POUZDANOST REZULTATA IZ MALOG BROJA MJERENJA

ZVONIMIR NAROBE dipl. inž. — Zagreb

Razmatranje će se zbog jednostavnosti bazirati na tzv. direktnim mjerenjima. Pretpostavlja se dalje da u mjerenjima nema sistematskih pogrešaka.

Neka je izvršena serija nezavisnih jednako tačnih opažanja:

$$l_1, l_2, l_3, \ldots l_j, \ldots l_N \tag{1}$$

Opažana je ista veličina, čije je tačno značenje $\bar{x}$. Ukoliko istinita vrijednost mjerene veličine $\bar{x}$ nije poznata, njena empirička srednja vrijednost će biti:

$$x = \frac{[l]}{N} = \frac{\sum_{j=1}^{N} l_j}{N} \tag{2}$$

Daljnje, u teoriji pogrešaka uobičajene oznake jesu:

$w_j = \bar{x} - l_j$ ... prave pogreške pojedinog mjerenja
$v_j = x - l_j$ ... najvjerojatnije pogreške pojedinog mjerenja

Ocjena tačnosti jednog mjerenja, izražena srednjom pogreškom m, računa se po formuli

$$m = \sqrt{\frac{[w^2]}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N} (\bar{x} - l_j)^2}{N}} \tag{3}$$

ako su poznate prave pogrške w, odnosno ako je apsolutno tačno poznata vrijednost mjerene veličine $\bar{x}$. Kad istinita vrijednost mjerene veličine nije poznata, srednja pogreška m, računa se iz najvjerojatnijih pogrešaka v:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N} (x - l_j)^2}{N-1}} \tag{4}$$

U teoriji pogrešaka , važna je još formula za srednju pogrešku aritmetske sredine M:

$$M = \frac{m}{\sqrt{N}} \tag{5}$$

Navodeći izraze (3), (4), (5), u udžbenicima se uvijek napominje, da je ova ocjena tačnosti pouzdana samo onda kad je m sračunat iz većeg broja mjerenja (veći N). Kod malog broja mjerenja, sred. pogreška m može naime i sama sadržavati osjetnu pogrešku. Drugim riječima, ocjena tačnosti mjerenja sračunata po izrazima (3) odnosno (4) iz malog broja podataka, može se znatno razlikovati od faktično postignute tačnosti.

Unatoč tome, izrazi (3) i (4) u praksi se često upotrebljavaju i kod veoma malog broja mjerenja, a da se o pouzdanosti ovako sračunatih parametara m, obično ništa ne spominje. Vrlo rijetko u tu svrhu navodi se srednja pogreška same srednje pogreške $m_{(m)}$ Kod računanja sa pravim pogreškama

$$m_{(m)} = \frac{m}{\sqrt{2N}} \tag{6}$$

ili kod računanja sa najvjerojatnijim pogreškama

$$m_{(m)} = \frac{m}{\sqrt{2(N-1)}} \tag{7}$$

Formule (6), (7), kao mjerilo fluktuacije srednjih pogrešaka m, poznate su još od Gaussa. Kod malog N one u velikoj mjeri osporavaju vrijednost zaključaka o tačnosti mjerenja prema izrazima (3), (4), (5). Međutim ipak se u raznim analizama često šutke prelazi preko izraza (6), (7).

