GRAFIČKA IZJEDNAČENJA POMOĆU VEKTORA

Ing. MIRKO BRUKNER — Geodetska tehnička škola Zagreb

1. GRAFIČKO IZJEDNAČENJE TAČAKA ODREĐENIH PRESIJECANJEM PRAVACA

Numeričko izjednačenje trig. tačaka, ili općenito tačaka određenih presijecanjem pravaca, iziskuje prilično opsežna računanja. Vrlo često ovo računanje odnosno izjednačenje daje kao rezultat neznatne popravke koordinata. O veličini popravki se kod numeričkog izjednačenja uglavnom ne može unaprijed prosuđivati. Zato numeričko izjednačenje u nekim slučajevima može biti neekonomično.

Opisana grafička metoda se temelji na teoriji najmanjih kvadrata, te je moguće provođenje strogog rješenja. Iz grafičke konstrukcije se može zaključiti o veličini odstupanja i popravki, kako, kutnih tako i linearnih. Izjednačenje sadrži izvjesna pomoćna numerička računanja, koja se sva mogu provesti s log. računalom, što predstavlja važnu prednost kod rada na samom terenu. Ova je metoda relativno brza, pogotovo ako se u nekim slučajevima zadovoljimo približnim rješenjem.

Kod ove metode se popravke pravaca prikazuju vektorima, koji moraju zadovoljavati uvjet:

$$V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2 = \min \qquad (1)$$

Dužine su općenito različite, a popravkama pravaca V odgovaraju određeni lukovi Δ, koje možemo tretirati vektorima.

Vektori Δ su definirani veličinom udaljenosti najvjerojatnijeg položaja tačke T od pravca i smjerom, koji je okomit na mjereni pravac (sl. 1).

Između vektora V i Δ postoji jednostavan odnos:

$$\vec{V_i} = \frac{\vec{\Delta_i}}{d_i} \qquad (2)$$

Uvrstivši ovaj izraz za $\overrightarrow{V_i}$ u jednadžbu (1), dobivamo:

$$\left(\frac{\Delta_1}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_2}{d_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\Delta_n}{d_n}\right)^2 = \min$$

Veličine Δ_i ovisne su o položaju tražene tačke T, koja je određena koordinatama y_T i x_T. Ako suma od $v_i^2 = (\Delta_i : d_i)^2$ mora biti minimum onda parcijalna derivacija te sume po y_T i x_T mora biti jednaka 0. Izrazimo stoga Δ_i i d_i i x_T sa y_T (sl. 1a):

$$\Delta_i = \cos\varphi_i (y_i - y_T) - \sin\varphi_i (x_i + x_T)$$

$$d_i^2 = (y_i - y_T)^2 + (x_i - x_T)^2 = y^2 - 2 y_i y_T + y_T^2 + x_i^2 - 2x_i x_T + x_T^2$$

pa derivirajmo parcijalno sumu od v_i^2:

$$\frac{\partial [v_i^2]}{\partial y_T} = 0 = \sum_1^n \frac{-2\Delta_i \cos\varphi_i \cdot d_i^2 - \Delta_i^2(-2y_i + 2y_T)}{d_i^4} =$$

$$= \sum_1^n \frac{-2\Delta_i [d_i^2 \cos\varphi_i - \Delta_i (y_i - y_T)]}{d_i^4} \approx \sum_1^n \frac{-2\Delta_i \cos\varphi_i}{d_i^2} =$$

$$= -2 \sum_1^n \text{projekcija} \frac{\Delta_i}{d_i^2} \text{ u os X} \qquad (3_x)$$

$$\frac{\partial [v_i^2]}{\partial x_T} = 0 = \sum_1^n \frac{2\Delta_i \sin\varphi_i \cdot d_i^2 - \Delta_i^2(-2x_i + 2x_T)}{d_i^4} =$$

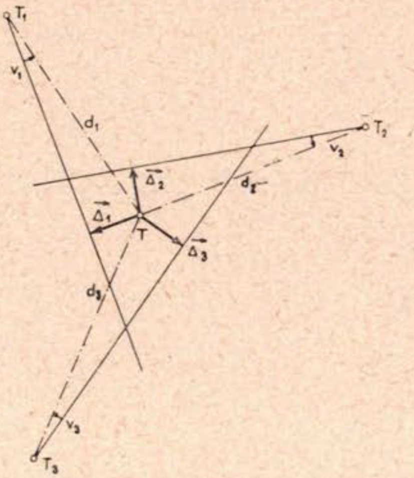
$$= \sum_1^n \frac{2\Delta_i [d_i^2 \sin\varphi_i + \Delta_i (x_i - x_T)]}{d_i^4} \approx \sum_1^n \frac{2\Delta_i \sin\varphi_i}{d_i^2} =$$

$$= 2 \sum_1^n \text{projekcija} \frac{\Delta_i}{d_i^2} \text{ u os Y} \qquad (3_y)$$

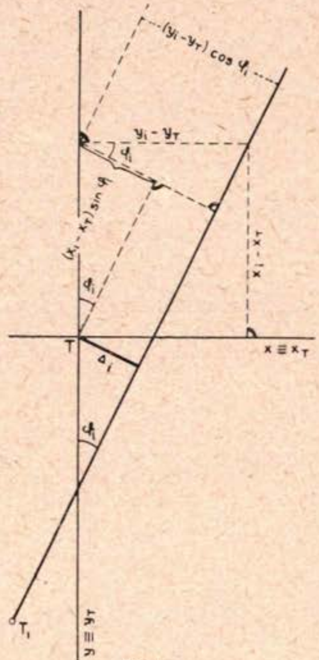
Izvršena približenja u (3_x) i (3_y) opravdana su time što je Δ_i vrlo maleno prema d_i (vidi izraz u uglatim zagradama), pa d_i pri varijaciji tačke T smatramo praktički konstantom. Formule pak (3_x) i (3_y) mogu se zajedno izraziti vektorski:

$$\frac{\overrightarrow{\Delta_1}}{d_1{}^2} + \frac{\overrightarrow{\Delta_2}}{d_2{}^2} + \ldots + \frac{\overrightarrow{\Delta_n}}{d_n} = 0 \qquad (3)$$

Najvjerojatnije koordinate tačke T će biti one, za koju je ispunjen uvjet (3), tj. da je za figuru pogrešaka što ju čine mjereni pravci, suma vektora Δ podijeljenog s kvadratom dužine, jednaka nuli.



