PRILOG USKLAĐIVANJU POKAZATELJA KOD ODREĐIVANJA GRANIČNIH GREŠAKA U TRIGONOMETRISKOJ MREŽI I. REDA

KRUNISLAV MIHAILOVIĆ dipl. inž. — Beograd

PRETHODNA OCENA TAČNOSTI — Usled neminovnih grešaka koje se javljaju u procesu merenja za određivanje neke veličine uzima se više podataka nego što je to neophodno potrebno. Neka smo u cilju određivanja stvarne vrednosti neke veličine A izvršili niz merenja $x_1, x_2, \ldots x_n$. Jasno da će se pojedine vrednosti niza međusobno razlikovati. Stepen njihovog rasipanja oko tražene (stvarne) vrednosti A zavisiće od tačnosti samih merenja. Zbog toga se kod geodetskih merenja unapred definiše tražena tačnost s obzirom na namenu radova a zatim se bira instrumentarij i metoda rada koja će obezbediti traženu tačnost. Kako se geodetski radovi izvode na terenu gde uslovi za rad nisu tako pogodni s jedne strane a s druge često puta izvode ih nedovoljno stručna lica, na osnovu teorijskih razmatranja ili eksperimentalnim putem utvrđuju se pokazatelji koji treba da nam osiguraju željenu tačnost. Ako ima više pokazatelja a to je redovno kod radova visoke tačnosti nužno je da se ti pokazatelji izjednače u pogledu kriterijuma. Na taj način doćićemo do podataka koji su homogeni u pogledu tačnosti, što je od izuzetne važnosti kod preciznih geodetskih radova, kao što je to na primer trigonometrijska mreža 1. reda. (1) (strana 298).

U cilju obezbeđenja željene tačnosti kod uglovnih merenja u trigonometrijskoj mreži 1. reda preporučuje se, da se svaki pojedini rezultat merenja analizira pre nego se uključi u dalju obradu. Ako se merenja nalaze unutar granica koje su prethodno fiksirane, onda se takva merenja mogu usvojiti kao upotrebljiva i koristiti u izravnanju, jer će nam ona sigurno dati željene rezultate. Sva merenja van tih granica koje mi geodeti nazivamo »dozvoljena odstupanja« moraju se odbaciti i zameniti novim.

Stoga izravnanju kod radova visoke tačnosti prethodi analiza rezultata merenja koja obuhvata:

a) Prethodnu ocenu izvršenih merenja
b) Ocenu stvarne tačnosti dobivenih rezultata.

Mi ćemo se zadržati samo na prvu ocenu koja se vrši u cilju konstatacije o upotrebljivosti rezultata merenja odnosno ustanovljavanja onih merenja koja su ispod nivoa tražene tačnosti. Takva se merenja, kao što smo već rekli odbacuju i zamenjuju novim.

Za prethodnu ocenu tačnosti kod merenja horizontalnih uglova u trigonometrijskoj mreži 1. reda koriste se dva pokazatelja:

1. Maksimalne dozvoljene razlike između polugirusa i
2. Maksimalne veličine odstupanja pojedinih rezultata od aritmetičke sredine iz njih obrazovane.

Do brojnih vrednosti ovih pokazatelja došlo se teorijskim razmatranjem usvajajući za srednju grešku ugla merenog u jednom girusu 1″ tj.

$$m_0 \leq 1''$$

Kod izvođenja drugog pokazatelja čini se predpostavka koja se teorijski ne može obrazložiti, pa kao posledica toga došlo se do pokazatelja koji nije dovoljno siguran u obavljanju svoga zadatka.

Drugi pokazatelj odnosi se na razlike između pojedinih merenja i aritmetičke sredine tj.

