NOVI VIDOVI BRÖNNIMANNOVIH FORMULA

Dr NIKOLA NEIDHARDT — Zagreb

Brönimann je postavio formule, po kojima se mogu izračunati koordinate one tačke u poligonskom vlaku, na kojoj je učinjena gruba pogreška u poligonskom kutu.

U časopisu Zeitschrift für Vermessungswesen 1963, u članku »Das Auffinden des Fehlerpunktes bei einem grobem Winkelfehler im Polygonzug«, W. Hamacher iz Kölna izveo je formule u istu svrhu, koje se razlikuju od Brönnimannovih. Kod toga navodi, da se njegove formule smiju upotrebiti u slučaju, kada je kutno grubo odstupanje u vlaku razmjerno maleno.

Želja mi je, da ovdje usporedim Brönnimannove formule sa Hamacherovima. Da stvar bude zornija, izvesti ću obe vrsti formula.

Zatim ću izvesti približne formule (7) koje smatram boljima od Hamacherovih.

Poligonski vlak neka se kutno ne slaže za neku grubu pogrešku δ. Kutna nesuglasica je recimo $f^{\beta} = -18'20''$. Kod toga neka je $\delta = +20$ gruba pogreška, a $-1'40''$ slučajna pogreška (unutar dozvoljenih granica). Veličina f_{β} ima predznak obratan nego što ga ima pogreška δ, jer f_{β} ima karakter popravka.

Na poligonske kutove u vlaku raspodjeli se samo npr. $+1'40'' = +100''$ i vlak izračuna u jednom smjeru. Koordinate završne tačke neka su kod toga dobivene sa y_n' i x'_n a trebale bi biti x_n i y_n. Koordinate y_i i x_i one tačke I na kojoj je grubo pogriješeno za δ, dobivaju se po Brönnimannovim formulama kako slijedi:

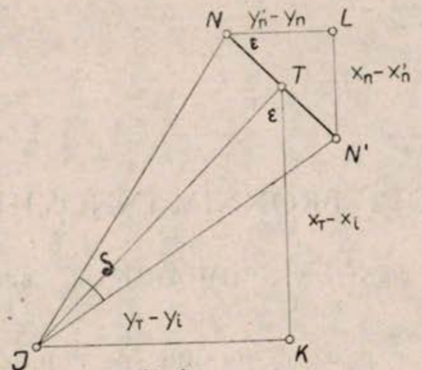
$$y_i = \frac{y_n + y'_n}{2} - \frac{x_n - x'_n}{2} \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \qquad (1)$$

$$x_i = \frac{x_n + x'_n}{2} + \frac{y_n - y'_n}{2} \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2}$$

Ove su formule egzaktne. Pretpostavka je jedino, da je u vlaku učinjena samo jedna gruba i to kutna pogreška.

U sl. 1 neka je **N**' (y'_n , x'_n) koordinatnim računom dobivena, a **N** (y_n , x_n) ispravna završna tačka vlaka. Koordinatna odstupanja neka su:

$$y'_n - y_n = - f_y \quad \text{i} \quad x_n - x'_n = f_x$$



Sl. 1

Razmak tačaka N i N' neka je b, a koordinate srednje tačke T su:

$$y_T = \frac{y_n + y'_n}{2} \quad \text{i} \quad x_T = \frac{x_n + x'_n}{2}$$

Dužina JT je:

$$JT = \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2}$$

Trokuti NNL i JTK su slični. Prema tome je:

$$y_T - y_i = JT \sin \varepsilon = \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \sin \varepsilon \qquad (2)$$

$$x_T - x_i = JT \cos \varepsilon = \frac{b}{2} \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \cos \varepsilon$$

Kako je:

$$\sin \varepsilon = \frac{x_n - x'_n}{b} = \frac{f_x}{b}$$

$$\cos \varepsilon = \frac{y'_n - y_n}{b} = \frac{-f_y}{b}$$

iz izraza (2) izlaze izrazi (1).

Hamacherov izvod je drugačiji. Uzastopni smjernjaci u vlaku neka su:

$$\nu_1 , \nu_2 , \ldots \nu_i , \ldots \nu_n$$

Od ν_1 do ν_{i-1} su ispravni, od ν_i do ν_n opterećeni svi istom grubom pogreškom δ. Deriviramo li po ν izraze za koordinatne razlike

$$\Delta y = d \sin \nu \qquad \text{i} \qquad \Delta x = d \cos \nu$$

dobivamo:

$$d \Delta y = d \cos \nu \, d \nu = \Delta x \, d \nu$$
$$d \Delta x = - d \sin \nu \, d \nu = - \Delta y \, d \nu.$$

Ako se uzme

$$d \nu = \delta$$

dobiva se da je završna tačka vlaka uslijed odstupanja δ pogrešna po osi y za iznos:

$$[\Delta x]^{n} \frac{\delta}{\varrho}$$

a po smjeru osi x za:

$$- [\Delta y]_{i}^{n} \frac{\delta}{\varrho}$$

Zbroj koordinatnih razlika od početka do kraja poligonskog vlaka je prema tome:

$$[\Delta y]_{o\ \text{jeste}}^{n} = [\Delta y]_{o\ \text{treba}}^{n} + [\Delta x]_{i\ \text{treba}}^{n} \cdot \frac{\delta}{\varrho} \tag{3}$$
$$[\Delta x]_{o\ \text{jeste}}^{n} = [\Delta x]_{o\ \text{treba}}^{n} - [\Delta y]_{i\ \text{treba}}^{n} \cdot \frac{\delta}{\varrho}$$