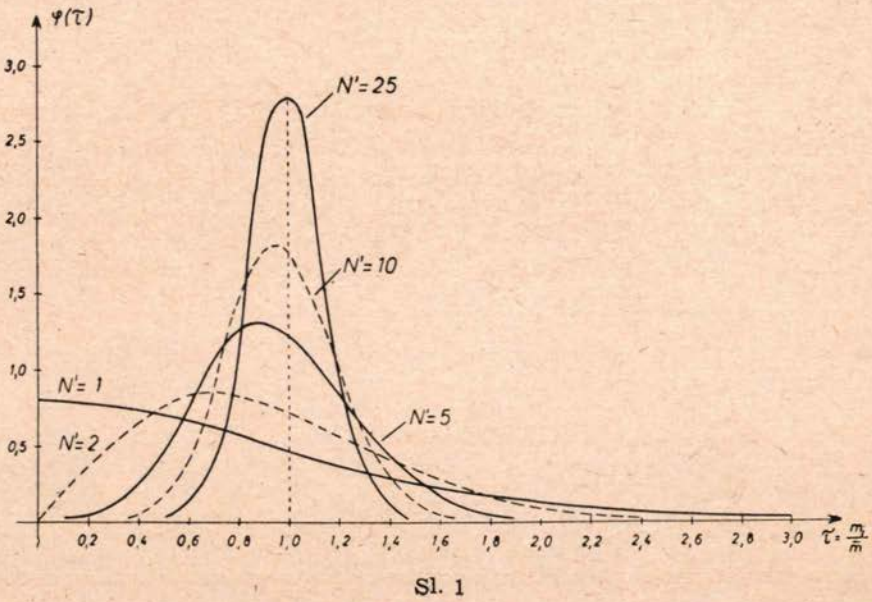
Bilo bi međutim pogrešno mišljenje, da je ocjena tačnosti malog broja mjerenja riješena, ako se kod proračuna uzimaju u obzir formule (6) odnosno (7). Naime i za te formule vrijedi isto što je već rečeno za izraze (3) i (4): one su izvedene uz pretpostavku da je N velik. Nepouzdane su to više što je N manji.

Da bi se dobio bolji uvid u fluktuaciju srednjih pogrešaka m umjesto jedne serije (1), treba promatrati veći broj serija jednako tačnih i nezavisnih opažanja iste veličine x. Sve serije neka imaju jednak broj mjerenja N. Uz oznaku l_{ij} za pojedino opažanje, gdje indeks »j« ukazuje na seriju, mjerenja se mogu pregledno svrstati u slijedeću tabelu

i \ j	1	2	3	—		—	N	Arit. sred. X_i	Sred. pogr. jednog mje- sračunata iz iste serije m_i	Sred. pogr. arit. sredine M_i
1	l_{11}	l_{12}	l_{13}	—		—	l_{1N}	$X_1 = \frac{[l_1 j]}{N}$	$m_1 = \sqrt{\frac{[v^2{}_{1j}]}{N-1}} = \sqrt{\frac{[(X_1 - l_{1j})^2]}{N-1}}$	$M_1 = \frac{m_1}{\sqrt{N}}$
2	l_{21}	l_{22}	l_{23}	—		—	l_{2N}	$X_2 = \frac{[l_2 j]}{N}$	$m_2 = \sqrt{\frac{[v^2{}_{2j}]}{N-1}} = \sqrt{\frac{[(X_2 - l_{2j})^2]}{N-1}}$	$M_2 = \frac{m_2}{\sqrt{N}}$
3	l_{31}	l_{32}	l_{33}	—		—	l_{3N}	$X_3 = \frac{[l_3 j]}{N}$	$m_3 = \sqrt{\frac{[v_{3j}^2]}{N-1}} = \sqrt{\frac{[(X_3 - l_{3j})^2]}{N-1}}$	$M_3 = \frac{m_3}{\sqrt{N}}$
—	—	—	—	—		—	—	—	—	—
—	—	—	—	—		—	—	—	—	—

Za razliku od srednje pogreške m_i sračunate iz jedne serije opažanja, faktična tačnost mjerenja, koja bi se na pr. dobila iz neograničeno velikog broja mjerenja označiti će se sa $\overline{m}$

Grafički prikazani, teoretski oblici raspodjele srednjih pogrešaka m_i poznati su pod nazivom Helmertove krivulje. Zbog mogućnosti kompa-



Sl. 1

racije krivulja kod promjenjivog N, prikladno je analizirati distribucije omjera m_i/m. Slika 1 prikazuje raspodjelu vjerojatnosti varijable $\tau = m_i/m$ za nekoliko različitih N'.* Površine ispod krivulja međusobno su jednake (P = 1). Vjerojatnost da se varijabla τ pojavi u nekom intervalu $\Delta\tau$, na slici je određena površinom ispod krivulje sa bazom $\Delta\tau$.