$$v_i = \bar{x} - x_i \tag{1}$$

Očigledno, da između pojedinih merenja x_i i aritmetičke sredine $\bar{x}$ nema stroge funkcionalne zavisnosti kakva se susreće u funkcionalnoj analizi i u matematici uopšte.. Dve su promenljive veličine u funkcionalnoj zavisnosti samo onda ako jednoj promenljivoj odgovaraju potpuno određene korespodentne veličine druge promenljive, Ovaka stroga funkcionalna veza ne postoji između pojedinih merenja i aritmetičke sredine, koja bi se mogla tačno i određeno definisati. Međutim, ipak izvesna zavisnost mora postojati jer u aritmetičkoj sredini sadržana su sva merenja iz kojih je ona obrazovana. Prema tome, između pojedinih merenja x_i i aritmetičke sredine x postoji izvesna zavisnost koja se za razliku od prave funkcionalne zavisnosti naziva korelativna zavisnost. Ona se može i brojno izraziti. Poznato je da se stepen korelativne zavisnosti između slučajnih veličina izražava pomoću koeficijenta korelacije. Kasnije, videćemo, na osnovu teorijskog razmatranja da postoji korelativna zavisnost između pojedinih vrednosti merenja i aritmetičke sredine. O ovome se u geodetskoj literaturi nije vodilo računa kod određivanja srednje kvadratske greške razlike između pojedinih merenja i aritmetičke sredine.

Srednja kvadratska greška razlike između pojedinih merenja i aritmetičke sredine u konačnom obliku glasi: (2) (str. 17)

$$m_v = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot m_x \tag{2}$$

gde su:

— mx — srednja greška pojedinih merenja

— n — broj merenja iz kojih je obrazovana aritmetička sredina

Za graničnu vrednost srednje greške usvojena je dvostruka srednja greška.

$$M_{max} = v_{max} = 2m_x \sqrt{\frac{n+1}{n}} \tag{3}$$

Formula (3) ne može se prihvatiti kao pravilna naročito sa teorijske tačke gledišta, jer se prilikom njenog izvođenja nije vodilo računa o zavisnosti koja realno postoji između pojedinih vrednosti niza $x_1, x_2, \ldots x_n$ i aritmetičke sredine $\bar{x}$. Prema tome, ni pokazatelj odnosno granična vrednost srednje greške definisan formulom (3) neće biti u saglasnosti sa teorijskim razmatranjem. Iz ovoga jasno sleduje da su navedena dva pokazatelja neravnopravna u pogledu strogosti selekcije pojedinih rezultata merenja koja su ispod nivoa tražene tačnosti. Drugi pokazatelj biće u saglasnosti sa prvim i dovoljno efikasan u svojoj funkciji samo onda ako se odredi na osnovu strogih teorijskih razmatranja. To znači, da se kod određivanja srednje greške odstupanja pojedinih merenja od aritmetičke sredine mora voditi računa o navedenoj korelativnoj zavisnosti koja postoji između pojedinih merenja i aritmetičke sredine.

Pravilan izraz za srednju grešku razlike između pojedinih merenja i aritmetičke sredine može se izvesti na dva načina koja se suštinski razlikuju. Pošto na takva izvođenja nisam naišao, kako u našoj tako i stranoj literaturi, smatram da će biti od koristi da ih u ovom radu prikažem.

ODREĐIVANJE SREDNJE GREŠKE RAZLIKE v_i GRUPISANJEM NEZAVISNIH MERENJA — Uzmimo niz nezavisnih merenja iste tačnosti $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Aritmetička sredina ovoga niza biće

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i \quad (i = 1.2 \ldots\ldots n) \tag{4}$$

Obrazujmo razlike između aritmetičke sredine i pojedinih merenja tj.:

$$\begin{aligned} v_1 &= \bar{x} - x_1 \\ v_2 &= \bar{x} - x_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= \bar{x} - x_n \end{aligned} \tag{5}$$

Jednačinama (5) dajemo drugi oblik

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n} - x_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n} - x_n \end{aligned} \tag{6}$$

Sada izvršimo grupisanje nezavisnih merenja

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1-n}{n} x_1 + \frac{1}{n} x_2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n} x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= \frac{1}{n} x_1 + \frac{1}{n} x_2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{1-n}{n} x_n \end{aligned} \tag{7}$$

Primenom formule za srednju grešku funkcije dobijemo:

$$m^2_{v_1} + \frac{(1-n)^2}{n^2} m^2_{x_1} + \frac{1}{n^2} m^2_{x_2} + \dots\dots + \frac{1}{n^2} m^2_{xn}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (8)$$

$$m^2_{vn} = \frac{1}{n^2} m^2_{x_1} + \frac{1}{n^2} m^2_{x_2} \dots\dots\dots + \frac{(1-n^2}{n^2} m^2_{xn}$$

