SAVREMENE METODE OCENE TAČNOSTI KONAČNO USVOJENIH REZULTATA

KRUNISLAV MIHAILOVIĆ dipl. inž. — Beograd

1 — *Uvod.* U geodeziji neposrednim merenjem ili indirektnim putem dolazimo do vrednosti traženih veličina. Usled neminovnih grešaka nismo u mogućnosti da odredimo stvarne vrednosti traženih veličina, već se zadovoljavamo sa približnim vrednostima, koje su u funkciji rezultata dobivenih merenjem. Konačno usvojene vrednosti (približne vrednosti) najbolje će reprezentovati tražene veličine, ako se podaci merenja obrade po metodi najmanjih kvadrata. Reprezentativnu moć konačno usvojenih rezultata daje ocena tačnosti.

Ocenom tačnosti dobivenih rezultata bavi se teorija grešaka, koja pretpostavlja da imamo neograničeni broj merenja za jednu veličinu. Međutim, u praksi broj merenja je ograničen i veoma mali. Ovu činjenicu nužno je uzeti u obzir kod ocene tačnosti konačno usvojenih rezultata.

Metodama ocene tačnosti konačno usvojenih rezultata iz malog broj merenja bavi se matematička statistika. Sve te metode baziraju na teoriji verovatnoće i daju uopštene i ne apsolutno tačne rezultate. Međutim i pored toga, ocena tačnosti na osnovu savremenih mogućnosti matematičke statistike daleko daje realniju predstavu o postignutoj tačnosti.

U praksi se još i dalje u našoj zemlji koristi klasična ocena tačnosti koja daje lažnu predstavu o postignutoj tačnosti, odnosno uvek se dobija utisak o većoj tačnosti nego što je u stvarnosti. Ovo može imati veoma štetnih posledica kod radova visoke tačnosti a naročito kod radova iz primenjene geodezije.

Zato je nužno da se kod ocene tačnosti vodi računa o broju merenja. Na taj način možemo doći do graničnih vrednosti traženih veličina i stepena pouzdanosti srednje kvadratne greške koja će realnije da karakteriše tačnost tretiranih problema.

Iako savremene i klasične metode imaju zajedničku teorisku osnovu (normalni raspored) između njih postoje bitne razlike.

Suštinska razlika između klasične i savremene teorije jeste u određivanju funkcionalne zavisnosti između intervala pouzdanosti* i intervala verovatnoće. Kod klasične teorije interval pouzdanosti je u direktnoj zavisnosti od intervala verovatnoće. Svakom intervalu verovatnoće odgovaraju korespondentne vrednosti intervala pouzdanosti i obrnuto. Međutim, kod savremene teorije interval pouzdanosti i interval verovatnoće povezani su još jednom vrednošću koja se naziva broj stepeni slobode.** Znači broj stepeni slobode ima uticaja na veličinu intervala pouzdanosti pri fiksnoj vrednosti verovatnoće i obrnuto, pri fiksnoj vrednosti intervala pouzdanosti, interval verovatnoće dobija vrednost u zavisnosti od broja stepeni slobode. Ovakva funkcionalna zavisnost između intervala pouzdanosti i intervala verovatnoće preko broja stepeni slobode daje realnije zaključke o tretiranim problemima.

Pored velikog značaja savremenih metoda u određivanju intervala pouzdanosti one mogu veoma efikasno da se primene, za upoređenje kvaliteta dveju metoda rada, za upoređenje kvaliteta dveju mreža, za upoređenje kvaliteta dvaju instrumenata,

* Interval pouzdanosti odgovara terminu granične greške ili dozvoljenog odstupanja.

** Broj stepeni slobode odgovara broju suvišnih merenja.

za otkrivanje i ustanovljavanje vrednosti sistematskih grešaka (dispersiona analiza), za ocenu tačnosti kada su slučajne veličine u korelativnom odnosu, itd.

Mogućnosti primene savremenih metoda kod obrade podataka su veoma široke i raznovrsne.

U ovome radu biće prikazan samo jedan deo mogućnosti koje pruža matematička statistika. Teoriska razmatranja biće ilustrovana primerima iz naše prakse.

Napominjemo da je u ovome radu pretpostavljeno da su greške međusobno nezavisne i da su isključivo slučajnog karaktera.

Autor je koristio veoma obilnu literaturu, naročito na ruskom jeziku. Pošto ima pojmova za koje u geodetskoj literaturi još nije utvrđena definitivna terminologija, korišćeni su postojeći termini i notacije iz naše i inostrane literature.

2 — *Svojstva slučajnih grešaka*

Na rezultate geodetskih merenja neminovno dejstvuju više faktora, koji prouzrokuju greške, kao na primer: greške geodetskog pribora, personalne greške, greške radnih uslova itd. Svaki od ovih faktora dejstvuje nezavisno i najčešće stvaraju greške beznačajne vrijednosti. Pojedinačni faktori (instrumentalne greške i druge) nastaju kao zbir velikog broja elementarnih po vrijednosti veoma malih grešaka.

Sumarno dejstvo svih faktora je odstupanje pojedinih vrijednosti dobivenih merenjem x_i do stvarne vrednosti A.

$$\varepsilon_i = x_i - A \tag{1}$$

Vrednosti ε_i nazivamo stvarnom ili istinitom greškom, koja nastaje kao algebarski zbir velikog broja sićušnih elementarnih grešaka.

$$\varepsilon_i = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n + \ldots = \Sigma\Delta_i \tag{2}$$

Ovakav tretman grešaka je veoma značajan za primenu teoretskih modela* kod ocene tačnosti i određivanja intervala pouzdanosti konačno usvojenih rezultata.

Pojedinačne elementarne greške Δ_i su neznatne veličine, ali njihovo sumarno dejstvo je značajno, pa je neophodno o njima voditi računa.

Neka smo u cilju određivanja neke veličine A uzeli niz nezavisnih merenja x_1, x_2. .. x_n. Zbog navedenih razloga ove će se vrednosti međusobno razlikovati. One će se nalaziti oko stvarne vrednosti merene veličine A. Stepen njihovog rasipavanja zavisiće od tačnosti samih merenja.

Nikada se unaprijed ne može odrediti koliko će iznositi, recimo i-to merenje. Znači, vrednost svakog merenja nastaje slučajno. Prema tome rezultate merenja $x_1, x_2, \ldots x_n$ možemo smatrati slučajnim veličinama, odnosno odgovarajuće istinite greške $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$, slučajnim greškama.

Iako pojedinačne slučajne greške ε^i ne pokazuju nikakvu zakonitost one se mogu odrediti sa stanovišta računa verovatnoće ako nam je poznat zakon kome one pripadaju.

Osnovni zakon slučajnih grešaka proističe iz računa verovatnoće. Vrednost verovatnoće je broj između O i 1 uključujući i granice, bez obzira o rasporedu kome slučajne veličine odn. slučajne greške pripadaju.

$$0 \leq P(\varepsilon) \leq 1$$

Osnovno svojstvo slučajnih grešaka je da se u velikom broju poništavaju

$$M^* [\varepsilon] = \lim_{n \to \infty} \frac{[\varepsilon]}{n} = 0 \tag{3}$$

i da po svojoj apsolutnoj vrednosti nikada ne mogu biti veće od unapred proizvoljno usvojenog broja Δ

---

* teoretski model naziva se raspored ili zakon kome slučajne veličine pripadaju.

* M-simbol za matematičko očekivanje ili nadu.

3 — *Srednja vrednost i dispresija slučajne veličine*

Rekli smo da rezultate geodetskih merenja možemo smatrati slučajnim veličinama. Svaka slučajna veličina X koja se može realizovati preko niza merenja x_1, $x_2, \ldots x_n$ sa odgovarajućim verovatnoćama $p_1, p_2 \ldots p_n$ može se definisati uglavnom dvema brojnim karakteristikama:

— matematičko očekivanje ili nada (srednja vrednost)
— dispersija ili varijansa*

Matematička nada je aritmetička sredina iz neograničenog broja slučajnih veličina.