Pojedine krivulje porastom mjerenja N', moguće je sve bolje aproksimirati odgovarajućom normalnom krivuljom. S druge strane, što je N' manji krivulje su to više asimetrične. Ova okolnost u daljnjoj mjeri osporava vrijednost formula (6), (7) za mali broj mjerenja. Za razdiobu srednjih pogrešaka, ne mogu se naime primjenjivati isti sudovi koji se primjenjuju kod normalne razdiobe. (Asimetrija na pr. ne daje prava da se za granične pogreške uzimaju dvostruke ili trostruke vrijednosti srednjih pogrešaka. Udaljenosti gornje i donje granice od sredine, mogu se znatno razlikovati.)

Zapaža se dalje nejednakost površina lijevo i desno od jedinične vrijednosti τ. Uz pomoć tabelirane distribucije χ^2 i uzevši u obzir da je $m_i/m = \sqrt{\frac{\chi^2}{N'}}$ za pojedine krivulje dobivene su slijedeće površine u procentima:

N'	P $\tau<1$	P $\tau>1$	N'	P $\tau<1$	P $\tau>1$
1	68%	32%	5	58%	42%
2	63%	37%	10	56%	44%
3	61%	39%	25	54%	46%
4	59%	41%	∞	50%	50%

Podaci u tabeli imaju slijedeće značenje: tačnost mjerenja sračunata iz empiričkih podataka po formulama (3) i (4) kod malog N', uglavnom će biti veća od faktično postignute tačnosti. Na pr. kod N = 2, u 63% slučajeva očekuje se veća, a samo u 37% slučajeva manja tačnost od faktične.

χ^2 — tabele, omogućavaju i daljnje uvide. Moglo bi se na pr. konstatirati da će kod N = 1 (dvostruka mjerenja) u 20% slučajeva, sračunata tačnost biti čak 4 puta veća od faktične, itd. itd.

Rezultati gornje diskusije pokazuju da »... geodeti koristeći se klasičnim metodama, kod malog broja opažanja, obično dobivaju neopravdano visoku ocjenu tačnosti za rezultate svojih mjerenja«[1]**

---

* N' na slici označava prekobrojna mjerenja. Prema tome, kod računanja sred. pogreške m_i po izrazu (3): N' = N. Kod računanja po izrazu (4) dakle kao i u tabeli I, N' = N — 1. Slika je preuzeta iz [3] str. 122.

** Na ovom mjestu važno je još jednom napomenuti, da razmatranje u ovom poglavlju isključuje postojanje sistematskih pogrešaka u mjerenjima. Ove pogreške mogu nekad u daleko većoj mjeri »iznakaziti« faktičnu tačnost.

Riješavanje ovog problema počelo je još od samog Gaussa. Tokom vremena, udžbenici s područja teorije pogrešaka donosili su sve više novih izraza za ocjenu tačnosti malog broja mjerenja. Neki od njih kao neprikladni, nisu našli svoju primjenu. Od vrednijih, često se spominju formule Petersa, Helmerta, Rosena, Fechnera, Wellischa, Bonsdorffa.

Neki autori u svojim izvodima polaze i od t. zv. prosječnih pogrešaka. Međutim, ne ulazeći ovdje u daljnja razmatranja raznih predloženih izraza, spomenuti će se samo nekoliko njihovih općih karasteristika.

Največim dijelom nastojalo se modificirati izraze (3) (4) u tom smislu, da i kod malog N, aritmetska sredina razdiobe srednjih pogrešaka, odgovara istinitoj srednjoj pogreški mjerenja m. Kako bi izrazi bili jednostavniji za praktičnu upotrebu, uvode se razne aproksimacije, ili se poneki član daje tabelarno. Sve formule u odnosu na (3), (4), kod malog N daju nešto veće vrijednosti za m. Porastom N, razlike su sve manje.

