijednosti i'_h i i'_d na granicama kutnih intervala u odnosu na vrijednosti za sredinu intervala i_h i i_d za koje su dodatne tablice sračunate, uvijek su manja od 1 cm, tj. $i_h - i'_h < \pm 1 \text{ cm}$ i $i_d - i'_d < \pm 1 \text{ cm}$.

Pomoću dodatnih tablica ranije navedeni primjer 1 (str. 4) lakše bi riješili.

Primjer 1a.

Zadano $K \cdot 1 = 169,8$, $\alpha = 19^\circ 23'$. Adiciona konstanta tahimetra $c = 0$. Za $K \cdot 1 = 169$ i $\alpha = 19^\circ 23'$ nalazimo u tablicama (i): $H' \dots 52,91$ $d_1 \dots 150,4$. U dodatnim tablicama (str. 6) nalazimo za 8 dm: $i_h \dots 0,25$ $i_d \dots 0,7$

pa je: $H' \dots 53,16$ $d \dots 151,1$

(vrijednosti i_h i i_d našli smo na presjeku kutnog intervala $19^\circ - 19^\circ 30'$ i decimetra 8.)

Tačne vrijednosti iznose: $H' = \frac{1}{2} (169,8 \cdot \sin 38^\circ 46') = 53,160$ i $d = 169,8 \cdot \cos^2 19^\circ 23' = 151,097$. Upoređivanjem vrijednosti tačne dužine sa vrijednostima dobijenim u primjeru 1 i 1a, vidmo da je vrijednost dobijena pomoću dodatnih tablica tačnija.

Ako želimo sastaviti dodatne tablice za instrument sa c o, treba na svaku vrijednost i_h dodati veličinu $c \cdot \sin \alpha$, a na svaku vrijednost i_d veličinu $c \cdot \cos \alpha$. Vrijednosti $c \cdot \sin \alpha$ i $c \cdot \cos \alpha$ sračunamo također za srednje vrijednosti kutnih intervala do na centimetar. Za $c = 0,35$ imali bi na primjer:

Interval kuta	$c \cdot \sin \alpha$	$c \cdot \cos \alpha$	Interval kuta	$c \cdot \sin \alpha$	$c \cdot \cos \alpha$
$0^\circ - 0^\circ 30'$	0	35	$13^\circ - 13^\circ 30'$	8	34
$0^\circ 30' - 1^\circ$	0	35	$13^\circ 30' - 14^\circ$	8	34
$1^\circ - 1^\circ 30'$	1	35	$29^\circ - 29^\circ 30'$	17	31
			$29^\circ 30' - 30^\circ$	17	30

(vrijednosti $c \cdot \sin \alpha$ i $c \cdot \cos \alpha$ su u centimetrima, a sračunate su za sredine pojedinih intervala tj. za $0^\circ 10'$, $0^\circ 45'$, $1^\circ 15'$... $13^\circ 15'$, $13^\circ 45'$... $29^\circ 15'$, $29^\circ 45'$.) Dodatne tablice za instrumenat sa $c = 0,35$ izgledale bi ovako:

$(K \cdot l)_{dm}$	vrijednosti $i_h + c \cdot \sin \alpha$ u centimetrima										vrijednosti $i_d + c \cdot \cos \alpha$ u centimetrima										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Int. kuta																					
$0^\circ - 0^\circ 30'$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	35	45	55	65	75	85	95	105	115	125	
$0^\circ 30' - 1^\circ$	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	35	45	55	65	75	85	95	105	115	125	
$1^\circ - 1^\circ 30'$	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	35	45	55	65	75	85	95	105	115	125	
...	
...	
$13^\circ - 13^\circ 30'$	8	10	12	15	17	19	21	24	26	28	34	43	53	62	72	81	91	100	110	119	
$13^\circ 30' - 14^\circ$	8	10	13	15	17	20	22	24	26	29	34	43	53	62	72	81	91	100	109	119	
...	
...	
$29^\circ - 29^\circ 30'$	17	21	26	30	34	38	43	47	51	55	31	39	46	54	61	69	77	84	92	100	
$29^\circ 30' - 30^\circ$	17	21	26	30	34	39	43	47	51	56	30	38	45	53	60	68	75	83	90	98	

Slično bi izradili dodatne tablice i za bilo koju drugu vrijednost adicione konstante tahimetra. Skrećemo pažnju da je u dodatnoj tablici za instrumenat sa c o potrebno uvesti rubrike i za nula decimetara. Za o dm $i_h = 0$ i $i_d = 0$ pa ostaju samo vrijednosti $c \cdot \sin \alpha$ odnosno $c \cdot \cos \alpha$.