Za diskretan niz merenja matematička nada slučajne veličine X jednaka je

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{4}$$

p_i je verovatnoća da će slučajna promenljiva X uzeti vrednost x_i
za kontinuirani niz biće

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \tag{5}$$

f(x) je funkcija gustine rasporeda slučajne veličine X.

f(x) dx je verovatnoća da će slučajna promenljiva X uzeti vrednost iz intervala dx.

Dispersija je aritmetička sredina iz neograničenog broja kvadrata slučajnih grešaka. Po definiciji jednaka je kvadratu razlike slučajne veličine X i njene matematičke nade M[x].

Za diskretan niz

$$D[X] = \overline{m}^2 = M(x - M[x])^2 \tag{6}$$

Za kontinuirani niz

$$D^{**}[X] = \overline{m}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - M[X])^2 f(x) dx \tag{7}$$

Odnosno za slučajne greške ε^i

$$D[\varepsilon] = \overline{m}^2 = M\ \varepsilon - M[\varepsilon])^2 = M[\varepsilon^2] \tag{8}$$

Dispersija je ustvari drugi centralni moment tj.

$$\overline{m}^2 = \mu_2$$

Matematička nada slučajne greške jednaka je nuli.

$$M[x] = 0$$

Kvadratni koren dispersije je standardna devijacija koja bi po analogiji sa teorijom grešaka odgovarala teoretskoj srednjoj kvadratnoj grešci.

$$\overline{m} = \sqrt{D[X]} \tag{9}$$

Realna ocena tačnosti može se izvršiti samo ako nam je poznata standardna devijacija $\overline{m}$ Teoretski se ona može odrediti ako imamo beskonačan broj merenja

$$\overline{m}^2 = \lim_{n \to \infty} \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} \tag{10}$$

---

* Dispresija je u stvari kvadrat teoriske vrednosti srednje kvadratne greške.
** D — simbol za dispersiju.

Međutim u praksi raspolažemo sa konačnim brojem merenja, pa stoga, strogo uzevši vrednost standardne devijacije $\bar{m}$ nije nam nikada poznata. Ona je u potpunosti definisana i određena za svaku vrstu merenja. Njena vrednost pre svega zavisi od metode rada a zatim od svih činioca koji u procesu merenja stvaraju slučajne greške i utiču na dobijanje konačnih rezultata. (instrumenata, operatora, spoljnih uslova itd.). Poznavanje njene vrednosti bilo bi od neocenjive koristi za pravilnu interpretaciju i obradu rezultata merenja.

Poznato je da se u geodeziji mere dve veličine, uglovi i dužine. Putem geodetskih merenja mi nastojimo da dođemo do stvarnih vrednosti ovih veličina. To redovno nije moguće. U praksi se zadovoljavamo sa vrednostima koje po teoriji najbolje reprezentuju stvarne vrednosti traženih veličina.

U cilju određivanja veličine A uzeli smo niz nezavisnih merenja $x_1, x_2 \ldots x_n$. Najbolju vrednost za traženu veličinu A dobićemo ako rezultate merenja obradimo po metodi najmanjih kvadrata. Pri tome pretpostavljamo da su greške merenja slučajnog karaktera i da se pokoravaju normalnom rasporedu (Gauss-Laplasov zakon). U tom slučaju prosta odn. opšta aritmetička sredina daće najverovatniju vrednost tražene veličine A (obzirom na niz merenja).

Aritmetička sredina jednaka je

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Ako su merenja iste tačnosti ili

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

kada su merenja različite tačnosti

p_i — je težina pojedinih merenja

$$p_i = \frac{K}{m_i^2}$$

k — proizvoljna konstanta

Matematičke nade pojedinih merenja u nizu međusobno su jednake i odgovaraju stvarnoj vrednosti tražene veličine A.

$$M[x_1] = M[x_2] = \ldots\ldots M[x_n] = A$$

Odnosno, očigledno matematička nada aritmetičke sredine daje takođe istinitu vrednost A

$$M[\bar{x}] = M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right] = A$$

odnosno

$$M[\bar{x}] = M\left[\frac{1}{\sum_i p_i} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right] = A$$

Matematička nada je konstantna veličina, prema tome ne može imati raspored. Međutim, aritmetička sredina dobivena iz niza slučajnih veličina, takođe predstavlja slučajnu veličinu. Ona se kao i pojedina merenja nikada unapred ne može predskazati, ali se može odrediti u verovatnoći, ako nam je poznat raspored kome ona pripada. Pogrešno je mišljenje da aritmetička sredina predstavlja najverovatniju vrednost koja je najbliža stvarnoj vrednosti A. Aritmetička sredina je slučajna promenljiva koja najbolje reprezentuje dati niz merenja. No to ne znači da ako uzmemo drugi niz merenja za određivanje iste tražene veličine A nećemo dobiti drugu vrednost aritmetičke sredine koja će biti bliža stvarnoj vrednosti A.

Aritmetička sredina u stvari daje procenu stvarne vrednosti tražene veličine. Kada broj merenja $n \rightarrow \infty$ aritmetička sredina teži stvarnoj vrednosti A.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x} = A$$

Kao što se može dati procena stvarne vrednosti merene veličine, može se iz podataka merenja jedne veličine više puta, dati mera rasipanja pojedinih vrednosti merenja oko tražene veličine, odn. može se odrediti srdnja kvadratna greška pojedinih merenja

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} \tag{11}$$

Ako raspolažemo istinitim greškama
ili

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \tag{12}$$

Ako imamo odstupanja od aritmetičke sredine

$$v_i = x_i - \bar{x}$$

Srednja kvadratna greška određena iz podataka merenja takođe predstavlja slučajnu veličinu čija se vrednost unapred ne može predvideti. Ona se može odrediti sa gledišta računa verovatnoće. Kada broj elemenata iz kojih je srednja kvadratna greška sračunata neograničeno raste onda ona teži standardnoj devijaciji $\bar{m}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m = \bar{m}$$

Formule (11) i (12) masovno se koriste u geodetskoj praksi za ocenu tačnosti dobivenih rezultata, a pri tome ne vodi se računa o broju merenja iz kojih je sračunata srednja kvadratna greška. Kao posledica ovoga uvek se dobija utisak o većoj tačnosti. Zato je nužno da se kod ocene tačnosti uzme u obzir pouzdanost srednje kvadratne greške određene iz malog broja merenja.

Kada imamo mali broj merenja za računanje srednje kvadratne greške umesto formule (11) i (12) treba koristiti sledeće formule

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)} \tag{13}$$

odnosno

$$m^{*} = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}\right)} \tag{14}$$

To praktično znači da srednja kvadratna greška ima svoju grešku

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}} \tag{15}$$

odnosno

$$m^{*}_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} \tag{16}$$

gde je m srednja kvadratna greška sračunata po formuli (11) od. (12).

---

* Formule (14) i (16) mogu se primeniti kod ocene tačnosti posrednih i uslovnih merenja, samo onda umesto (n-1) imamo (n — q) odnosno r.

Očigledno pouzdanost srednje kvadratne greške zavisi od broja merenja n. Pouzdanost je veća ukoliko je greška srednje kvadratne greške sračunata po formuli (15) od. (16) manja i obrnuto. Sada nije teško uočiti da ocena tačnosti iz malog broja merenja određena po formuli 11 i 12 uvek daje lažnu predstavu o postignutoj tačnosti, odnosno daje ulepšane rezultate.

4 — Zakoni slučajnih veličina

U idealnom slučaju između slučajne veličine X i odgovarajuće verovatnoće p postoji funkcionalna veza koja u opštem obliku glasi

$$p = f(x) \qquad (17)$$

U praksi je skoro nemoguće naići na zakon definisan jednačinom (17), koji ima opšti značaj i može se primeniti na svaki realan niz slučajnih veličina. Zato se služimo aproksimacijama odn. za diskretan niz slučajnih veličina usvajamo teoretski model koji im je najbolje prilagođen.