Odatle je:

$$[\Delta x]_{i\ \text{treba}}^{n} = x_n - x_i = \frac{[\Delta y]_{o\ \text{jeste}}^{n} - [\Delta y]_{o\ \text{treba}}^{n}}{\delta} \varrho = - \frac{f_y}{\delta} \varrho \tag{4}$$

$$[\Delta y]_{i\ \text{treba}}^{n} = y_n - y_i = \frac{[\Delta x]_{o\ \text{treba}}^{n} - [\Delta x]_{o\ \text{jeste}}^{n}}{\delta} \varrho = \frac{f_x}{\delta} \varrho$$

Dakle:

$$y_i = y_n - \frac{f_x}{\delta} \varrho \tag{5}$$

$$x_i = x_n + \frac{f_y}{\delta} \varrho$$

To su Hamacherove formule. One su približne. Izgrađene su uz pretpostavku, da se δ može tretirati kao diferencijalna veličina. Što veći je δ to veća će biti razlika između iznosa dobivenih po Brönnimannovim i Hamacherovim formulama. Brönnimannove su egzaktne. Hamacherove približne. Pogledajmo kolike su razlike i da li se mogu izvesti formule i približnije od Hamacherovih?

Pošto je $y_n - y'_n = f_y$ i $x_n - x'_n = f_x$ Brönnimannove izraze možemo pisati i ovako:

$$y_i = \frac{y_n + y_n - f_y}{2} - \frac{f_x}{2}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} = y_n - \frac{f_y}{2} - \frac{f_x}{2}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} \tag{6}$$

$$x_i = \frac{x_n + x_n - f_x}{2} + \frac{f_y}{2}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} = x_n - \frac{f_x}{2} + \frac{f_y}{2}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}$$

Ti iznosi su eggzaktni. A ako je δ razmjerno malen, pa se može uzeti

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\delta}{\varrho} \quad \text{odnosno} \quad \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} = \frac{2\varrho}{\delta}$$

dobiva se:

$$y_i = y_n - \frac{f_y}{2} - \frac{f_x}{\delta}\varrho \tag{7}$$

$$x_i = x_n - \frac{f_x}{2} + \frac{f_y}{\delta}\varrho$$

To su iznosi različni od Hamacherovih za $\frac{f_y}{2}$ i $\frac{f_x}{2}$.

Veličine $\frac{f}{\delta}\varrho$ lako se računaju log. računalom.

Približni iznosi (7) razlikuju se od ispravnih (6) za:

$$-f_x\left(\frac{\varrho}{\delta} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\right) = -f_x\,\Delta$$

i

$$f_y\left(\frac{\varrho}{\delta} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\right) = f_y\,\Delta$$

Veličine Δ su razmjerno malene na pr. za

$\delta =$	10'	30'	1°	10°	20°	30°	40°
$\Delta =$	0,000	0,001	0,002,	0,015	0,029	0,044	0,058

Prema tome za pronalaženje tačke, na kojoj je učinjena gruba kutna pogreška, možemo osim Brönnimannovih formula upotrebiti i formule (6) kao egzaktne ili (7) i (5) kao jače i nešto manje približne.

Gore smo uzeli δ kao pogrešku, a $f\beta$ kao popravak s predznakom obrnutim od δ. Ako zbog jednostavnosti veličini δ dademo isti predznak kao što ga ima $f\beta$, onda formule (1), (6), (7) i (5) prelaze u slijedeće izraze:

$$y_i = \frac{y_n + y'_n}{2} + \frac{x_n - x'_n}{2} \operatorname{ctg} \frac{\delta'}{2} \tag{1'}$$

$$x_i = \frac{x_n + x'_n}{2} - \frac{y_n - y'_n}{2} \operatorname{ctg} \frac{\delta'}{2}$$

$$y_i = y_n - \frac{f_y}{2} + \frac{f_x}{2} \operatorname{ctg} \frac{\delta'}{2} \tag{6'}$$

$$x_i = x_n - \frac{f_x}{2} - \frac{f_y}{2} \operatorname{ctg} \frac{\delta'}{2}$$

$$y_i = y_n - \frac{f_y}{2} + \frac{f_x}{\delta'} \rho \tag{7'}$$

$$x_i = x_n - \frac{f_x}{2} - \frac{f_y}{\delta'} \varrho$$

$$y_i = y_n + \frac{f_x}{\delta'} \varrho \tag{5'}$$

$$x_i = x_n - \frac{f_y}{\delta'} \varrho$$

Može se zamisliti i postupak, da se pogrešna tačka J računa ne od završne nego od p o č e t n e tačke A vlaka. Nakon izračunatih koordinatnih razlika i nesuglasica f_y i f_x od iznosa $(y_n - y_a)$ i $(x_n - x_a)$ odbiju se na pr. iznosi $(\frac{f_y}{2} - \frac{f_x}{\delta} \varrho)$ te $(\frac{f_x}{2} + \frac{f_y}{\delta} \varrho)$ iz (7') odnosno dodaju $\frac{t_x}{\delta} \varrho$ i $\frac{-t_y}{\delta} \delta$ iz (5'). Dobivaju se $y_i - y_a$ te $x_i - x_a$ i preko njih pogrešna tačka J.

DAS AUFFINDEN DES FEHLERPUNKTES BEI EINEM GROBEN WINKELFEHLER IM POLYGONZUG

Der Unterschied zwischen den Brönnimannischen und Hamacherischen Formeln wird untersucht. Die ersten sind exakt und können auch in der Form (6) gerechnet werden. Die Formeln (7) und (5) dagegen sind stärker beziehungsweise schwächer annähernd und die Approximation hängt von der Grösse des groben Fehlers ab. Wenn Einfachheits wegen dem δ das Vorzeichen von f gegeben wird, entstehen die Ausdrücke (1'), (6'), (7') und (5').

Als geeignetste Approximation schlägt der Autor seine Formeln (7) beziehungsweise (7') vor.