O NEKIM IZRAZIMA TOLERANCIJA KOD GRADSKIH MJERENJA S NAROČITIM OSVRTOM NA KOREKTURNI ČLAN

ZVONIMIR NAROBE, dipl. inž. — Zagreb*

I.

Pravilnik za državni premer II-A deo — Beograd 1956, propisuje kod gradskih trigonometrijskih mreža, pojedinačno mjerenje horizontalnih kuteva na trig. tačkama, metodom zatvaranja horizonta. Svaki se kut mjeri u pravilu sa 6 girusa. Za ocjenu tačnosti izmjerenog kuta, računa se njegova srednja pogreška iz podataka odstupanja pojedinih girusa od aritmetske sredine. Ukoliko ova srednja pogreška prelazi propisanu maksimalnu vrijednost, predviđena su naknadna mjerenja.

Odabrana metoda daje mogućnost kontrole dobivenih rezultata i iz nesuglasica u zatvaranju horizonta na trigonometrijskoj tački. Član 23 navodi granične vrijednosti dozvoljenih nesuglasica. Zasebno su date maksimalne vrijednosti za slučaj kada su sva mjerenja izvršena sa centra odnosne stanice i za slučaj kada postoje ekscentrična opažanja. Opći oblici izraza po kojima se računaju numeričke vrijednosti tolerancija $f_{\beta max}$, glase:

a) kad nema ekscentričnih mjerenja

$$f_{\beta max} = 2\, m_\beta \sqrt{n} + K$$

b) kad postoje ekscentrična mjerenja

$$f_{\beta max} = 2\, m_\beta \sqrt{n} + 1.''0 + K \qquad (1)$$

gdje su

m_β — srednja pogreška u mjerenju pojedinog kuta
n — broj kuteva na stanici
K — korekcioni član $K = 1,''5 - 0,''1\,(n - 2)$

Za numeričku vrijednost parametra m_β u gornjim izrazima, uzeta je maksimalna srednja pogreška jednog kuta mjerenog u 6 girusa ($m_{\beta max} = 0,6''$). Time je dakle uspostavljena veza između srednje pogreške iz-

* Geodetski fakultet — Zagreb, Kačićeva 26

mjerenog kuta sračunate iz odstupanja pojedinih girusa od aritmetske sredine — s jedne strane, i srednje pogreške izmjerenog kuta sračunate iz nesuglasica u zatvaranju horizonta — s druge strane. Ova povezanost srednjih pogrešaka, sama po sebi privlači zasebnu pažnju.

Međutim, mnogo veći interes zaslužuje uvođenje korekturnog člana u izraze (1), s obrazloženjem: »kako kod malog broja sabiraka ne postoji dovoljna kompenzacija njihovih slučajnih grešaka, to formula sadrži član K«. Navodi se još da »prednja eksperimentalna formula važi za slučajeve kada je $n \leq 17$«. Praktički to su svi slučajevi.

U Pravilniku se korekcioni član K, pojavljuje na još jednom mjestu. Član 54 tačka 1 propisuje maksimalno dozvoljena kutna odstupanja u gradskoj poligonometrijskoj mreži I. reda. Max. odstupanja, računaju se po slijedećim formulama:

A. za umetne vlakove

a) $n \leq 15$ $\quad f_{\beta max} = 2\, m_\beta \sqrt{n} + 3\, m_v + K$

b) $n > 15$ $\quad f_{\beta max} = 2\, m_\beta \sqrt{n} + 3\, m_v$ $\quad$ (2)

B. za zatvorene poligone

a) $n \leq 15$ $\quad f_{\beta max} = 2\, m_\beta \sqrt{n} + K$

b) $n > 15$ $\quad f_{\beta max} = 2\, m_\beta \sqrt{n}$ $\quad$ (3)

gdje su sada

n — broj poligonskih tačaka

m_β — srednja pogreška prelomnog odnosno veznog kuta

m_v — srednja pogreška direkcionog kuta trigonometrijske strane

K — »kompenzacioni član koji se dodaje radi nedovoljne kompenzacije slučajnih grešaka kod malog broja merenja«: $K = 2{,}''6 - 0{,}''2\,(n - 2)$

Obzirom na dotadašnje forme izraza za toleranciju i ovdje je najznačajnija novost uvođenje korekcionog člana.

U prvom je slučaju napomenuto da se radi o eksperimentalnoj formuli. Time se vjerojatno ukazuje da u rješavanju ovog problema predstoje daljnja istraživanja.

Ovim člankom, ne namjerava se razmatrati pitanje oportunosti korekcionog člana u pojedinim izrazima tolerancija. Koliko je poznato, potrebu je diktirala praksa a formule max. odstupanja, dobivene su uglavnom empiričkim putem. Namjera je jedino, zadržati se na obrazloženju tog člana.

Razumljivo je da Pravilnik namjenski nije dužan ulaziti u šira razmatranja. Međutim, u konkretnom slučaju, svojim prekratkim obrazloženjem može vrlo lako dovesti pojedince do pogrešnih shvaćanja i zabluda u pogledu valjanosti nekih dobro poznatih zakona u teoriji pogrešaka.