Funkcja gustine rasporeda označava verovatnoću kada će slučajna promenljiva X uzeti vrednost x_i

$$P_i = (X = x_i)$$

Verovatnoća da se slučajna promenljiva X nalazi u datom intervalu $[x_1, x_2]$, biće

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

ili ako fiksiramo jednu vrednost

$$P(X \leq x) = F(x)$$

gde je X slučajna promenljiva, a x proizvoljan broj

Oblik funkcije gustine rasporeda f(x) zavisi od teoretskog modela kome pripadaju slučajne veličine. Ima više teoretskih modela (rasporeda). U ovom radu biće tretirani svi oni koji su interesantni za ocenu tačnosti rezultata merenja.

5 — Određivanje graničnih vrednosti aritmetičke sredine i srednje kvadratne greške

Videli smo ranije da se vrednost slučajne veličine odn. slučajne greške ne može nikada unapred predvideti. One se mogu odrediti samo sa gledišta računa verovatnoće, usvajanjem teoriskog modela koji najbolje aproksimira raspored verovatnoća kome pripadaju slučajne greške.

Ako se slučajne greške pokoravaju nekom zakonu, čiji nam je analitički izraz poznat onda možemo tvrditi da će se one naći u određenom intervalu sa odgovarajućom verovatnoćom i obrnuto. Znači da su (interval) u kome je moguće da se nađe slučajna greška ε_i i verovatnoća da će se ona u tom intervalu naći definisani u obliku funkcije. Upravo ta funkcionalna veza naziva se raspored.

. . . — . . .

Normalni raspored ili Gauss-Laplasov zakon ima veoma značajnu ulogu u teoriji verovatnoće uopšte, a posebno u teoriji grešaka.

Ako je funkcija gustine rasporeda data u obliku

$$f(x_1) = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x - A)^2}{2\overline{m}^2}} \qquad (18)$$

onda za slučajnu veličinu X kažemo da pripada normalnom rasporedu. U obliku simbola obično se piše $X \in N(A, m)$. Kao što vidimo pored slučajne veličine u formuli (18) figurišu dva parametra sa kojima smo se već upoznali (A — matematička nada; (m — standardna devijacija).

Za slučajne greške po analogiji biće

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\overline{m}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\overline{m}^2}} \tag{19}$$

Ako obrazujemo količnik

$$t = \frac{x - A}{\overline{m}}$$

onda dobijemo standardizovan raspored sa funkcijom gustine rasporeda u obliku

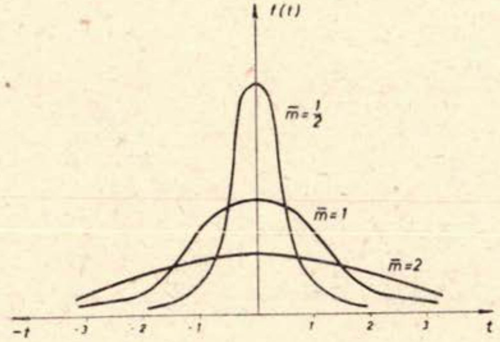
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{20}$$

odnosno

$$t \in N(0,1)$$

Nije teško primetiti da je

$M[t] = O \quad D[t] = 1$



SLIKA 1

Grafički prikaz formule (20) daje poznatu Gauss-ovu krivu (slika 1). Na slici je prikazan oblik Gausove krive u zavisnosti od standardne devijacije $\overline{m}$

Ako u formuli (19) zamenimo

$$\overline{m} = \frac{1}{h\sqrt{2}}$$

dobijamo Gauss-Laplasov zakon koji daje verovatnoću pojave slučajnih grešaka u zavisnosti od njihovih veličina

$$f(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\varepsilon^2 h^2}$$

gdje je h mera tačnosti.

Slučajne greške kao rezultante više komponenata saglasno centralnoj graničnoj teoremi Ljapunova teže da zauzmu normalni raspored kada broj elemenata u formuli (2) neograničeno raste. Pošto se za konačnu vrednost usvaja aritmetička sredina, onda će slučajne veličine odnosno slučajne greške tim pre da pripadaju normalnom rasporedu.

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\bar{x}-A)^2}{2m^2_{\bar{x}}}} \tag{21}$$

odnosno

$$f(\bar{\varepsilon}) = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\bar{\varepsilon}^2}{2m^2_{\bar{x}}}} \tag{22}$$

Sa izvesnim aproksimacijama možemo usvojiti normalni raspored kao teoretski model za raspored verovatnoća slučajnih grešaka. Naime, možemo da umesto diskretnog rasporeda verovatnoća slučajnih grešaka koristimo kontinuirani raspored gde slučajne greške mogu uzimati sve vrednosti na realnoj osi, od $-\infty$ do $+\infty$

Verovatnoća da će se slučajna promenljiva nalaziti u intervalu

$$[(A - t_\alpha m_{\bar{x}}), \quad (A + t_\alpha m_{\bar{x}})] \text{ biće}$$

$$P(A - t_\alpha m_{\bar{x}} \leq \bar{x} \leq A + t_\alpha m_{\bar{x}}) = \varnothing(t) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t\alpha}^{+t\alpha} e^{-\frac{t^2}{2}} . dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{t\alpha} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{23}$$

Vrednost $\varnothing$ (t) uzimamo iz tablice 1 po argumentu $t\alpha$. ili obrnuto ako je data verovatnoća p, onda dobijamo iz tablice $t\alpha$.

Granična vrednost ili interval pouzdanosti u kome će se nalaziti istinita vrednost tražene veličine sa odgovarajućom verovatnoćom biće

$$\bar{x} - t_\alpha m_{\bar{x}} \leq A \leq \bar{x} + t_\alpha m_{\bar{x}} \tag{24}$$

U dvojnoj nejednačini (24), $\bar{x}$ računamo iz podataka merenja, $m_{\bar{x}}$ pretpostavljamo da nam je poznato, a $t\alpha$ odn. p biramo proizvoljno. Verovatnoća p je u funkciji intervala $[-t\alpha, t\alpha]$. Ukoliko je interval veći i verovatnoća je veća.

$P(/t/ \leq 1) = 0{,}6827$
$P(/t/ \leq 2) = 0{,}9545$
$P(/t/ \leq 3) = 0{,}9973$

Za određivanje graničnih grešaka kod geodetskih radova uzima se $t\alpha = 3$ ili $t\alpha = 2$ u zavisnosti od preciznosti radova.

Primer 1. Uzmimo primer iz knjige Račun izravnanja od Ing. Nikole Svečnikova (str. 50). Ugao A meren je po Srajberovoj metodi u 8 girusa.

Aritmetička sredina je $\bar{x} = 69^\circ\ 07'\ 52'',96$.
Srednja kvadratna greška pojedinih merenja $m = 1'',52$.
Srednja kvadratna greška aritmetičke sredine $M = 0'',54$.
Ako usvojimo da slučajne greške pripadaju normalnom rasporedu tj.

$$\bar{x}\,\mathrm{EN}(A, m_{\bar{x}})$$

onda možemo da odredimo granice u kojima će se nalaziti merena vrednost A sa proizvoljno izabranom verovatnoćom p pod uslovom da nam je poznata standardna devijacija.*

---

* Pretpostavljamo da je srednja kvadratna greška aritmetičke sredine jednaka standardnoj devijaciji.

Ako za verovatnoću usvojimo p = 0,95 onda možemo tvrditi da će se istinita vrednost uglova nalaziti u granicama

$$\bar{x} - t_\alpha M \leq A \leq \bar{x} + t_\alpha M$$

Vrednost t_α uzimamo iz tabele I ($P = 0{,}95$, $t_\alpha = 1{,}96$), pa će interval pouzdanosti biti

$$\bar{x} - 1{,}96M \leq A \leq \bar{x} + 1{,}96M$$

odnosno

$$69^0 07' 54'',02 \leq A \leq 69^0 07' 51'',90$$

ili u drugom obliku

$$P(|\bar{x} - A| > t_\alpha M = 1'',06) = 0{,}05$$

Verovatnoća da će modul razlike $|\bar{x} - A|$ preći vrednost 1,"06 iznosi 5%.

. . . — . . .

Interval pouzdanosti može se odrediti na navedeni način samo onda kada nam je poznata standardna devijacija odn. kada možemo smatrati da su standardna devijacija i srednja kvadratna greška adekvatne po svojim vrednostima. Praktično ovaj se postupak može primeniti ako je broj merenja iz kojih je srednja kvadratna greška sračunata veći od 20.