Iz ovog kraćeg izlaganja nije teško zaključiti, da se upotrebom predloženih formula, uglavnom postiže »ravnoteža« između preniskih i previsokih ocjena, obzirom na faktičnu tačnost. Ovako sračunate srednje pogreške imaju svoje značenje samo za onu seriju mjerenja iz koje su sračunate. Eventualno spajanje pojedinih srednjih pogrešaka u jedinstvenu ocjenu tačnosti, po poznatim zakonima teorije pogrešaka, nije dozvoljeno.

Dosadašnje razmatranje pokazuje da kod ocjene tačnosti malog broja mjerenja, bez daljnjega treba voditi računa o »težini« takve ocjene. Uz pouzdanost parametra m (izrazi (3), (4), mnogo važnije je uključiti u proračune pouzdanost srednje pogreške aritmetske sredine M (izraz (5), jer se jedino tako može ispravno ocijeniti valjanost pojedinog konačnog rezultata mjerenja.

Nagli razvitak matematičke statistike u ovom stoljeću, usko je vezan uz ime Williama Gosseta, koji je svoje radove publicirao pod pseudonimom »Student«. Otkrićem Studentove t — distribucije učinjen je značajan napredak u riješavanju problema malih uzoraka. Tek u poslijeratnoj stručnoj literaturi, nailazi se i na prve radove koji tretiraju mogućnost primjene t — distribucije u ocjeni tačnosti geodetskih mjerenja.

Treba odmah naglasiti, da se pomoću t — razdiobe, mnogo radikalnije prilazi riješavanju problema malog broja mjerenja.

Upotrebljavajući i dalje iste oznake, poznato je da varijabla

$$\frac{x_i - \bar{x}}{\bar{m}/\sqrt{N}} \tag{8}$$

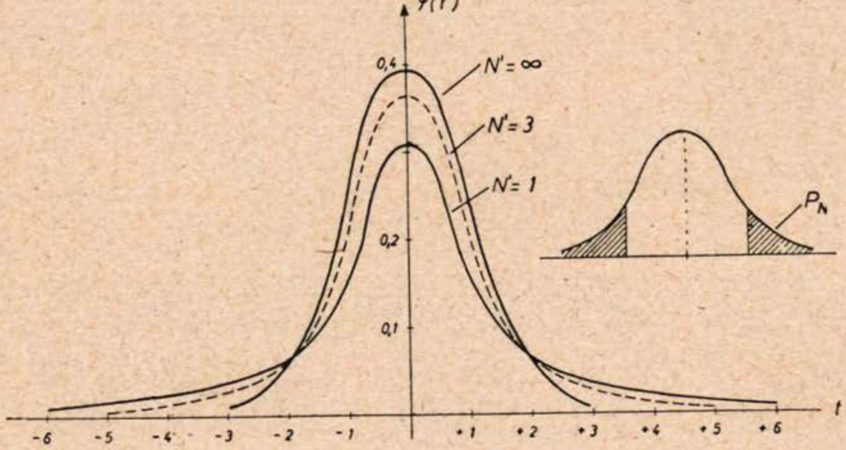
ima normalnu razdiobu vjerojatnosti. Primjenom svojstava normalne distribucije, lako je dakle odrediti granice pouzdanosti nekog rezultata mjerenja x_i, ako je faktična tačnost mjerenja $\bar{m}$ poznata.

Međutim, faktična tačnost $\bar{m}$ gotovo nikad nije poznata. Može se jedino govoriti o manje ili više pouzdanoj srednjoj pogreški m. Mnogo važniji je dakle oblik distribucije varijable

$$t = \frac{x_i - \bar{x}}{m_i / \sqrt{N}} = \frac{x_i - \bar{x}}{M_i} \tag{9}$$

gdje su x_i i m_i dobiveni iz podataka istog niza mjerenja (vidi tabelu I.). Gosset je ustanovio da varijabla t nema više normalnu razdiobu, nego t. zv. Studentovu ili t — razdiobu vjerojatnosti.

Grafički prikaz t — distribucije za neke vrijednosti N' vidi se na slici 2. Razdioba je simetrična i to više se razlikuje od normalne, što je N' manji. Kad $N' \rightarrow \infty$ razdioba prelazi u normalnu.