Koliko je poznato, od izlaska Pravilnika godine 1956. pa do danas, korekturni član spomenut je još u samo dvije radnje. U radnji prof. Svečnikova [8], iz empiričkih se podataka provjerava opravdanost uvođenja člana K u formulu za granične vrijednosti zatvaranja horizonta. Nešto više o tome napisao je Miodrag Jovanović u svom članku [3] gdje je izneseno slijedeće:

»Postavka sa koje se pošlo pri uvođenju ovog korekcionog člana pretstavlja novitet za našu struku — za teoriju grešaka. I njegovo uvođenje, iako u suprotnosti sa dosadanjim postavkama i sa dosadanjom praksom, potpuno je opravdano. Jer, matematički zakoni, na osnovu kojih su izvedene i date formule za računanje sa greškama merenja, temelje se na zakonima koji u potpunosti vrede samo za velike nizove merenja. Međutim, zakoni verovatnoće nisu bespogrešni — dakle nisu zakoni u pravom smislu reči — kada se radi o ograničenom broju merenja. Zbog toga — kada je broj grešaka mali — osnovno svojstvo slučajnih grešaka — da njihov zbir bude jednak nuli — neće biti ispunjeno dakle

$[\varepsilon] \neq 0 \ldots$ kada je broj grešaka ε mali.

Stoga uvođenje korekcionog člana K ima opravdanja i u principu pravilno je. Drugo je pitanje da li je veličina ovog člana dobro određena, o tome se može diskutovati, ali prava vrednost ovog člana biće određena tek na osnovu velikog broja merenja.«

Čini se da je autor u svojem izlaganju bio pod uticajem nedovoljno preciznog pravilničkog obrazloženja, jer u razmatrani problem unosi samo zbrku. Dok prema Pravilniku proizlazi da u pitanje dolaze pojedini zakoni teorije pogrešaka, Miodrag Jovanović ide korak dalje, pa pod znak pitanja stavlja i zakone teorije vjerojatnosti u primjeni na ograničene nizove. Sa ovakvim tumačenjem, teško se je saglasiti, jer je pojmovno krivo.

Dobro je poznato, da je glavni zakon u teoriji vjerojatnosti — zakon velikih brojeva. Ipak, to ne znači da zakoni teorije vjerojatnosti nisu primjenjivi i na ograničene nizove slučajnih veličina. Njeni zakoni u takvim primjerima sami po sebi ukazuju na manju sigurnost (pouzdanost) pa zato i ovdje ostaju na snazi kao matematski strogi i neprotuslovni zakoni — dakle to su zakoni u pravom smislu riječi. Iz izlaganja M. Jovanovića nazire se zapravo mišljenje, da su za ograničene nizove slučajnih veličina, zakoni teorije vjerojatnosti pogrešni. Takva konstatacija ne bi bila prihvatljiva. Međutim, bez obzira na to, vrijednost citiranog objašnjenja u većoj je mjeri smanjena krivom interpretacijom svojstva slučajnih pogrešaka ε, koje govori o njihovoj kompenzaciji.

Prema svojstvu slučajnih pogrešaka, za sume

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_n = [\varepsilon] \tag{4}$$

postoji sve manja vjerojatnost da će biti jednake nuli, što je broj pogrešaka n u njima veći. Ili drugim riječima: kad broj pogrešaka u izrazima (4) raste, tada za sume prevladava tendencija povećanja po apsolutnoj veličini. Ipak, za te iste sume [ε], bez obzira na broj pogrešaka u njima, postoji uvijek najveća vjerojatnost da će biti jednake nuli. — Nije teško zaključiti, da M. Jovanović ovo svojstvo slučajnih pogrešaka ne prikazuje ispravno.

Zbog toga, pravilničko tumačenje korekturnog člana zaslužuje veću pažnju. Dva citirana obrazloženja razlikuju se uglavnom po tome što se kod prvog govori o malom broju sabiraka a kod drugog o malom broju merenja. Nesumljivo se međutim u oba slučaja misli na jednu te istu pojavu tj. na nedovoljnu kompenzaciju slučajnih pogrešaka u sumama koje sadrže manji broj adiranih mjerenja.

Odmah se uočava da pojava »nedovoljne kompenzacije slučajnih grešaka kod malog broja sabiraka« ne može ostati lokalizirana samo na formulama tolerancija. Postaje uslijed toga problematičan također, u teoriji pogrešaka dobro poznat, zakon adicije

$$m_{[\beta]} = m_\beta \sqrt{n} \tag{5}$$

Baš ova okolnost — da praktična primjena zakona (5) zakazuje — služi u radnji [8 — str. 51—53] kao opravdanje za uvođenje člana K u formule tolerancija. Tamo su naime sve trig. tačke podijeljene u grupe po broju kuteva koji zatvaraju horizont. Iz nesuglasica u zatvaranju horizonta, sračunate su za svaku grupu zasebno srednje pogreške sumiranih kuteva $m_{[\beta]}$ a zatim su po formuli

$$m_\beta = \frac{m_{[\beta]}}{\sqrt{n}} \tag{6}$$

dobivene srednje pogreške u mjerenju pojedinog kuta. Iako se radi o mjerenjima iste tačnosti, parametri m_β se u pojedinim grupama, znatnije međusobno razlikuju.