Ako je $n < 20$ što je redovno slučaj kod geodetskih radova onda se interval pouzdanosti ne može odrediti na navedeni način.

Kada standardna devijacija nije poznata onda uzimamo njenu nepristrasnu ocenu $\frac{1}{n-1} m^2$ jer je

$$M\left[\frac{n}{n-1} \cdot m^2\right] = \bar{m}^2$$

Koristeći ovo svojstvo za slučajnu promjenljivu t dobijamo

$$t = \frac{\bar{x} - A}{\bar{m}_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - A}{\bar{m}} \sqrt{n} = \frac{\bar{x} - A}{m\sqrt{\frac{n}{n-1}}} \sqrt{n} = \frac{\bar{x} - A}{m} \sqrt{n-1}$$

Slučajnu promjenljivu t izrazili smo u funkciji poznatih veličina. Samo je A nepoznato. Upravo to se i traži.

Slučajna promjenljiva t pripada »Student«-ovom rasporedu sa n-1 broja stepeni slobode. Ovaj raspored prvi je definisao Gosset i publikovao svoj rad pod pseudonimom »Student«.

Funkcija gustine rasporeda definisana je u obliku

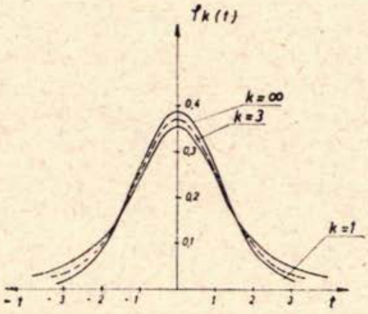
$$\varphi_K(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi K}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{K+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{K}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{K}\right)^{-\frac{K+1}{2}} \tag{25}$$

i ne zavisi od matematičke nade i dispersije. $\Gamma\left(\frac{K+1}{2}\right)$ je gama funkcija.

Verovatnoća da će se slučajna promenljiva t nalaziti u intervalu $[-t_\alpha, t_\alpha]$

$$P(|t| \leq t_\alpha) = P(-t_\alpha \leq t \leq t_\alpha) = F_K(t) =$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{K+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi K}\,\Gamma\left(\frac{K}{2}\right)} \int_{-t_\alpha}^{t_\alpha} \left(1+\frac{t^2}{K}\right)^{-\frac{K+1}{2}} . dt \tag{26}$$



SLIKA 2

Grafički prikaz funkcije φ_K (t) dat je na slici 2. Oblik funkcije φ_K (t) zavisi od broja stepeni slobode k. Kada k teži beskonačnosti onda funkcija φ_K (t) teži normalnom rasporedu

$$\lim_{K \to \infty} \varphi_K(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Kada je k > 20 možemo za slučajno promjenljivo t smatrati da pripada normalnom rasporedu sa beznačajnim aproksimacijama.

Verovatnoća da će se slučajna promenljiva t nalaziti u intervalu $[-t_\alpha, t_\alpha]$

$$P\left(-t_\alpha \leq \frac{\bar{x}-A}{\bar{m}}\sqrt{n-1} \leq t_\alpha\right) = \int_{-t_\alpha}^{t_\alpha} \varphi_K(t)\,dt = 2\int_0^{t_\alpha} \varphi_K(t)\,dt$$

Rešenjem dvojne nejednačine

$$-t_\alpha \leq \frac{\bar{x}-A}{\bar{m}}\sqrt{n-1} \leq t_\alpha$$

dolazi se do granice pouzdanosti tražene veličine A sa odgovarajućom verovatnoćom p.

$$\bar{x} - \frac{t}{\sqrt{n-1}} \cdot m \leq A \leq \bar{x} + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n-1}} . m \tag{27}$$

Vrednosti x i m računaju se iz podataka merenja. Veličinu t_α dobijamo iz tablice I, u zavisnosti od proizvoljno usvojene verovatnoće p i broja stepeni slobode k (k=n-l), Ako rezultati merenja pripadaju normalnom rasporedu onda možemo tvrditi sa verovatnoćom p da će se tražena veličina A nalaziti u intervalu definisanom nejednačinom (27).

PRIMER 2. Primenu »Student«-ovog rasporeda ilustrovaćemo na podatke iz primera 1.

Aritmetičke sredine

$$\bar{x} = 69^0 07' 52'',96$$

Srednja kvadratna greška pojedinih merenja

$$m = 1'',52$$

Broj merenja (girusa) $n = 8$

Broj stepeni slobode $k = n\text{-}1 = 7$

Interval pouzdanosti u kome će se nalaziti istinita vrednost sa proizvoljno usvojenom verovatnoćom p biće

$$\bar{x} - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n-1}} m \leq A \leq \bar{x} + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n-1}} m$$

Neka je $p = 0{,}95$. Iz tablice II po argumentu p i k dobijamo $t_\alpha = 2{,}36$. Kada poznate vrednosti uvrstimo u navedenu nejednakost dobijamo

$$69^0\ 07'\ 54'',\ 32 \leq A \leq 69^0\ 07'\ 51'',\ 60$$

Dakle možemo tvrditi sa sigurnošću od 95% da će tražena veličina nalaziti u naznačenom intervalu.

Iz istih podataka, samo drugim tretmanom došli smo do intervala pouzdanosti koji je znatno širi nego kod primera 1, odnosno interval pouzdanosti uvećan je za 28%. Sa istom verovatnoćom $p = 0{,}95$ za interval pouzdanosti dobijamo dve različite vrednosti. Nužno se postavlja pitanje kojoj vrednosti treba više verovati? Nedvosmisleno intervalu pouzdanosti koji se dobija uzimajući u obzir broj merenja, jer realnije odražava stvarno stanje.

Očigledne su prednosti određivanja intervala pouzdanosti primenom »Student«-ovog rasporeda, jer ne zahteva poznavanje standardne devijacije $\bar{m}$. Međutim, primena »Student«-ovog rasporeda ima jedan veoma ozbiljan nedostatak koji mu znatno ograničava svestranu primenu. Iako je besprekoran u teoretskom pogledu za suviše mali broj merenja daje rezultate koje praksa i iskustvo demantuju. Obzirom da se u geodeziji za jednu veličinu uzima najčešće dva ili tri merenja ovaj se raspored u tom slučaju ne bi mogao primeniti jer daje besmislene rezultate koji nemaju realnu osnovu. To nije teško proveriti. I pored izvesnog ograničenja u pogledu mogućnosti primene, »Student«-ov raspored može se koristiti u geodetskoj praksi. On se može uvek primeniti kada o tretiranom problemu nemamo nikakve informacije ili kada je broj stepeni slobode četiri i više ($k \geq 4$).

»Student«-ov se raspored u nekim slučajevima može vrlo efikasno primeniti za ispitivanje jednakosti matematičkih nada dvaju nezavisnih niza merenja, odnosno na ustanovljavanju prisustva sistematskih grešaka.

Poznato je da srednja kvadratna greška ima svoju grešku koja se može odrediti po formuli (15) odnosno (16). Znači pouzdanost srednje kvadratne greške je ograničena u zavisnosti od broja merenja.

Koristeći činjenicu da su srednje kvadratne greške slučajne veličine možemo odrediti interval pouzdanosti u kome će se one nalaziti.

Srednje kvadratne greške $m^2_1, m^2_2 \ldots m^2 n$ pripadaju hi-kvadrat (χ^2) rasporedu.

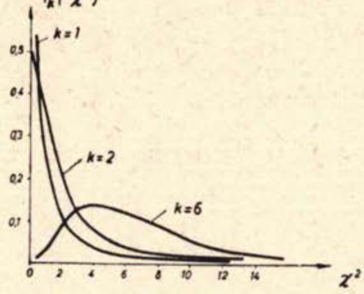
χ^2 nazivamo nenegativnu slučajnu promenljivu koja se dobija kao algebarski zbir kvadrata nezavisnih normiranih normalnih veličina $y_1, y_2 \ldots y n$.

$$\chi^2 = y^2_1 + y^2_2 + \ .\ \ .\ \ .\ \ . + y^2_n$$

Teoriski model raspored verovatnoća

$$f_K(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{K}{2}} \Gamma\left(\frac{K}{2}\right)} \cdot (\chi^2)^{\frac{K-2}{2}} e^{-\frac{\chi^2}{2}} \qquad \textbf{(28)}$$

Grafički je prikazan na slici 3. Sa slike se očigledno vidi da oblik krive zavisi od broja stepena slobode k. Funkcija gustine rasporeda ne zavisi od matematičke nade i disperzije.