Pomoću ovakvih tablica lako bi uradili primjer 2 (str. 5).

Primjer 2a

Zadano je: $K \cdot l = 100,5$, $\alpha = 13^\circ 34'$, $c = 0,35$

za $K \cdot l = 100$ i $\alpha = 13^\circ 34'$ nalazimo

$$\text{u tablicama (1): } H_1 \dots 22,80 | i_d + c \cdot \cos \alpha \dots 0,8$$

iz dodatnih tablica za $c = 0,35$ nalazimo

$$\text{za } 5 \text{ dm: } i_h + c \cdot \sin \alpha \dots 0,20 | d \dots 95,3$$

$$\text{pa je } H' \dots 23,00 | d_1 \dots 94,5$$

Tačne vrijednosti iznose: $H' = \frac{1}{2}(100,5 \cdot \sin 27^\circ 08') + 0,35 \cdot \sin 13^\circ 34' = 22,999$ i $d = 100,5 \cdot \cos^2 13^\circ 34' + 0,35 \cdot \cos 13^\circ 34' = 95,310$. Upoređenjem Upoređenjem rezultata iz primjera 2 i 2a sa tačnim vidi se da su vrijednosti (prvenstveno za dužinu) sračunate upotrebom dodatnih tablica tačnije.

Dodatne tablice zgodno je nalijepiti na unutrašnju stranu prednje ili zadnje korice Jordanovih, tako da se prilikom računanja mogu izbaciti sa lijeve ili desne strane Jordanovih tablica. Na taj način biće nam uvjek pri ruci, pa neće biti potrebno listanje. Dobro ih je izraditi u dva primjeka, pa jedan nalijepiti na prednju, a drugi na zadnju koricu Jordanovih. Prije spremanja Jordanovih lako je dodatne tablice presaviti unutra. Pošto noviji instrumenti imaju $c = 0$, to ćeemo se najčešće moći služiti ovdje priloženim dodatnim tablicama za $c = 0$. Za instrumente sa adicijonom konstantom $c \neq 0$, lako je sračunati izraze $c \cdot \sin \alpha$ i $c \cdot \cos \alpha$ i pribrojiti ih odgovarajućim vrijednostima dodatnih tablica za $c = 0$. Dodatne tablice sračunate su do vrijednosti vertikalnog kuta od 30° , pošto su do te vrijednosti sračunate i tablice (1). U slučaju potrebe, tj. ako imamo Jordanove tablice i za kuteve preko 30° , lako je dopuniti i dodatne.

N a p o m e n a : Iako su vrijednosti i_h u dodatnim tablicama određene sa istom pogreškom kao vrijednosti sračunate interpolacijom u Jordanovim, mogu se, radi različitog zaokruživanja, međusobno razlikovati za 1 — 2 cm. U tom je slučaju tačna vrijednost negdje između ovako sračunatih. Na primjer, za $K \cdot l = 67,3$, $\alpha = 12^\circ 27'$ i $c = 0$ nalazimo u Jordanovim tablicama:

$$\text{za } 67 \dots H'_1 = 14,10$$

$$\text{za } 68 \dots H'_2 = 14,32$$

$$H'_2 - H'_1 = 0,22$$

$$i_h = 0,3 \cdot 0,22 = 0,07$$

dok iz dodatnih tablica za interval $12^\circ - 12^\circ 30'$ i 3 decimetra nalazimo $i_h = 0,06$. Tačna vrijednost iznosi $\frac{1}{2}(0,3 \cdot \sin 24^\circ 54') = 0,063$.

LITERATURA:

1. Dr W. Jordan: »Pomoćne tabele za tahimetriju«. Prevod ing. M. Cvrčanin. I davač: Saobraćajno izdavačko preduzeće Ministarstva saobraćaja, Beograd 1948.
2. V. Kuzmanović: »Tablice za tahimetriju«. Izdavač: Novinsko izdavačko štamparsko preduzeće »Grafički zavod«, Titograd 1962, II izdanje.
3. Jordan-Eggert: »Handbuch der Vermessungskunde«, zweiter Band, zweiter Halbband, deveto izdanje, Stuttgart 1933, str. 273—274.