Sl. 2

Ocjena tačnosti nekog rezultata mjerenja x_i sastoji se u tome da se odredi stupanj pouzdanosti tog rezultata. Potrebno je dakle odrediti interval unutar kojeg će se uz odabrani rizik (na slici 2 P_N) nalaziti istinita vrijednost mjerene veličine $\bar{x}$. Uobičajen rizik je 0,05 ili 0,01, što kod normalne distribucije približno odgovara dvostrukoj (t = 2) odnosno 2,6-strukoj (t = 2,6) srednjoj pogreški. Zadržavajući i kod Studentove razdiobe iste stupnjeve rizika, potrebno je najprije odrediti t (prema argumentu N') pa je prema (9):

$$\bar{x} = x_i \pm t\, M_i \tag{10}$$

Jer je t — distribucija tabelirana u gotovo svim udžbenicima teorije vjerojatnosti, gornji proračun ne pretstavlja nikakve teškoće.

Međutim direktna primjena t-distribucije u ocjeni tačnosti geodetskih mjerenja, kod veoma malog N', dovodi do neprihvativih zaključaka. Najbolje će to ilustrirati jedan primjer:

Neka je sekundnim teodolitom novije proizvodnje izmjeren kut između dvije dobro signalizirane trigonometrijske tačke, koje su od stajališta udaljene cca 2 km (triangulacija IV. reda). Uvjeti za opservaciju su povoljni a kut α je izmjeren u samo dva girusa:

I. **girus** $\quad \alpha_I = 42^0\ 34'\ 22''$

II **girus** $\quad \alpha_{II} = 42^0\ 34'\ 26''$

Za upotrebljen instrument i metodu, ovo su dva posve logična podatka. Sredina i srednja pogreška jesu,

$$\alpha = 42^0\ 34'\ 24''; \qquad m = \sqrt{\frac{[v^2]}{N-1}} = 2,''8; \qquad M = \frac{m}{\sqrt{N}} = 2,''0$$

Ukoliko se kod ocjene tačnosti ne uzme u obzir formula (7), odnosno činjenica da je srednja pogreška dobivena iz svega jednog prekobrojnog mjerenja to na klasični način za pouzdanost izmjerenog kuta α tolerirajući dvostruku (P = 0,95) ili 2,6 struku (P = 0,99) srednju pogrešku izlazi:

$$(P = 0{,}95): \quad \alpha = 42^0\,34'\,24'' \pm 4''$$
$$(P = 0{,}99): \quad \alpha = 42^0\,34'\,24'' \pm 5''$$

Već je rečeno, a i praksa je to dokazala da su ovakve ocjene tačnosti uglavnom previsoke. Međutim, obratno se postiže ocjenom pomoću Studentove distribucije. U tabelama se po argumentu N' = 1 i uz P = 0,95 i P = 0,99 dobiva t = 12,7 i t = 63,7, pa je dalje prema (10):

$$(P = 0{,}99): \quad \alpha = 42^0 34' 24'' \pm 25''$$
$$(P = 0{,}95): \quad \alpha = 42^0 34' 24'' \pm 2'\,07''$$

Na osnovu navedenih uvjeta kod mjerenja i upotrebljenog instrumenta, svaki će praktičar odmah konstatirati da je takva ocjena tačnosti izmjerenog kuta suviše niska. Iz i s k u s t v a je poznato da su rezultati mjerenja ipak mnogo pouzdaniji.