SLIKA 3

Kada je broj stepeni slobode $K \to \infty$ funkcija definisana jednačinom (28) teži ka normalnom rasporedu. Praktično kada je $k > 30$ umesto χ^2 možemo koristiti normalni raspored.

Prostim transfromacijama dolazi se do jednakosti:

$$\frac{n \cdot m^2}{\overline{m}^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{yi}{\overline{m}}\right)^2$$

Slučajna veličina $\frac{n \cdot m^2}{\overline{m}^2}$ pripada χ^2 rasporedu i predstavlja sumu kvadrata od n-1 nezavisnih slučajnih veličina $\frac{yi}{\overline{m}}$ koji pripadaju normalnom rasporedu sa matematičkom nadom jednakom nuli i dispersiji jednakoj jedinici $\left[\frac{yi}{\overline{m}} \in N(0,1)\right]$

Verovatnoća da će se disperzija $\overline{m}^2$ nalaziti u intervalu $[\gamma_1 m^2, \gamma_2 m^2]$ biće:

$$P(\gamma_1 m^2 \leq \overline{m}^2 \leq \gamma_2 m^2) = P\left(\frac{n}{\gamma_2} \leq \frac{n \cdot m^2}{\overline{m}^2} \leq \frac{n}{\gamma_1}\right) = P\left(\frac{n}{\gamma_2} \leq x^2{}_{n-1} \leq \frac{n}{\gamma_1}\right) =$$

$$\frac{1}{2^{\frac{K}{2}}\Gamma\left(\frac{K}{2}\right)} \int_{\frac{n}{\gamma_2}}^{\frac{n}{\gamma_1}} (\chi^2)^{\frac{K-2}{2}} \cdot e^{-\frac{\chi^2}{2}} \cdot d(\chi^2) = P_1 - P_2 \equiv p \tag{29}$$

Odnosno interval pouzdanosti za standardnu devijaciju $\overline{m}$ biće

$$I = \left[\sqrt{\frac{n}{\chi^2 P_1}} \cdot m, \sqrt{\frac{n}{\chi^2 P_2}} \cdot m\right]$$

gde je

$$m^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}$$

odnosno

$$m^2 . n = [\varepsilon\varepsilon]$$

ili ako podelimo sa $\overline{m}^2$

$$\frac{m^2 . n}{\overline{m}^2} = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{\overline{m}^2} = \chi^2 n$$

dobijamo $\chi^2 n$ sa n stepeni slobode

$$M\left[\frac{m^2 . n}{\overline{m}^2}\right] = M[\chi^2 n] \qquad M[\chi^2 n] = n \qquad \frac{n}{\overline{m}^2} M[m^2] = n$$

odnosno

$$M[m^2] = \overline{m}^2$$

Ako raspolažemo sa odstupanjem od aritmetičke sredine dobićemo

$$m^2_1 (n-1) = [vv]$$

$$\frac{m^2_1 (n-1)}{\overline{m}^2} = \frac{[vv]}{\overline{m}^2} . \chi^2 n-1 \qquad M[\chi^2 n-1] = n-1$$

$$\frac{n-1}{\overline{m}^2} M[m^2_1] = n-1$$

odnosno

$$M[m^2_1] = \overline{m}^2$$

Koristeći nepristrasnu ocenu za $\overline{m}^2$ možemo napisati jednakost

$$m^2 n = m^2_1 (n-1)$$

Kada nemamo istinite vrednosti traženih veličina, onda će interval pouzdanosti biti

$$I = \left[\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2 P_1}} . m_1 , \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2 P_2}} . m_1\right]$$

Vrednosti $\gamma_1 = \sqrt{\frac{K}{\chi^2 P_1}}$ i $\gamma_2 = \sqrt{\frac{K}{\chi^2 P_2}}$ uzimamo iz tablice III po argumentu verovatnoće p i broja stepeni slobode k.

PRIMER 3. Prikazaćemo primenu ovoga rasporeda na podacima iz primera 1.

$m = 1,'' 52 \qquad n = 8 \qquad k = n\text{-}1 = 7$

Interval pouzdanosti standardne devijacije $\overline{m}$ biće

$$\gamma_1 m \leq \overline{m} \leq \gamma_2 m$$

Neka je p = 0,95. Iz tablice III dobija se γ_1 = 0,66 i γ_2 = 2,04. Za interval u kome treba da se nalazi standardna devijacija $\overline{m}$ sa verovatnoćom p = 0,95 dobija se

$$1'',00 \leq \overline{m} \leq 3'',10$$

Srednja kvadratna greška ugla može uzimati vrednosti od 1'',00 do 3'',10 a da smo pri tome sigurni sa 95% da neće uzeti vrednosti van tog intervala.

UPOREĐENJA TAČNOSTI TRETIRANIH PROBLEMA

Ako želimo da upoređujemo tačnost dveju metoda rada, kvalitet dveju mreža, kvalitet instrumenata itd. služi nam Fišerov raspored.

Uzmimo dva niza merenja $x_1, x_2 \ldots xn$ i $x'_1, x'_2, x'n$. Označimo sa m_1 srednju kvadratnu grešku prvog niza, a sa m_2 srednju kvadratnu grešku drugog niza.

Obrazujmo odnos kvadrata ovih srednjih kvadratnih grešaka, s tim što indekse usvajamo tako da je $m_1 > m_2$

$$F = \frac{m^2_1}{m^2_2}$$

Slučajna promenljiva F koja može uzimati sve pozitivne vrednosti od 0 do $+\infty$ kažemo da pripada Fišerovom rasporedu sa k_1 i k_2 stepeni slobode ako je funkcija gustine rasporeda data u obliku

$$\varphi_{K_1,K_2}(F) = \frac{\Gamma\left(\frac{K_1+K_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{K_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{K_2}{2}\right)} \cdot \left(\frac{K_1}{K_2}\right)^{\frac{K_1}{2}} \cdot F^{\frac{K_1}{2}-1} \cdot \left(1 - \frac{K_1}{K_2}F\right)^{-\frac{K_1+K_2}{2}} \tag{30}$$

Odnosno verovatnoća da će slučajna promenljiva F biti veća od unapred proizvoljno usvojenog broja Fp

$$P(F > F_P) = G_K(F) = A_{K_1,K_2} \int_{F_p}^{+\infty} F^{\frac{K_1}{2}-1} \cdot \left(1 - \frac{K_1}{K_2}F\right)^{-\frac{K_1+K_2}{2}} dF \quad (31$$

gde smo sa $A\,K_1K_2$ označili konstantu čija vrednost zavisi od broja stepeni slobode k_1 i k_2

$$A_{K_1,K_2} = \frac{\Gamma\left(\frac{K_1+K_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{K_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{K_2}{2}\right)} \cdot \left(\frac{K_1}{K_2}\right)^{\frac{K_1}{2}}$$

Kada je $k_1 = k_2$ funkcija gustine rasporeda dobija nešto drugojačiji oblik

$$\varphi_K(F) = \frac{\Gamma(K)}{2\Gamma\left(\frac{K}{2}\right)} \cdot F^{\frac{K'}{2}-1} \cdot (1-F)^{-K} \tag{32}$$

odnosno

$$P(F > F_P) = G_K(F) = \frac{\Gamma(K)}{2\Gamma\left(\frac{K}{2}\right)} \int_{F_P}^{\infty} F^{\frac{K}{2}-1} \cdot (1-F)^{-K} \cdot dF \tag{33}$$

Vrednosti formule (31) date su u tablici IV, a formule (33) u tablici V.