Predpostavili smo da su merenja iste tačnosti

$$m_{x_1} = m_{x_2} = \dots\dots\dots = m_{xn} = m_x$$

Onda s obzirom na strukturu jednačina (5) dobijamo:

$$m_{v_1} = m_{v_2} = \dots\dots\dots = m_{vn} = m_v$$

Odnosno

$$m_v = \frac{m^2_x}{n^2} [(1-n)^2 + (n-1)] \qquad (9)$$

Koristeći nejednakost

$$(1-n)^2 = (n-1)^2$$

neposredno dobijamo

$$m^2_v = \frac{n-1}{n} \cdot m^2_x \qquad (10)$$

Definitivni oblik srednje greške razlike između pojedinih merenja i aritmetičke sredine biće:

$$m_v = m_x \sqrt{\frac{n-1}{n}} \qquad (11)$$

Lako je primetiti da formule (2) i (11) koje se odnose na srednje kvadratne greške odstupanja v_i nisu identične. Naime, kada se zanemaruje korelativna zavisnost između pojedinih merenja i aritmetičke sredine uvek se za srednju grešku razlike v_i dobija veća vrednost tj.

$$m_v > m'_v$$

gde smo sa m_V označili srednju kvadratsku grešku kada se zanemaruje korelacija između aritmetičke sredine i elemenata iz kojih je ona obrazovana (2) a sa $m_V{}^1$ srednju grešku razlike kada se uzima u obzir zavisnost grupisanjem nezavisnih elemenata (11).

ODREĐIVANJE SREDNJE GREŠKE RAZLIKE v_i UZIMAJUĆI U OBZIR KORELATIVNU ZAVISNOST. — Odstupanja v_i dobijamo kao razlike dveju slučajnih veličina aritmetičke sredine $\bar{x}$ i pojedinih merenja x_i, tj.

$$V_i = \bar{x} - x_i \qquad (12)$$

Očigledno, da će i razlike v_i biti slučajne veličine.

Primenimo opštu formulu za disperziju razlike slučajnih veličina kada su u korelativnom odnosu

$$D[v] = m^2_v = m^2_{\bar{x}} + m^2_{xi} - 2r_{\bar{x},xi}\, m_{\bar{x}} \cdot m_{xi} \qquad (13)$$

Koeficijenat korelacije $r_{\bar{x},x_i}$ određuje brojno zavisnost između slučajne promenljive $\bar{x}$ i x_i. Analitički se može izraziti formulom

$$r_{\bar{x},x_i} = \frac{K_{\bar{x}_i\, xi}}{m_{\bar{x}} \cdot m_{x_i}} \qquad (14)$$

gde su $K_{\bar{x},xi}$ korelaciski moment

$m_{\bar{x}}$ srednja greška aritmetičke sredine

m_{xi} srednja greška pojedinih merenja

Korelaciski moment $K_{\bar{x},xi}$ ili mešoviti centralni moment definisan je izrazom

M

$$K_{\bar{x},xi} = [(\bar{x} - M[\bar{x}])(x_i - M[x_i])] \qquad (15)$$

Matematička nada je brojna karakteristika slučajne veličine i u našem slučaju predstavlja istinitu vrednost merene veličine A, tj.

$$M[\bar{x}] = M[x_i] = A \qquad (16)$$

Uvrstimo ove vrednosti u jednačinu (15)

$$\begin{aligned} K_{\bar{x},xi} &= M[(\bar{x} - A)(x_i - A)] = M[\bar{x}x_i - x_iA - \bar{x}A + A^2] = \\ &= M[\bar{x}x_i] - M[x_iA] - M[\bar{x}A] + M[A^2] \end{aligned} \qquad (17)$$

Koristeći svojstva o matematičkoj nadi dobijamo:

$$\begin{aligned} M[A^2] &= A^2 \\ M[x_iA] &= A[x_i] = A^2 \\ M[\bar{x}A] &= A[\bar{x}] = A^2 \end{aligned} \qquad (18)$$

Ako vrednosti iz formule (18) uvrstimo u jednačinu (17) dobijamo

$$K_{\bar{x}x_i} = M[\bar{x}x_i] - A^2 \qquad (19)$$

Sada treba odrediti matematičku nadu proizvoda

$$\begin{aligned} M[\bar{x}x_i] &= M[x_i \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} xj] = \\ &= \frac{1}{n} M[x_i \sum_{j=1}^{n} xj] = \frac{1}{n} M\left[\sum_{j=1}^{n} x_i\, xj\right] \end{aligned} \qquad (20)$$