Iz gornjeg izlaganja se vidi, da je problem korekturnog člana i uz pravilničko obrazloženje, mnogo širih razmjera nego što to na prvi pogled izgleda. Jer ako je zakon adicije, u primjeni na mali broj adenada, općenito neispravan, postavlja se pitanje: predstoje li izmjene i nekih drugih klasičnih izraza za ocjenu tačnosti koji se baziraju na tom zakonu?

Evo na primjer jednog takvog izraza: tačnost mjerenja kuta izražena srednjom pogreškom m_β. u triangulaciji se računa iz nesuglasica trokuta f_Δ po formuli

$$m_\beta = \sqrt{\frac{[f^2_\Delta]}{3N}} \tag{7}$$

gdje je N — broj trokuta, a pojedine nesuglasice f_Δ su istinite pogreške za zbirove od svega tri adenda.

Međutim, ako se općenito dovodi u pitanje valjanost zakona adicije, ne može se mimoići niti druga strana tj. njegova teoretska podloga. Činjenica je naime, da taj zakon ima solidnu teoretsku podlogu, a neosporno je također, da se u velikom broju praktičnih primjena pokazao ispravan (i to bez obzira na broj adenada).

Očito je da kratko obrazloženje korekturnog člana, nameće cijeli niz pitanja. Dovoljno uvjerljivo ukazano je i na ozbiljnost problema odnosno važnost njegovog pravilnog interpretiranja. Budući da nije poznato sa kakvom podlogom odnosno na osnovu kakvih ispitivanja je uslijedilo citirano obrazloženje člana K, bit će korisno da se ovim člankom upozori i na neke druge uzroke koji dovode do potrebe uvođenja korekturnog člana, odnosno do toga da se neki zakoni klasične teorije pogrešaka ne mogu u potpunosti primijeniti.

II.

Pojedine formule u teoriji pogrešaka gdje se tretiraju slučajne pogreške, izvedene su uz izvjesne uslove, koji isto tako trebaju biti ispunjeni i kod praktične primjene tih formula. Veoma često se spominje i ponavlja da mjerenja trebaju biti oslobođena od uticaja sistematskih pogrešaka. Nedovoljno poznavanje karaktera sistematskih pogrešaka, pretstavlja danas jednu od glavnih zapreka realnom povećanju tačnosti geodetskih mjerenja. Zbog prisustva ovih pogrešaka dobivaju se nekada neopravdano visoke ocjene tačnosti izvršenih mjerenja. Jasno je da će u takvim primjerima izrazi izvedeni uz uvjet slučajnosti, na bilo koji način zakazati. Uvođenje korekturnog člana u formule za dozvoljena odstupanja uslijed ovakvih uzroka, ne bi pretstavljalo nikakvu novost.

Međutim, prema Pravilniku, nije suština u tome. Iz obrazloženja proizlazi, da zakoni slučajnih pogrešaka pokazuju kod gradskih mjerenja nedostatak baš u primjeni na slučajne pogreške. Pitanje se dakle postavlja samo: kalkulira li se u tim proračunima zaista sa slučajnim pogreškama onakovih svojstava na osnovu kojih su pojedini teoremi i izvedeni?

Na ovom mjestu ne će zato biti suvišno podsjetiti na ta svojstva prema udžbeniku [1]:

»1. Slučajne pogreške po apsolutnoj veličini ne mogu prelaziti određene granice. Veličina te granice ovisi od uslova u kojima se mjerenja vrše.
2. Slučajne pogreške — pozitivne i negativne — susreću se u nizu mjerenja jednako često.
3. Aritmetska sredina slučajnih pogrešaka mjerenja jedne iste veličine, i izvedenih kod jednakih uslova, ima tendenciju da se približava nuli, kad broj mjerenja neograničeno raste.«

Ovo treće svojstvo, naziva se svojstvom kompenzacije slučajnih pogrešaka a izražava se i formulom

$$\lim_{n \to \infty} \frac{[\varepsilon]}{n} = 0 \tag{8}$$

uz napomenu, da težnju gornjeg izraza k nuli treba shvatiti u statističkom smislu — kao prevladavajuću tendenciju.

Na osnovu tog svojstva slučajnih pogrešaka izveden je i već spominjani zakon adicije. Uz nužan uvjet, da su mjerenja nezavisna, dakle i slučajne pogreške koje ulaze u izraze $[\varepsilon]$, međusobno su nezavisne, valjanost tog zakona ne može doći u pitanje.* U nizovima pogrešaka koje se sumiraju (4), ne smije se prema tome pojaviti »nikakva vidljiva zakonitost ni po veličini ni po smjeru pri prelazu od bilo koje pogreške niza k susjednoj pogreški« [1 — str. 41]. Tada će srednja pogreška m_β koja karakterizira pojedinačna mjerenja (ili što je isto, pojedinačne pogreške ε) biti ispravno vezana zakonom adicije (5) sa srednjom pogreškom sumiranih mjerenja $m_{[\beta]}$ (tj. srednjom pogreškom za $[\varepsilon]$).

U primjeni na mjerenje kuteva metodom zatvaranja horizonta, postavlja se dakle pitanje: postoji li dovoljno garancija da su faktično učinjene pogreške kod mjerenja pojedinih kuteva, međusobno posve nezavisne? Na ovo pitanje ne bi se moglo odgovoriti pozitivno.