PRIMER 4. Primenu Fišerovog rasporeda ilustrovaćemo na upoređenju kvaliteta uglovnih merenja nekih osnovičkih mreža. Podaci su uzeti iz publikacije Savezne geodetske uprave »Osnovni geodetski radovi u FNRJ« (str. 49, 127).

Srednje kvadratne greške ugla sračunate po formuli Ferera iznose

	broj trouglova	m	m^2
Prizrenska	16	0",95	0,90
Strumička	24	0",70	0,49
Mariborska	23	0",87	0,76
Negotinska	23	0",78	0,61

Promatraćemo dva slučaja

Slučaj 1. Uzećemo da uporedimo kvalitet uglovnih merenja Prizrenske i Strumičke osnovičke mreže gde broj trouglova nije isti.

Prizrenska	$n_p = 16$	$m^2_p = 0,90$
Strumička	$n_s = 24$	$m^2_s = 0,49$

Obrazujmo količnik F.

$$F = \frac{0,90}{0,49} = 1,84$$

Pošto raspolažemo sa istinitim vrednostima onaj broj trouglova odgovara broju stepeni slobode $k_1 = np$ i $k_2 = ns$. Usvojimo za verovatnoću $p = 0,95$ odnosno suprotnu verovatnoću ili rizik $q = 1\text{-}p = 0,05$. Iz tabele IV dobijamo za argumenat $k_1 = 16$ i $k_2 = 24$ $Fp = 2,09$. Pošto je $F < Fp = 2,09$, možemo onda nedvosmisleno tvrditi da su obe osnovičke mreže istog ranga u pogledu tačnosti uglovnih merenja, i ako je znatna razlika između srednjih kvadratnih grešaka (36%).

Slučaj 2. Uzmimo sada Mariborsku i Negotinsku osnovičku mrežu gde je isti broj trouglova

Mariborska	$n_m = 23$	$m^2_M = 0,76$
Negotinska	$n_n = 23$	$m^2_N = 0,61$

Količnik F biće

$$F = \frac{0,76}{0,61} = 1,25$$

Ako usvojimo $p = 0,95$ odnosno rizik $q = 0,05$ iz tabele V dobijamo $Fp = 2,0$. I u ovom slučaju, takođe je $F < Fp$ pa možemo tvrditi da su obe mreže u pogledu tačnosti uglovnih merenja istoga ranga sa rizikom 5%.

ODNOS SREDNJE KVADRATNE GREŠKE I STANDARDNE DEVIJACIJE

Ako obrazujemo količnik između srednje kvadratne greške m_i, i standardne devijacije $\bar{m}$ (obe se odnose na istu vrstu merenja), dobićemo novu slučajnu promenljivu

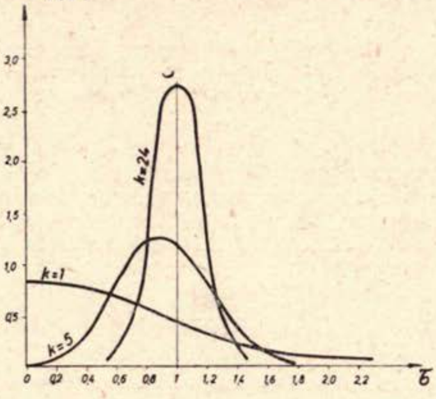
$$\tau_i = \frac{m_i}{\bar{m}} \tag{34}$$

Ova se slučajna promenljiva ne može unapred odrediti, već se određuje sa stanovišta računa verovatnoće.

Zakon verovatnoće slučajne promenljive τ_i definisan je izrazom

$$\varphi_K(\tau) = \frac{K^{\frac{K}{2}}}{2^{\frac{K-2}{2}}\,\Gamma\left(\frac{K}{2}\right)} \cdot \tau^{K-1} \cdot e^{-\frac{K}{2}\tau^2} \tag{35}$$

a grafički prikazan na slici 4.



SLIKA 4

Verovatnoća da slučajna promenljiva bude u intervalu $[\tau_p, \infty]$ biće

$$P(\tau > t\tau_p) = F(\tau) = \frac{K^{\frac{K}{2}}}{2^{\frac{K-2}{2}} \Gamma\left(\frac{K}{2}\right)} \int_{\tau_p}^{\infty} \tau^{K-1} \cdot e^{-\frac{K}{2}\tau^2} \cdot d\varrho \qquad (36)$$

Uvođenje nove promenljive τ ima svojih prednosti jer τ ne zavisi od jedinica merenja (cm, sek, itd). Kada se broj k neograničeno povećava odnos τ_i teži jedinici a srednja kvadratna greška m_i teži standardnoj devijaciji $\overline{m}$

Treba napomenuti da se kod izvođenja analitičkog izraza za funkciju gustinu rasporeda definisanog formulom (35) pretpostavljeno, da se slučajne greške pokoravaju normalnom rasporedu.

Pomoću ovog rasporeda moguće je ustanoviti da li neki niz merenja u pogledu tačnosti odgovara nivou tačnosti koji je predviđen za dotičnu vrstu merenja. Na primer iz velikog broja podataka za pojedine operacije mogu se ustanoviti srednje kvadratne greške koje će što realnije reprezentirati kvalitet radova. Te srednje kvadratne greške po svojim vrednostima skoro su adekvatne sa standardnim devijacijama koji daju realnu ocenu tačnosti. Poznavanjem ovih grešaka stvaraju se mogućnosti za ispitivanje kvaliteta tačnosti geodetskih radova.

PRIMER 5. U publikaciji Savezne geodetske uprave »Osnovni geodetski radovi u FNRJ« navedene su srednje kvadratne greške ugla sračunate po Fererovoj formuli za trigonometrisku mrežu 1 reda (str. 150). Obzirom na radne uslove ona je data za dva karakteristična vremenska perioda

1902—1936 god. broj trouglova 333 $m_1 = 0'',96$

1937—1948 god. broj trouglova 262 $m_2 = 0'',80$

Srednja kvadratna greška ugla sračunata je iz relativno velikog broja podataka. Prema tome možemo usvojiti da srednja kvadratna greška m_1 i m_2 praktično odgovaraju standardnim devijacijama $\overline{m}_1$ i $\overline{m}_2$. Razlike u srednjim kvadratnim greškama za navedena dva perioda nastale su zbog promene metode rada i ostalih radnih uslova navedenih na strani 150 pomenute publikacije. Standardna devijacija

$\overline{m}_1$ = 0",96 karakteriše uglovna merenja u trigonometrijskoj mreži 1 reda izvršena u periodu 1902—1936. godine, a standardna devijacija $\overline{m}_2$ = 0",80 u periodu 1937 do 1948. godine.

Radi ispitivanja kvaliteta uglovnih merenja trigonometriske mreže 1 reda u novoprisajedinjenim oblastima u Sloveniji (radovi Bečkog vojnogeografskog instituta) sračunata je pored ostalog i srednja kvadratna greška ugla po formuli Ferera ([1] strana 141).

Srednja kvadratna greška sračunata je iz 33 trougla i iznosi m = 0",96. Očigledno da u pogledu kvaliteta uglovnih merenja ova mreža je na istom nivou kao što su uglovna merenja izvršena u periodu 1902—1936. godine. Interesantno je videti da li su uglovna merenja ove mreže u pogledu tačnosti adekvatna sa tačnošću uglovnih merenja koja se odnose na period 1937—1948. godine. Na ovo se pitanje može dati odgovor ako obrazujemo količnik

$$\tau = \frac{m}{\overline{m}_2} = \frac{0{,}96}{0{,}80} = 1{,}2$$

Za vrednost rizika $\underline{q}$ = 0,05 po argumentu $\underline{k}$ = 33 iz tebala VI dobija se τ_p = 1,2.

Pošto je $\tau \approx \tau_p$ možemo sa sigurnošću od 95% smatrati da su obe mreže u pogledu tačnosti približno na istom nivou.

Uzmimo još jedan primer sa str. 92.

Srednja kvadratna greška m = 1",18.

Broj trouglova 7.

Merenja su izvršena 1934. godine. Znači odgovaraju periodu 1902—1936. godine, gde je standardna devijacija $\overline{m}_1$ = 0",96.