Izraz (20) u razvijenom obliku glasi:

$$M[\bar{x}\ x_i] = \frac{1}{n} M[x_i x_1 + x_i x_2 + \dots + x_i x_i + \dots + x_i x_n] =$$
$$= \frac{1}{n} \left\{ M[x_i x_1] + M[x_i x_2] + \dots + M[x_i x_i] + \dots M[x_i x_n] \right\} \tag{21}$$

Obzirom da su merenja nezavisna možemo napisati:

$$M[x_i x_j] = M[x_i]\, M[x_j] = A^2 \dots \; i \neq j \tag{22}$$
$$M[x_i x_j] = M[x^2_i] \dots \dots \; i = j$$

Po definiciji dispersija slučajne veličine je matematička nada kvadrata razlike slučajne veličine i njene matemtaičke nade, tj.

$$D[x_i] = m^2_{xi} = M[(x_i - M[x_i])]^2 = M[x_i - A]^2 =$$
$$= M[x^2_i - 2x_i A + A^2] = M[x^2_i] - A^2 \tag{23}$$

odnosno

$$M[x^2_i] = m^2_{xi} + A^2 \tag{24}$$

Ako vrednosti iz formule (22) i (24) uvrstimo u formulu (21) dobijamo:

$$M[\bar{x}\ x_i] = \frac{1}{n} [(n-1) A^2 + m^2_{xi} + A^2] = \frac{m^2_{xi}}{n} + A^2 \tag{25}$$

Ako u formuli (17) zamenimo vrednosti iz formule (18) i (25) dobićemo korelaciski moment u definitivnom obliku

$$K_{\bar{x}, xi} = \frac{m^2_{xi}}{n} + A^2 - A^2 = \frac{m^2_{xi}}{n} \tag{26}$$

Poznat je odnos između srednje greške aritmetičke sredine i srednje greške pojedinih merenja koji u analitičkom obliku glasi:

$$m_{\bar{x}} = \frac{m_{xi}}{\sqrt{n}} \tag{27}$$

Definitivan oblik za koeficijenat korelacije dobijamo kada izraz (26) i (27) uvrstimo u jednačinu (14)

$$r_{\bar{x}.xi} = \frac{\frac{m^2_{xi}}{n}}{\frac{m_{xi}}{\sqrt{n}}\, m_{xi}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{28}$$

Koeficijenat korelacjie je obrnuto proporcionalan kvadratnom korenu od broja elemenata iz kojih je obrazovana aritmetička sredina.

Uslov za egzistenciju aritmetičke sredine jeste da imamo minimum dva merenja. Prema tome, koeficijenat korelacije koji daje stepen korelisanosti između aritmetičke sredine i pojedinih merenja uvek je pozitivna veličina i manja od jedinice tj.

$$0 < r_{\bar{x}, xi} \leq 1$$

Treba posebno istaći da koeficijenat korelacije ne zavisi od tačnosti merenja. On zavisi isključivo od broja elemenata iz koje je obrazovana aritmetička sredina i opada sa povećanjem broja merenja.

Zamenom vrednosti iz formula (27) i (28) u jednačinu (13) dobijamo:

$$m^2_v = \frac{m^2_{xi}}{n} + m^2_{xi} - 2\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{m_{xi}}{\sqrt{n}} \cdot m_{xi} = \frac{n-1}{n} \cdot m^2_{xi} \qquad (29)$$

odnosno

$$m_v = m_x \sqrt{\frac{n-1}{n}} \qquad m_{xi} = m_x$$

Kao što vidimo formula (29) je u potpunosti identična sa formulom (11) koja se dobija grupisanjem nezavisnih merenja.

Upoređujući formulu (2) sa formulama (11) odnosno (29) vidimo da se one znatno razlikuju. Naime, srednja greška razlike određene po formuli (2) uvek je veća od srednje greške pojedinih merenja i obrnuto, srednja greška razlike određena po formuli (11) odnosno (29) uvek je manja. Srednja kvadratska greška pojedinih merenja nalazi se između grešaka određenih po formuli (2) i (11) odnosno (29), tj.

$$m_v > m_x > m'_v$$

Kada broj elemenata iz kojih je obrazovana aritmetička sredina neograničeno raste onda m_v teži m'_v. Međutim, u geodeziji koristi se ograničeni broj merenja pa se o tome mora voditi računa naročito onda kada je broj merenja mali.