Radi jednostavnosti, razmotrit će se slučaj dvaju susjednih kuteva na stajalištu. Kutevi neka se mjere neposredno jedan iza drugog. Jedan isti pravac, vizura na srednju trig. tačku, opaža se i kod mjerenja prvog i kod mjerenja drugog — susjednog kuta. Zavisnost između istinitih pogrešaka kuteva, može proizaći uslijed jednakih ili neznatno izmijenjenih upliva kod opažanja iste tačke u prvoj seriji (kod mjerenja prvog kuta) i u drugoj seriji (kod mjerenja susjednog kuta). Kao primjer, navodi se, eventualno skretanje vizure djelovanjem bočne refrakcije. Smjer i veličina skretanja te vizure, zbog kraćeg vremenskog razmaka među serijama, vjerojatno se neće mnogo promijeniti. Grubo rečeno, vizura je i u prvoj i u drugoj seriji skrenuta za istu veličinu u istom smjeru, a susjedni kutevi (kao razlike mjerenih pravaca) opterećeni su pogreškama različitih predznaka. Pozitivnoj pogreški prvog kuta odgovara negativna pogreška susjednog kuta i obratno. Zavisnost pogrešaka je očita.

Po zakonima vjerojatnosti, u sumi dviju nezavisnih slučajnih pogrešaka, očekuju se sa jednakom vjerojatnoćom pogreške istog ili različitog predznaka. Dakle jednake su šanse da će se sumarna pogreška apsolutno povećati ili smanjiti. Međutim, kod gore opisane zavisnosti, sumarna pogreška (nesuglasica) ima tendenciju smanjenja. Ukoliko bi se dakle iz većeg broja takvih nesuglasica sračunala najprije srednja pogreška sumiranih mjerenja $m_{[\beta]}$ i zatim po zakonu adicije srednja pogreška m_β tako dobiven parametar ne će biti realni pokazatelj tačnosti pojedinačnih kuteva. Istinita tačnost je niža. Upotreba teorema adicije tada nije opravdana.

Gornji primjer uzet je samo za ilustraciju. Jer, uz isti stupanj zavisnosti, za susjedne kuteve na stanici, ova pojava bi ostala prikrivena tj. parametar m_β iz grupa sa različitim n bio bi uvijek za istu vrijednost smanjen.

---

* Riječi nezavisna mjerenja odnosno nezavisne pogreške, kod geodeta su već toliko ustaljene da se u raznim razmatranjima često ispuštaju, smatrajući normalnim da je taj uslov u primjeni pojedinih teorema ispunjen.

Na tačnost mjerenog kuta ne utiče samo jedan spomenuti izvor pogrešaka. Ostali izvori i po smjeru i po veličini djeluju različito, čime se jakost (stupanj) zavisnosti ublažava. Dalje, kod većeg broja kuteva na trig. tački (pravci su gušće raspoređeni oko horizonta) zavisnost se može mijenjati. Važan je također redoslijed mjerenja na stanici, odnos između pogrešaka kuteva koji nisu susjedni i još razne druge okolnosti. Sve ovo u velikoj mjeri komplicira istraživanje eventualne međusobne zavisnosti većeg broja kuteva, odnosno ispitivanje sumarnog upliva te zavisnosti na numeričke vrijednosti nesuglasica u zatvaranju horizonta.

Najvažnje je to, da se za zavisne pogreške ne mogu koristiti izrazi izvedeni uz uslov nezavisnosti. U kalkulacijama sa takvim pogreškama klasične formule će već prema stupnju zavisnosti u manjoj ili većoj mjeri zatajiti. Kod nižih stupnjeva zavisnosti, praksu će nesumljivo zadovoljiti i klasične formule uz dodatak korekturnog člana — dakle oblici formula koji su propisani Pravilnikom.

Općenito je eksperimentalno utvrđivanje niskih stupnjeva zavisnosti u velikoj mjeri otežano. Za to je potrebno raspolagati vrlo velikim brojem mjerenja.

Veću pažnju zaslužuje članak K.K. Skidanenka [7] u kojem se razmatra jedna od formi zavisnosti — tzv. korelativna zavisnost. Umjesto izraza (5), autor za ocjenu tačnosti kod kalkulacija sa korelativno zavisnim slučajnim pogreškama izvodi formulu:

$$m_{[\beta]} = m_{\beta} \sqrt{n + 2\Sigma\, r_{i.k}} \qquad (9)$$

U ovoj formuli, drugi član pod korjenom jest dvostruka suma koeficijenata korelacije r između pojedinih parova pogrešaka niza.* Ujedno je to korekturni član klasičnog izraza (5) izvedenog uz uslov nezavisnosti. Interesantno je ovdje, da se korekturni član nalazi pod korjenom. Inače je za praktičnu upotrebu formule (9) najprikladnije izraziti taj član kao funkciju broja mjerenja n.

Analizom izraza (9) moguće je zaključiti, kakve su posljedice, ako se u proračunima sa korelativno zavisnim slučajnim pogreškama koriste formule teorije nezavisnih slučajnih pogrešaka. Treba razlikovati dva slučaja tj. kad u nizovima pogrešaka član $2\,\Sigma\, r_{i,k}$ ima negativnu vrijednost ili kad je pozitivan.** U prvom slučaju, postupak da se iz nesuglasica za sume sračuna srednja pogreška adiranih mjerenja $m_{[\beta]}$ a zatim po formuli (6) srednja pogreška pojedinog kuta m_{β} — dovodi do apsolutno premalene numeričke vrijednosti parametra m_{β}. Faktična tačnost pojedinog kuta je manja. U drugom slučaju, desit će se obratno tj. faktična tačnost kuta će biti veća.