Obrazujmo količnik

$$\tau = \frac{1{,}18}{0{,}96} = 1{,}23$$

Za q = 0,05 i k = 7 iz tabele VI dobijamo τ_p = 1,42. $\tau < \tau_p$

Sa razlikom od 5% možemo tvrditi da ova mreža je istog kvaliteta kao i mreža iz perioda 1902—1936. godine i ako je znatna razlika između srednjih kvadratnih grešaka (23%). Ova razlika je nastala verovatno zbog malog broja podataka (n=7). Ako ovu mrežu uporedimo sa mrežom iz perioda 1937—1948. god. nije teško uočiti da ćemo doći do suprotnih rezultata.

$$\text{Stvarno} \quad \tau = \frac{1{,}18}{0{,}0} = 1{,}48$$

Pošto je $\tau > \tau_p$ onda se ova mreža u pogledu tačnosti ne može uporediti sa mrežom iz perioda 1937—1948. godine. Naime, tačnost tretirane mreže nešto je manja.

U svim primerima korišćena je ista verovatnoća p = 0,95 koja kod normalnog rasporeda odgovara intervalu pouzdanosti [—1,96 $\overline{m}$,1,96 $\overline{m}$]. Ovaj interval pouzdanosti približno odgovara dozvoljenim odstupanjima za precizne geodetske radove Δ = 2m. Iako primeri nisu najbolje izabrani njihova je namena da, s jedne strane ilustruju mogućnosti i prednosti tretiranih metoda, a s druge strane da prikažu jednostavnost njihove praktične primene.

$$P(|t| \leq t_\alpha) = \varnothing(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_\alpha} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

TABELA I

t	$F_{(t)}$	t	$F_{(t)}$	t	$F_{(t)}$	t	$F_{(t)}$
0,00	0,0000	1,00	0,6827	1,80	0,9281	2,58	0,9901
0,10	0,0798	1,10	0,7287	1,90	0,9426	2,60	0,9907
0,20	0,1585	1,20	0,7699	1,96	0,9500	2,70	0,9931
0,30	0,2358	1,30	0,8064	2,00	0,9545	2,80	0,9949
0,40	0,3108	1,40	0,8385	2,10	0,9643	2,90	0,9962
0,50	0,3829	1,50	0,8664	2,20	0,9736	3,00	0,9973
0,60	0,4515	1,60	0,8904	2,30	0,9786	3,20	0,9986
0,70	0,5161	1,65	0,9011	2,40	0,9836	3,40	0,999
0,80	0,5763	1,70	0,9109	2,50	0,9876	4,00	0,999
0,90	0,6319						

$$P(|t| \leq t_\alpha) = F_K(t) = \frac{2\Gamma\frac{K+1}{2}}{\sqrt{K\pi}\,\Gamma\left(\frac{K}{2}\right)} \int_0^{t_\alpha} \left(1+\frac{t^2}{K}\right)^{-\frac{K+1}{2}} dt$$

TABELA II

K \ P	0,99	86‘0	0,95	0,90	0,80	0,70	0,60
1	63,657	31,821	12,706	6,314	3,078	1,963	1,376
2	9,925	6,965	4,303	2,920	1,886	1,386	1,061
3	5,841	4,541	3,182	2,353	1,638	1,250	0,978
4	4,604	3,747	2,776	2,132	1,533	1,190	0,941
5	4,032	3,365	2,571	2,015	1,476	1,156	0,920
6	3,707	3,143	2,447	1,943	1,440	1,134	0,906
7	3,499	2,998	2,365	1,895	1,415	1,119	0,896
8	3,355	2,896	2,306	1,860	1,397	1,108	0,889
9	3,250	2,821	2,262	1,833	1,383	1,100	0,883
10	3,169	2,764	2,228	1,812	1,372	1,093	0,879
11	3,106	2,718	2,201	1,796	1,363	1,088	0,876
12	3,055	2,681	2,179	1,782	1,356	1,083	0,873
13	3,012	2,650	2,160	1,771	1,350	1,079	0,870
14	2,977	2,624	2,145	1,761	1,345	1,076	0,868
15	2,947	2,602	2,131	1,753	1,341	1,074	0,866
16	2,921	2,582	2,120	1,746	1,337	1,071	0,865
17	2,898	2,567	2,110	1,740	1,333	1,069	0,863
18	2,878	2,552	2,101	1,734	1,330	1,067	0,862
19	2,861	2,539	2,093	1,729	1,328	1,066	0,861
20	2,845	2,528	2,086	1,725	1,325	1,064	0,860
21	2,831	2,518	2,080	1,721	1,323	1,063	0,859
22	2,819	2,508	2,074	1,717	1,321	1,061	0,858
23	2,807	2,500	2,069	1,714	1,319	1,060	0,858
24	2,797	2,492	2,064	1,711	1,318	1,059	0,857
25	2,787	2,485	2,060	1,708	1,316	1,058	0,856
26	2,779	2,479	2,056	1,706	1,315	1,058	0,856
27	2,771	2,473	2,052	1,703	1,314	1,057	0,855
28	2,763	2,467	2,048	1,701	1,313	1,056	0,855
29	2,756	2,462	2,045	1,699	1,311	1,055	0,854
30	2,750	2,457	2,042	1,697	1,310	1,055	0,854
40	2,704	2,423	2,021	1,684	1,303	1,050	0,851
60	2,660	2,390	2,000	1,671	1,296	1,046	0,848
120	2,617	2,358	1,980	1,658	1,289	1,041	0,845
∞	2,576	2,326	1,960	1,645	1,282	1,036	0,842

$$P(\gamma_1 m \leq \bar{m} \leq \gamma_2 m) = \frac{1}{2^{\frac{K}{2}} \Gamma\left(\frac{K}{2}\right)} \int_{\frac{K}{\gamma_2}}^{\frac{K}{\gamma_1}} (\chi^2)^{\frac{K-2}{2}} \cdot e^{-\frac{\chi^2}{2}} \cdot d(\chi^2)$$

TABELA III

K \ P	0,99		0,98		0,95		0,90	
	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2
1	0,356	159	0,388	79,8	0,446	31,9	0,510	15,9
2	0,434	14,1	0,466	9,97	0,521	6,28	0,578	4,40
3	0,483	6,47	0,514	5,11	0,566	3,73	0,620	2,92
4	0,519	4,39	0,549	3,67	0,599	2,87	0,649	2,37
5	0,546	3,48	0,576	3,00	0,624	2,45	0,672	2,090
6	0,569	2,98	0,597	2,62	0,644	2,202	0,690	1,916
7	0,588	2,66	0,616	2,377	0,661	2,035	0,705	1,797
8	0,604	2,440	0,631	2,205	0,675	1,916	0,718	1,711
9	0,618	2,277	0,644	2,076	0,688	1,826	0,729	1,645
10	0,630	2,154	0,656	1,977	0,699	1,755	0,739	1,593
11	0,641	2,056	0,667	1,898	0,708	1,698	0,748	1,550
12	0,651	1,976	0,677	1,833	0,717	1,651	0,755	1,515
13	0,660	1,910	0,685	1,779	0,725	1,611	0,762	1,485
14	0,669	1,854	0,693	1,733	0,732	1,577	0,769	1,460
15	0,676	1,806	0,700	1,694	0,739	1,548	0,775	1,437
16	0,683	1,764	0,707	1,659	0,745	1,522	0,780	1,418
17	0,690	1,727	0,713	1,629	0,750	1,499	0,785	1,400
18	0,696	1,695	0,719	1,602	0,756	1,479	0,790	1,385
19	0,702	1,666	0,725	1,578	0,760	1,460	0,794	1,370
20	0,707	1,640	0,730	1,556	0,765	1,444	0,798	1,358
21	0,712	1,617	0,734	1,536	0,769	1,429	0,802	1,346
22	0,717	1,595	0,739	1,519	0,773	1,416	0,805	1,335
23	0,722	1,576	0,743	1,502	0,777	1,402	0,809	1,326
24	0,726	1,558	0,747	1,487	0,781	1,391	0,812	1,316
25	0,730	1,541	0,751	1,473	0,784	1,380	0,815	1,308
26	0,734	1,526	0,755	1,460	0,788	1,371	0,818	1,300
27	0,737	1,512	0,758	1,448	0,791	1,361	0,820	1,293
28	0,741	1,499	0,762	1,436	0,794	1,352	0,823	1,286
29	0,744	1,487	0,765	1,426	0,796	1,344	0,825	1,279
30	0,748	1,475	0,768	1,417	0,799	1,337	0,828	1,274
40	0,774	1,390	0,792	1,344	0,821	1,279	0,847	1,228
50	0,793	1,336	0,810	1,297	0,837	1,243	0,861	1,199
60	0,808	1,299	0,824	1,265	0,849	1,217	0,871	1,179
70	0,820	1,272	0,835	1,241	0,858	1,198	0,879	1,163
80	0,829	1,250	0,844	1,222	0,866	1,183	0,886	1,151
90	0,838	1,233	0,852	1,207	0,873	1,171	0,892	1,141
100	0,845	1,219	0,858	1,195	0,878	1,161	0,897	1,133
200	0,887	1,15	0,897	1,13	0,912	1,11	0,925	1,09