Gornja konstatacija ne odnosi se samo na primjenu t — distribucije u geodeziji. I u matematičkoj statistici, veoma mali uzorak kao reprezentant osnovnog kupa može dovesti do nelogičnih zaključaka. To će se također uočiti iz jednog primjera. — Vrlo često, tamo se ispituju razdiobe raznih slučajnih pojava u prirodi. U svojoj knjizi [2] na str. 124-128 autor navodi primjer ispitivanja zakonitosti razdiobe visina vojnika u Vel. Britaniji. Na str. 214-216 za isti primjer, načinom slučajnog odabiranja (kako se to u mat. statistici često govori) izabran je uzorak od 10 visina. U račun će se ovdje uzeti samo prve dvije visine: H_1 = 168 cm, H_2 = 175 cm. Uz isti postupak kao i ranije, $\overline{H}$ = 171,5, m = 4,9, M = 3,5, i dalje primjenom Studentove distribucije

$$(P = 0{,}95): \quad H = 171{,}5 \text{ cm} \pm 45 \text{ cm}$$
$$(P = 0{,}99): \quad H = 171{,}5 \text{ cm} \pm 223 \text{ cm}$$

Iz ovog malog uzorka (N = 2), za osnovni skup proizlazi slijedeći zaključak: sa vjerojatnoćom 0,95 **prosječna visina** vojnika u Vel. Britaniji iznosi 126,5 cm $< \overline{H} <$ 216,5 cm. Dakle još uvijek postoji vjerojatnost 0,05 da je **prosječna visina** vojnika manja od 126,5 cm odnosno veća od 216,5 cm. Upotrebom vjerojatnosti 0,99 gornja granična visina je 394,5 cm, dok je donja granica negativna tj. — 51,5 cm.

Jasno je da gornje numeričke veličine protivurječe praksi i u sličnim primjerima uobičava ih se okarakterizirati kao »plod matematskog formalizma«. Međutim, ovakvi nelogični rezultati nerijetko dovode pojedince i do krivih predodžbi o vrijednosti matematskih izvoda u teoriji vjerojatnosti. Oportuno je zato na ovom mjestu, ukazati na članak prof. Vranića »O statističkim metodama« [2 str. 297]. Raspravljajući o induktivnom zaključivanju pomoću statističkih metoda autor citira riječi R. A. Fishera: »..... Zaključke do kojih na taj način dolazimo smatramo nesigurnim, ali odavde ne slijedi, da oni nisu matematički strogi zaključci. U teoriji vjerojatnosti naučeni smo na navode, koji su matematički u cjelosti strogi, uključivši tu i pojam vjerojatnosti, koji ako ga prenesemo na promatranja, koja se mogu verificirati, ima značaj nesigurnih navoda«.

Ovdje su namjerno navedeni primjeri sa ekstremno malim brojem opažanja, jer je tako najlakše uočiti »problematičnost« upotrebe t — distribucije kod malog N.
Statističari ovu »problematičnost« riješavaju povećanjem broja elementa u uzorku. Veći broj mjerenja i za geodete je jedan od izlaza iz ove situacije. Međutim, zahtjev za povećanjem tačnosti rezultata, često je ekonomičnije riješiti i manjim brojem kvalitetnijih mjerenja.

Metode istraživanja u mat. statistici kao i ocjena tačnosti izvršenih mjerenja u geodeziji, baziraju se na t. zv. vjerojatnosti a posteriori, tj.

a) prije prvog mjerenja, sve hipoteze o nepoznatoj veličini jednako su vjerojatne

b) za jedno izvršeno mjerenje ne mogu se dati nikakve granice pouzdanosti

c) ponovljeno mjerenje iste veličine tek je prvi (i zato još uvijek grubi) podatak za ocjenu tačnosti

Kod ocjene tačnosti a posteriori na kalkulira se dakle sa nikakvim podacima eventualnog prethodnog iskustva (planiranja) o nekoj vrsti mjerenja. — Kad je u prvom primjeru spomenuto da je kut mjeren sekundnim teodolitom novog tipa, već je time poznata serija podataka koji karakteriziraju takav instrument (povećanje, oštrina viziranja, tačnost podjele, osjetljivost libela itd.) Uz ostale navedene uvjete kod opservacije, svi ovi podaci povezuju se u izvjesnu ocjenu tačnosti a priori.

Grubo govoreći, kod malog N za ocjenu a priori stoji na raspolaganju obično veći broj podataka nego za ocjenu a posteriori. Zato se ocjeni a priori daje i veća »težina« dok je ocjena a posteriori, zbog manjeg broja podataka sa kojima se raspolaže, suviše gruba i nesigurna.