* Koeficijent linearne korelacije r, je mjerilo za jakost (stupanj) zavisnosti između dvije varijable, a može se nalaziti u granicama $-1 \leq r \leq +1$. Što je r po apsolutnoj vrijednosti bliži jedinici zavisnost je jača, a što je bliži nuli zavisnost je slabija. Kad je r = o, varijable su nezavisne.

** Za primjer negativnog koeficijenta korelacije između dvije varijable, može služiti prije opisana veza pogrešaka susjednih kuteva na trig. tački. Obratno je kod pozitivne korelacije. Tu se uz pojavu pozitivne pogreške sa većom vjerojatnoćom očekuje opet pozitivna pogreška, odnosno uz negativnu opet negativna.

Nesumljivo je, da zavisnost mjerenja ako se o njoj ne vodi računa može u pojedinim primjerima dati i krive predodžbe o tačnosti izvršenih mjernja i pogrešne podatke za ocjenu tolerancija.

Ovim izlaganjem ne namjerava se dokazivati da kod razmatranih gradskih mjerenja dolazi do izražaja zavisnost pogrešaka uslijed ovdje opisanih uzroka. Ovo je navedeno samo kao jedna mogućnost. Kako će kasnije biti vidljivo, zavisnost može proizaći i drugim putem,te i uzroci za uvođenje korekcionog člana mogu biti druge naravi.

III

U ovom su članku bili navedeni uslovi uz koje je izveden zakon adicije. Za razmatrani problem, veoma je važno uočiti, da pri tome nije spomenuta potreba da se slučajne pogreške mjerenja pokoravaju poznatoj normalnoj (Gaussovoj) razdiobi pogrešaka. Naime taj uslov i nije neophodan. Zakon adicije u primjeni na različiti broj adenada ipak ne će zbog toga zatajiti. Drugim riječima, srednje pogreške $m_{[\beta]}$ za grupe sa različitim brojem adenada n, nalazit će se unatoč tome u međusobnoj saglasnosti sa zakonom (5). Do opisane pojave različitog parametra m_β u radnji [8], dakle nebi došlo.

Međutim, srednja pogreška primjenjena na distribucije pogrešaka koje nisu normalne, nema više dobro poznatih svojstava prema kojima se unutar $\pm$ m nalazi 68% pogrešaka, unutar $\pm$ 2 m 95% itd. Obzirom na veličinu ekscesa distribucije, ovi procenti mogu biti različiti. Baš ova okolnost je od bitnog značenja za formule tolerancija. Jer sada propis prema kojem se za graničnu vrijednost usvaja na pr. dvostruka srednja pogreška, ne znači više da će time biti potrebno ponoviti 5% mjerenja.

Distribucije pogrešaka koje se razlikuju od Gaussove nisu u geodeziji rijetkost, a u novije se vrijeme prelazom na višu tačnost pojedinih vrsti mjerenja, sve češće susreću.

U radu sa nenormalnim distribucijama dolazi i do drugih komplikacija. — Neka osnovni skup pojedinačnih slučajnih pogrešaka ε ima simetričnu razdiobu ali koja se razlikuje od normalne. U tom slučaju teorija pogrešaka pokazuje da će se razdiobe za sume pogrešaka $[\varepsilon]$ iz tog skupa, sve više približavati normalnoj razdiobi. Razlike od normalne distribucije bit će to manje, što sume sadrže u sebi veći broj sabiraka n. Naravno da se i ovdje pretpostavlja nezavisnost i slučajnost pogrešaka koje ulaze u pojedine sume. Približavanje je naročito u početku vrlo brzo, čak i za oblike distribucija koji se znatno razlikuju od normalnog. —

Ako se dakle zbirovi $[\varepsilon]$ tretiraju kao nesuglasice adiranih mjerenja, pojedine distribucije nesuglasica (distribucije za nesuglasice sa n = 1, 2, 3, . . .) po svom obliku će se međusobno razlikovati unatoč tome što se radi o mjerenjima iste tačnosti. Promjenom n izvan neke granične vrijednosti

$$f_{n\ \mathrm{gran.}} = C \cdot m_\beta \sqrt{n} \tag{10}$$

(gdje je C odabrana konstanta), naći će se svaki puta različit procenat nesuglasica. Da taj procenat bude uvijek isti, izraz (10) bi trebalo dopuniti korekturnim članom, koji bi shodno izlaganju bio neka funkcija od n. Međutim, pošto se distribucije porastom n približavaju normalnoj, korekturni član bi već kod nekog konačnog n (koji i ne mora biti velik) praktički bio nepotreban.

IV

Općenita karakteristika novog Pravilnika II-A je osjetno veća tačnost, koja se zahtijeva za pojedine radove. Da bi se postigla tražena tačnost, predviđene su odgovarajuće metode mjerenja i niz propisanih tolerancija na osnovu kojih se vrši selekcija rezultata tj. zamjena podataka izvršenih opažanja sa podacima naknadnih opažanja.*

Novost za većinu izraza tolerancija jesu granične vrijednosti u smislu dvostruke srednje pogreške (2 m). Uvođenje kriterija 2 m umjesto dotadašnjeg 3 m, značajno je i za ostale precizne geodetske radove, ne samo u našoj zemlji nego i u inozemstvu.