POSLEDICE NEJEDNAKIH KRITERIJUMA TRETIRANIH POKAZATELJA. — Kazali smo da su razlike v_i između pojedinih merenja i aritmetičke sredine slučajne veličine jer se njihove vrednosti ne mogu nikada unapred predvideti. One se mogu odrediti samo sa gledišta računa verovatnoće ako nam je poznat zakon njihovog rasporeda. Ako predpostavimo da se odstupanja v_i pokoravaju normalnom zakonu i fiksiramo za graničnu vrednost dvostruku srednju grešku razlike, onda verovatnoća da će se razlike v_i nalaziti unutar tih granica biti

$$P = (-2m_v \leq V_i \leq 2m_v) \approx 0{,}95$$

To znači treba očekivati da će pet odsto merenja biti pogrešna koja će po teoriji pasti van utvrđenog intervala.

Takva se merenja moraju ponoviti. U knjizi Viša geodezija, I knjiga od Ing. Nikole Svečnikova, navedena je analiza za 1670 uglova u 8176 girusa iz kojih se vidi da je poništeno 3% izvršenih merenja, čija su odstupanja od aritmetičke sredine bila veća od 2,5″. Za graničnu vrednost srednje greške razlike $m_{v\,max} = 2{,}5''$ usvojena je dvostruka srednja greška odr đena po formuli (2) uvećana do 2,5″. Broj ponovljenih merenja je manji nego što bi se trebalo očekivati na osnovu teorijskog razmatranja. Ovo navodi na pomisao da je navedeni pokazatelj suviše tolerantan i širok.

Upoređujući formule (2) sa formulama (11) odnosno (29) nije teško uočiti da je formula (11) odnosno (29) strožija, pa će i pokazatelj određen na osnovu nje biti stroži. Takav nam pokazatelj i treba jer bi onda imali veći procenat odbacivanja pogrešnih merenja koja su ispod nivoa tražene tačnosti. Tako neusklađeni pokazatelji ne ponašaju se podjednako u odnosu na sva merenja naročito ona čije su greške u blizini graničnih vrednosti, odnosno jedan pokazatelj uvek mora biti tolerantniji u odnosu na drugi.

Iz izloženog se jasno vidi da pokazatelji moraju imati podjednake efektivne mogućnosti za utvrđivanje »grubih grešaka«. Oni treba da svako pojedino merenje podvrgnu adekvatnim kriterijumima koji proističu iz teorijskih razmatranja. Samo na taj način možemo iz niza merenja izdvojiti ona koja mogu sigurno da udovolje unapred postavljene zahteve u pogledu tačnosti. Ako pokazatelji nisu usklađeni u kvalitativnom pogledu tj. imaju različite kriterijume strogosti u pogledu ocene valjanosti dobivenih rezultata onda takva merenja ne mogu biti homogene tačnosti. Kao posledica ovoga, stvorilo bi se niz teškoća kod izravnanja mreža, jer bi u tome moralo da se vodi računa. Sva merenja ne bi imala istu težinu, te bi nužno bilo da se računskim putem svedu na istu meru uvođenjem težina.

Na kraju treba skrenuti pažnju da izraz »homogena tačnost« treba shvatiti kao čisto teorijski termin jer praktično nikada se putem geodetskih merenja ne može doći do apsolutno homogenih podataka u pogledu tačnosti. Autor je pod tim pojmom nazvao sva merenja koja su unutar granica koje smo unapred fiksirali.

Napominjemo, da cilj autora nije bio da se upušta u pravilnost primene dvostruke srednje greške za graničnu vrednost s obzirom da operišemo sa ograničenim brojem merenja, već da ukaže da drugi pokazatelj kakav je dat u literaturi nema teoretskog opravdanja.

LITERATURA

1. *Ing. Nikola SVEČNIKOV:* Viša geodezija, I knjiga, Beograd, 1953.
2. Savezna geodetska uprava: Upustvo za izvršenje naknadnih radova na trigonometrijskoj mreži 1. reda, Beograd, 1956.
3. *HRISTOV, W. K.:* Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische statistik. — Berlin, 1961.
4. *SMIRNOV, N. V. i DUKIN-BARKOVSKIJ, I. V.:* Kratkij kurs matematičeskoj statistiki dlja tehničeskih priloženij. — Moskva, 1959.
5. *ČEBOTAREV. A. S.:* Sposob naimenših kvadratov s osnovami teorii verojatnostej.. — Moskva, 1958.
6. *VENTCEL, E. S.:* Teorija verojatnostej. — Moskva, 1962.