Unatoč gornjih primjedbi, kako se iz stručne literature razabire, neki autori stoje na stanovištu oportunosti upotrebe Studentove razdiobe u geodeziji i kod dosta ograničenog N. Prof. Hristov [1] predlaže kod toga granice pouzdanosti $P = 0{,}90$.*

U prilog upotrebe Studentove distribucije i kod dosta ograničenog N govori jedino činjenica, da je bolje »podcijeniti«, nego (služeći se klasičnim ocjenama) »precijeniti« rezultate izvjesnih mjerenja. Ne treba naime posebno isticati, da previsoka ocjena tačnosti, može nekada dovesti do veoma ozbiljnih posljedica.

---

* Odustajući od izjava za područje distribucije između $0{,}90 < P < 1{,}00$, time se u velikoj mjeri ublažava »nelogičnost« ovakove ocjene pouzdanosti. Najbolje se to vidi iz tabele III za varijablu t kod $P = 0{,}90$, uporedbom sa $P = 0{,}99$.

Kako prikazuje slika 2, Studentova razdioba se u početku, porastom N' vrlo brzo mijenja. Granice pouzdanosti naglo se sužavaju. Bolje se to vidi iz donje tabele za varajablu t, uzevši već upotrebljavane granice 0,95, 0,99, i granicu 0,90.

N' \ P	0,90	0,95	0,99	N' \ P	0,90	0,95	0,99
1	6,31	12,71	63,66	10	1,81	2,23	3,17
2	2,92	4,30	9,92	20	1,72	2,09	2,85
3	2,35	3,18	5,84	30	1,70	2,04	2,75
4	2,13	2,78	4,60	100	1,66	1,98	2,63
5	2,02	2,57	4,03	∞	1,65	1,96	2,58

Podaci za t, u posljednjem redu tabele kod N' = ∞ ujedno su granične vrijednosti normalne razdiobe.

Ispitivanja u pogledu praktične primjene t — distribucije za ocjenu pouzdanosti geodetskih mjerenja, uglavnom su pokazala veoma dobru saglasnost teorije i prakse za slučajeve kad je približno N' > 4—5. Ocjene su nešto niže, ali realnije od klasičnih ocjena u geodeziji. **Upotrebom Studentove distribucije, problem ocjene tačnosti malog broja mjerenja, do donje granice N' = 4—5 može se dakle smatrati riješenim.** Sa takvom konstatacijom, slaže se velik broj specijalista s područja teorije pogrešaka. Praktički bi se ova distribucija upotrebljavala u rasponu 4 — 5 < N' < 20 — 30. Kod još većeg N' od 20 — 30, zbog neznatne razlike i dalje bi se upotrebljavala normalna razdioba.

Ocjene pouzdanosti za N' < 4 — 5 uslijed veoma slučajnih i netačnih srednjih pogrešaka nemaju veće praktične vrijednosti. Ovdje pretstoje daljnja istraživanja. Najnoviji interesantan prilog u tom pravcu, jest rad prof. Hausbrandta [4]. Uvodno naime nije spomenuto da izlaganje u ovom članku polazi od predpostavke da se slučajne pogreške mjerenja pokoravaju normalnoj razdiobi. Prof. Hausbrandt u svojoj radnji polazi od binomijalne razdiobe, pa za N = 2, dobiva značenja za t, koja su u vrlo dobroj saglasnosti sa praksom.

LITERATURA:

1. Hristov: Klasičeskie i sovremennie metodi ocenki točnosti nabljudenij. Geodezija i kartografija No 1/1958.
2. Vranić: Vjerojatnost i statistika. Zagreb 1958.
3. Böhm: Vyrovnávací počet, Část I. Theorie chyb. Praha 1958.
4. Hausbrandt: Einige bemerkungen über die Verwendungsmöglichkeit der errungenschaften mathematischer Statistik zur abschätzung der Genauigkeit von Ingenieurmessungen. Warszawa 1962.