Kriterij 2 m, koji je ujedno vezan uz veću eliminaciju mjerenja (kod normalne razdiobe cca 5%), jedan dio naših stručnjaka prihvatio je sa rezervom. Suprotna mišljenja došla su do izražaja u referatima i diskusiji na III Kongresu GIG-a Jugoslavije.** S druge strane, na nekim preciznim radovima većeg obima [8] kod nas primjenjene su još znatno uže granice tolerancija, odnosno izvedeni su naknadni radovi u većem opsegu.

P o n o v l j e n a   m j e r e n j a   m o g u   u   i z v j e s n o j   m j e r i   p o v e ć a t i   t a č n o s t   k o n a č n i h   r e z u l t a t a. Ovo i jest glavni argumenat u prilog uvođenja užih granica za prihvaćanje rezultata. Međutim, izbor širine zone dozvoljenih odstupanja u neku ruku je dvosjekli mač. Usvajanjem širih zona postoji sve veća opasnost da će pod »prihvativo« ući i veći broj mjerenja koja to nisu i suprotno — usvajanjem užih zona pod»prihvativo« neće ući veći broj mjerenja koja to jesu. Ova druga strana se u raznim razmatranjima, često i ne spominje.

Raspravljati općenito o opravdanosti neke određene širine zone dozvoljenih odstupanja, veoma je teško. Izbor oštrine kriterija, specifičan je za pojedine uslove i vrste mjerenja. Dobitak na tačnosti od ponovljenih mjerenja nesumnjivo postoji. Ipak, taj dobitak obično nije toliko velik, kao što to pokazuje omjer istih parametara za ocjenu tačnosti prije i nakon selekcije podataka. Da bi se to jasnije uočilo, ovdje će se jače naglasiti neke negativne strane vezane uz veća ponavljanja mjerenja.

U tu svrhu će se najprije pretpostaviti, da su naknadna — ponovljena mjerenja uslijedila uvijek na osnovu nesuglasica koje su ujedno istinite

---

* U cijelom ovom članku se pretpostavlja da su eventualne grube pogreške mjerenja isključene već ranije. Selekcijom se dakle odbacuju mjerenja sa nešto većim ali ipak normalnim odstupanjima koja se redovito pojavljuju kao posljedica slučajnosti pogrešaka.

** III. Kongres geodetskih inženjera i geometara Jugoslavije — Portorož, 24—27 oktobra 1962.

pogreške adiranih mjerenja. Zbog jednostavnosti, neka to budu na pr. nesuglasice u zatvaranju trokuta. Daljnja je pretpostavka, da se prvotna i naknadna mjerenja izvode istim metodama — jednakom tačnošću.

Ponavljanje mjerenja za nesuglasice sa krajeva distribucije, dovodi do poremećaja u njihovoj konačnoj razdiobi. Deformacije su upotrebom strožih kriterija veće. Umjesto normalne razdiobe u takvim se primjerima pojavljuju obično, na oba kraja oštro ograničene distribucije negativnog ekscesa. Karakterističan je premalen broj nesuglasica apsolutno bližih nuli, odnosno prevelik broj nesuglasica na području koje je bliže upotrebljenoj graničnoj vrijednosti. Nesuglasica izvan upotrebljne granice naravno nema, jer su takva mjerenja eliminirana.* — Nenormalne distribucije nesuglasica možda i nisu toliko važne. Međutim, kako će se još uočiti, *naknadnim mjerenjima unose se poremećaji i u unutarnji međusobni raspored pogrešaka pojedinih kuteva u trokutima.*

Ne treba posebno naglašavati da srednja pogreška sračunata iz selekcioniranih nesuglasica nije više realna ocjena faktičnih uslova i metoda mjerenja. *Srednja pogreška kuta po izrazu* (7) *također nije više ni objektivni pokazatelj tačnosti konačnih rezultata mjerenja. Istinita tačnost je uvijek niža, a disproporcija sa sračunatom ocjenom to veća, što su granice tolerancija uže.*

Mjerenja sa većim nesuglasicama, eliminiraju se iz razloga što u takvom slučaju postoji vjerojatnost da i rezultati pojedinih kuteva u trokutu, sadrže u sebi veće pogreške. Svrha ponovljenih opažanja bit će postignuta samo onda ako rezultati mjerenja pojedinih kuteva budu bliži svojoj pravoj vrijednosti. Dakle, naknadnim opažanjima nije cilj da se smanje nesuglasice trokuta. Radi se to zbog toga što će time biti *vjerojatno* smanjene i istinite pogreške pojedinih kuteva. Međutim veća vjerojatnost za to, postoji samo kod upotrebe širih granica tolerancija. Prelazom na strože kriterije ova vjerojatnost se sve više smanjuje.