$$P = G\,(F > F_p) = 2A_{K_1,K} \int_{F_p}^{+\infty} F^{\frac{K-1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{K_1}{K_2}F\right) - ^{\frac{K_1 + K_2}{2}} \cdot dF$$

Za $q = 1 - p = 0{,}05$

TABELA IV

k_2 \ k_1	10	12	16	20	24	30	50	100	∞
11	2,86	2,79	2,70	2,65	2,61	2,57	2,50	2,45	2,40
12	2,76	2,69	2,60	2,54	2,50	2,46	2,40	2,35	2,30
13	2,67	2,60	2,51	2,46	2,42	2,38	2,32	2,26	2,21
14	2,60	2,53	2,44	2,39	2,35	2,31	2,24	2,19	2,13
15	2,55	2,48	2,39	2,33	2,29	2,25	2,18	2,12	2,07
16	2,49	2,42	2,33	2,28	2,24	2,20	2,13	2,07	2,01
17	2,45	2,38	2,29	2,23	2,19	2,15	2,08	2,02	1,96
18	2,41	2,34	2,25	2,19	2,15	2,11	2,04	1,98	1,92
19	2,38	2,31	2,21	2,15	2,11	2,07	2,00	1,94	1,88
20	2,35	2,28	2,18	2,12	2,08	2,04	1,96	1,90	1,84
22	2,30	2,23	2,13	2,07	2,03	1,98	1,91	1,84	1,78
24	2,26	2,18	2,09	2,02	1,98	1,94	1,86	1,80	1,73
26	2,22	2,15	2,05	1,99	1,95	1,90	1,82	1,76	1,69
28	2,19	2,12	2,02	1,96	1,91	1,87	1,78	1,72	1,65
32	2,14	2,07	1,97	1,91	1,86	1,82	1,74	1,67	1,59
36	2,10	2,03	1,93	1,87	1,82	1,78	1,69	1,62	1,55
40	2,07	2,00	1,90	1,84	1,79	1,74	1,66	1,59	1,51
60	1,99	1,92	1,81	1,75	1,70	1,65	1,56	1,48	1,39
100	1,92	1,85	1,75	1,68	1,63	1,57	1,48	1,39	1,28
200	1,87	1,80	1,69	1,62	1,57	1,52	1,42	1,32	1,19
∞	1,83	1,75	1,64	1,57	1,52	1,46	1,35	1,24	1,00

$$P = G\,(F > F_p) = \frac{\Gamma(K)}{\Gamma\left(\frac{K}{2}\right)} \int_{F_p}^{\infty} F^{\frac{K}{2}-1} \cdot (1 - F)^{-K} \cdot dF$$

TABELA V

k \ p	0,25	0,10	0,05	0,01
1	5,8	39,9	161	4052
2	3,0	9,0	19,0	99,0
3	2,4	5,4	9,3	29,5
4	2,1	4,1	6,3	16,0
5	1,9	3,5	5,1	11,0
6	1,8	3,1	4,3	8,5
7	1,7	2,8	3,8	7,0
8	1,6	2,6	3,4	6,0
9	1,6	2,4	3,2	5,4
10	1,6	2,3	3,0	4,9
12	1,5	2,2	2,7	4,2
15	1,4	2,0	2,4	3,5
20	1,4	1,8	2,1	2,9
30	1,3	1,6	1,8	2,4
40	1,2	1,5	1,7	2,1
60	1,2	1,4	1,5	1,8
120	1,1	1,3	1,4	1,5
∞	1,0	1,0	1,0	1,0

$$P(\tau > t \cdot \tau_p) = F_K(\tau) = \frac{K^{\frac{K}{2}}}{2^{\frac{K-2}{2}} \Gamma\left(\frac{K}{2}\right)} \int_{\tau_p}^{\infty} \tau^{K-1} \cdot e^{-\frac{K}{2}\tau^2} \cdot d\varepsilon$$

TABELA VI

k \ p	0,50	0,20	0,10	0,05	0,01
1	0,67	1,28	1,64	1,96	2,58
2	1,83	1,27	1,52	1,73	2,15
3	0,89	1,24	1,44	1,61	1,94
4	0,92	1,22	1,39	1,54	1,82
5	0,93	1,21	1,36	1,49	1,74
6	0,94	1,19	1,33	1,45	1,67
8	0,96	1,17	1,29	1,39	1,58
10	0,97	1,16	1,26	1,35	1,52
15	0,98	1,14	1,22	1,29	1,43
20	0,98	1,12	1,19	1,25	1,37
30	0,99	1,10	1,16	1,21	1,30
50	1,00	1,08	1,12	1,16	1,23
100	1,00	1,06	1,09	1,12	1,17
700	1,00	1,03	1,05	1,07	1,10
1000	1,00	1,02	1,03	1,04	1,05
∞	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

LITERATURA

1. — Linnik Ju. V:n Sposob naimenših kvadratov i osnovi teorii obrabotki nabljudenij. — Moskva, 1962
2. — Gnedenko B. V.: Kurs teorii veroatnostej. — Moskva, 1961.
3. — Ventcel E. S.: Teorija verojatnostej. — Moskva, 1962.
4. — Čebotarev A. S.: Sposob naimenših kvadratov s osnovami teorii verojatnostej. — Moskva, 1958.
5. — Smirnov N. V. i Dunin-Barkovskij I. V.: Kratkij kurs matematičeskoj statistiki dlja tehničeskih priloženij. — Moskva, 1959.
6. — Ivanović V.: Osnovi matematičke statistike. — Beograd, 1959.
7. — Vladimir Vranić: Vjerojatnost i statistika. — Zagreb, 1958.
8. — Romanovskij V. I.: Primenenie matematičeskoj statistiki v opitnom dele. — Moskva, 1947.
9. — Jakovlev K. P.: Matematičeskaja obrabotka rezultatov izmerenij. — 1953.
10. — Hristov W. K.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische statistik. — Berlin, 1961.
11. — Savezna geodetska uprava: Osnovni geodetski radovi u FNRJ. — Beograd, 1953.
12. — Čubranić N.: Račun izjednačenja. — Zagreb, 1958.
13. — Svečnikov N.: Račun izravnanja. — Beograd, 1951.
14. — Josef Böhm: Odhody presnosti a intervalu v geodeziji. — Praha
15. — Hristov V. K.: Klasičeskie i sovremennie metodi ocenki točnosti nabljudenij, Geodezija i kartografija No. 2. — Moskva, 1958.
16. — Čebotarev A. S.: O matematičeskoj statistike, Geodezija i aerofotosjomka No. 2. — Moskva 1960.
17. — Šilov P. I.: Predelnie ošibki rezultatov izmerenij i uravnovešivanij, Geodezija i aerofotosjomska No. 2. — Moskva, 1958.
18. — Zvonimir Narobe: Razmatranja o ocjeni tačnosti geodetskih mjerenja na bazi matematičke statistike i teorije vjerojatnosti, Geodetski list 1—3. — Zagreb 1963.
19. — Edward Warehatowski: Rachunek wyrownawczy dla geodetow, Warszava, 1955.