Porijeklo nesuglasica, smatrajući ih kao zbroj od tri istinite pogreške kuteva u trokutu, može biti različito. Pojedini zbroj krije u sebi različite kombinacije predznaka i veličina istinitih pogrešaka kuteva. Nisu dakle isključene i ekstremne mogućnosti: apsolutno veća numerička vrijednost nesuglasice kao zbroj od tri manje pogreške istog predznaka i obratno, njena apsolutno manja numerička vrijednost kao rezultat većih pogrešaka različitog predznaka.

Prema tome, eliminiranjem izvjesnog procenta mjerenja sa većim nesuglasicama, odbacit će se ujedno i jedan dio dobrih mjerenja, dok s druge strane, zbog manjih nesuglasica, neće biti odbačen jedan dio lošijih mjerenja. Zakoni teorije vjerojatnosti dalje pokazuju, da će se *sa užim granicama (većim eliminacijama) odbaci-*

---

* Opisana svojstva ima empirička razdioba nesuglasica trokuta u trig. mreži grada Beograda, a to isto prema podacima [6-tabele 22] dolazi do izražaja i kod novih mjerenja na trig. mreži I reda u Jugoslaviji.

vati relativno sve veći dio dobrih mjerenja.* Ovdje se može ići i korak dalje pa konstatirati da — što su granice tolerancija uže, to će se događati sve više slučajeva da će se prvotni bolji rezultati, zamijeniti naknadnim lošijim rezultatima mjerenja.

Iz izlaganja je jasno, da od naknadnih mjerenja, izvedenih na bazi nesuglasica, ne treba uvijek očekivati i veću tačnost pojedinih kuteva u trokutu. Manja nesuglasica iz ponovljenih mjerenja, mogla se pojaviti uslijed povoljnije kompenzacije triju istinitih pogrešaka kuteva. Upravo ovakovih slučajeva bit će sve više, što su granice tolerancija uže. Dakle veća ponavljanja mjerenja, grubo rečeno, sve više se svode na iznalaženje povoljnijih kombinacija — boljih kompenzacija — predznaka i veličina pravih pogrešaka kuteva u trokutima. U takvim mrežama, bit će sve manje trokuta kod kojih su kutevi opterećeni pogreškama istog predznaka. Sve više će biti trokuta u kojima se uz negativne pogreške kuta redovito pojavljuju pozitivne i obratno; a ovo nije ništa drugo nego međusobna zavisnost pogrešaka unutar trokuta.** Prema tome, naknadnim opažanjima, u rezultate mjerenja unosi se međusobna zavisnost. Stupanj zavisnosti bit će to veći što su granice tolerancija uže.

Za izjednačenje kuteva u samostalnim trokutima, teorija najmanjih kvadrata propisuje ravnomjernu raspodjelu nesuglasice na sva tri kuta. Pri tome se naravno pretpostavlja da su pojedini kutevi mjereni istom tačnošću i da su mjerenja međusobno nezavisna. Nije teško zaključiti, da se izjednačenjem očekuje najveći dobitak na tačnosti u onim trokutima, čija je nesuglasica proizašla kao zbroj od tri pogreške istog predznaka. Međutim, kod gore opisane zavisnosti pogrešaka upravo takvih trokuta više nema. A u trokutima čiji su kutevi opterećeni pogreškama suprotnih predznaka, izjednačenje će redovito jedan ili dva kuta popraviti, ali isto tako jedan ili dva kuta pokvariti. Dobitak na tačnosti može biti samo neznatan. Ne zadržavajući se na izjednačenju samostalnih trokuta, izlaganje se smije i poopćiti: Kod nezavisnih mjerenja, od izjednačenja po metodi najmanjih kvadrata, očekuje se stanovito poboljšanje tačnosti. U slučaju zavisnih mjerenja to će poboljšanje biti sve manje što je stupanj zavisnosti veći.

Dio gornjeg razmatranja, odnosio se na mjerenje kuteva u trokutima, samo zbog jednostavnosti. Izneseni zaključci inače se općenito mogu proširiti i na ostale vrste mjerenja, a u nekim primjerima trebalo bi ih još dopuniti. Npr. kod mjerenja za koja su date formule (1) — (3), karakterističan je promjenjiv **n**. Zbog toga je važna i struktura tih formula, odnosno ispravna promjena širine zone dozvoljenih odstupanja kod različitog **n**. U protivnom, naknadna mjerenja mogu dovesti i

* Misli se relativno u odnosu na ukupni eliminirani procent mjerenja.

** Ovdje istaknuta forma zavisnosti odgovara negativnom koeficijentu korelacije. Time se ujedno uz pomoć izraza (9) bolje objašnjavaju uzroci uslijed kojih je u takvim primjerima sračunata tačnost uvijek viša od faktične.

do nejednakih težina pojedinih kuteva u grupama sa različitim n, a ova okolnost ne uzimajući je u obzir također negativno utiče na izjednačenje metodom najmanjih kvadrata. Iz tih razloga potrebno je, da se i prvotna i naknadna mjerenja izvode istim metodama — jednakom tačnošću. Zahtjev je važan zbog homogenosti konačnih rezultata izmjere.

Dalje je u dijelu gornjeg izlaganja pretpostavljeno, da se ocjena potrebe naknadnih mjerenja bazira na numeričkoj vrijednosti nesuglasica a koje su istovremeno prave pogreške adiranih mjerenja. Međutim, u raznim fazama radova, pojedina se mjerenja poništavaju i nadomiještaju novima, također i na bazi drugih kriterija, najčešće na bazi tzv. najvjerojatnijih pogrešaka. Ovakova odabiranja kriju u sebi naročite opasnosti. Nestručnim poništavanjem nekih rezultata (npr. eliminacijom pojedinih girusa kod mjerenja kuta) u takvim primjerima može se lako dogoditi da slučajne pogreške rezultata iz prvotnih mjerenja budu zamjenjene sa sistematskim pogreškama iz naknadnih mjerenja. Ova opasnost uvijek postoji, a primjenom raznih univerzalnih propisa za veće selekcije mjerenja, ona se ne smanjuje.

U izlaganju se namjerno nije razmatrala neka fiksna širina zone dozvoljenih odstupanja, jer propisani kriterij je specifičan za pojedine primjene a njegova faktična strogost gotovo je redovito nepoznata. Npr. brojka 2 u prvom članu s desne strane izraza (1) — (3), nije ujedno garancija da te formule zaista propisuju dvostruku srednju pogrešku kao graničnu; brojka je naime vezana s parametrom m_3, čija práva numerička vrijednost može u pojedinim uslovima biti različita i prethodnim selekcijama podataka u većoj ili manjoj mjeri iskrivljena. Kod složenijih izraza tolerancija osim njihove strukture, važna je i što ispravnija procjena pojedinih numeričkih vrijednosti ostalih članova.

V

Struktura formula za dozvoljena odstupanja i što objektivniji parametri u pojedinim članovima, važni su također i zbog korekturnog člana K. Numerički upliv člana K, pa i njegov smisao, može se znatnije mijenjati ako su brojne veličine ostalih parametara u izrazu tolerancije pogrešne. U tom pogledu već je i prije istaknuto da bi u nekim primjerima bilo teoretski ispravnije korekturni član staviti pod korjen zajedno s prvim članom.

Od ovdje navedenih formula za dozvoljena odstupanja, izraz (2) je najsloženiji, jer uzima u račun i tzv. polazne pogreške zadanih direkcionih kuteva. Oblik izraza (2) ne predviđa mogućnost kompenzacije ove pogreške sa pogreškama mjerenja u poligonometrijskim vlakovima iako takva mogućnost postoji. — Općenito teoretski nedostatak izraza (1) — (3) jest taj što se njihova forma mijenja kod određenog n.

Isticanjem negativnih strana naknadnih mjerenja u ovom članku, želja je bila ukazati ujedno na odstupanja od nekih osnovnih principa klasične teorije pogrešaka. Većim odabiranjem mjerenja, pojmovi »slučajnost pogrešaka« i »nezavisnost pogrešaka« sve više se gube; vrijednost pojedinih zakona teorije pogrešaka opada. Njihova praktična primjena zakazuje; ocjena tačnosti pomoću tih zakona nije više objektivna.

Na kraju članka, oportuno je još jednom podvući činjenicu, da su dosadašnji izrazi za ocjenu tačnosti i tolerancija, zakazali upravo pri prelazu na znatno povećanu tačnost mjerenja; a poznato je da preciznija mjerenja gotovo redovito sadrže u sebi i veće procente sistematskih pogrešaka. Razne vrste ovih pogrešaka i njihov pravi iznos ostaje prikriven u podacima opažanja. Dakle realno povećanje tačnosti tijesno je vezano uz što svestranije izučavanje i potpuniju eliminaciju sistematskih pogrešaka. Brojne zapreke koje se javljaju na tom putu mogu biti uspješno svladane samo upornim istraživanjima i analizama. Smisao korekcionog člana K u ovdje razmatranim mjerenjima upozorava na takav tip sistematskih pogrešaka σ, koje se većim sumiranjem mjerenja bolje prikrivaju dakle njihove sume

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_n = [\sigma] \tag{11}$$

teže k nuli i dostižu ovu vrijednost već kod nekog konačnog **n** koji i ne mora biti velik. Kod toga se naravno ne isključuje mogućnost i različitih veličina i različitih predznaka pojednačnih pogrešaka.

LITERATURA

1. Čebotarev: Sposob naimenjših kvadratov s osnovami teorii verojatnostej Moskva, 1958.
2. Čubranić: Račun izjednačenja — Zagreb 1958.
3. Jovanović: Gradska trigonometriska mreža (sa osvrtom na projekat pravilnika) — Zbornik geodetskog instituta — Beograd 1958.
4. Kemnic: Ocenka točnosti izmerenij s učetom dopuskov, ograničivajuščih nevjazki uslovnih uravnenij. — Izvestija VUZ, razdel Geodezija i aerofotosjomka No 2, Moskva 1961.
5. Savezna geodetska uprava: Pravilnik za državni premer II-A deo. Osnovni radovi na gradskom premeru — Beograd 1956.
6. Savezna geodetska uprava: Radovi savezne geodetske uprave na astronomsko-geodetskoj mreži. Referat za III Kongres GIG-a Jugoslavije.
7. Skidanenko: Koreljativno-zavisimie slučajnie ošibki v geodezičeskih izmerenijah .— Geodezija i kartografija No 10, Moskva 1958.
8. Svečnikov: Trigonometrijska mreža grada Beograda. — Beograd 1961.
9. Vranić: Vjerojatnost i statistika. — Zagreb, 1958.