Sl. 1



Sl. 1a

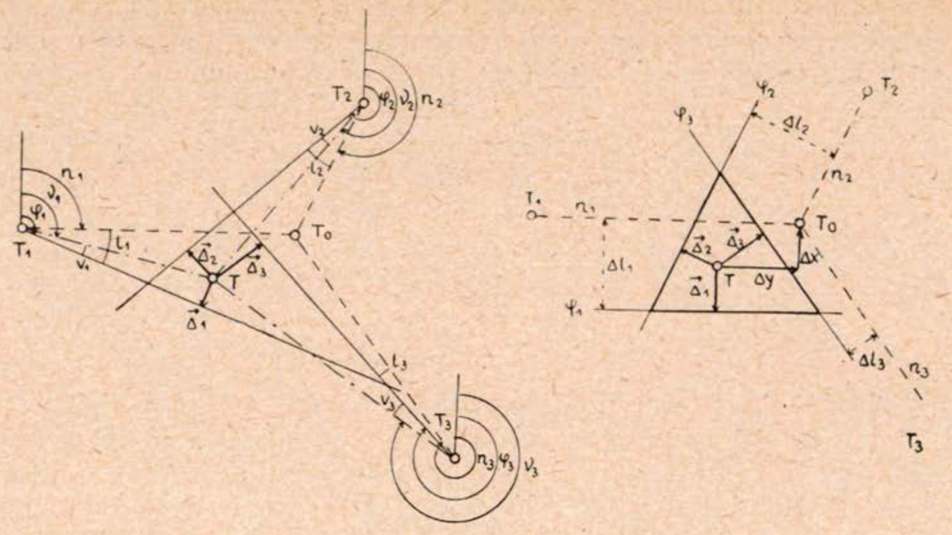
1.1. GRAFIČKO IZJEDNAČENJE PRESIJECANJA VANJSKIH PRAVACA

Kao podloga grafičkog izjednačenja služi skica, na kojoj su nanešene zadane i tražena tačka. Tačke mogu biti nanešene po koordinatama (na mm-papir), grafički ili uzete s topografske karte. Mjerilo skice je proizvoljno, ali ne bi trebalo biti sitnije od 1:50.000. Krupnije mjerilo skice i veća položajna tačnost nacrtanih tačaka, dat će i veću tačnost grafičkog izjednačenja.

Numerički dio računanja sastojao bi se u računanju približnih koordinata (yo, xo) tražene tačke To i približnih smjernih kuteva n.

Razlika $n - \varphi = l$ daje nam kutno odstupanje orijentiranog smjera φ od približnog smjernog kuta n.

Nanešenu tačku To smatramo kao tačku s približnim koordinatama, a pravce koji spajaju ovu tačku sa zadanim tačkama, kao približne smjerne kuteve n (sl. 2). Kako je $\varphi = n - l$ to ćemo orijentirane smjerove φ dobiti, ako od približnog smjera nanesemo veličinu -l. Pravci φ tada čine figuru pogrešaka, unutar koje treba naći tačku T za koju je ispunjen uvjet $\left[\frac{\vec{\Delta}}{d^2}\right] = 0.$



Sl. 2

Praktički su veličine l vrlo malene, te možemo uzeti, da su pravci φ kod tačke To paralelni s privremenim smjerovima n. Figuru pogrešaka ćemo zato narisati u krupnom mjerilu na taj način, što ćemo svaki l pomnožiti s dužinom d i tu veličinu

$$\Delta l = l \cdot d \tag{4}$$

nanijeti u proizvoljnom mjerilu, koje najbolje odgovara veličini papira i traženoj tačnosti (sl. 2 desno). Kod toga dužine pravaca d uzimamo izražene u km. Veličine Δl se moraju nanijeti sa suprotnim predznakom, od pravca n desno ili lijevo gledano iz smjera zadane tačke prema traženoj. Inače je pozitivni smjer, smjer rasta kuteva tj. u desno. Paralelno s pravcima n, a na udaljenosti Δl povlače se pravci φ, koji tada čine figuru pogrešaka unutar koje leži tražena tačka T. Dužine pravaca u km, potrebne za računanje Δl po formuli (4), kao i za kasnije nanašanje vektora $\frac{\vec{\Delta}}{d^2}$ se mogu grafički očitati sa skice tačaka. Vektor $\vec{\Delta}$ po svojoj veličini je definiran kao udaljenost tačke od pravca φ.

Zadatak se sada svodi na pronalaženje takve tačke unutar figure pogrešaka, za koju je ispunjen uvjet da je $\left[\frac{\vec{\Delta}}{d^2}\right] = O$, o čemu će biti naknadno govora.

Ako je u tački T ispunjen navedeni uvjet, tada smo odredili položaj tačke s najvjerojatnijim koordinatama. U mjerilu nanašanja veličina Δl mogu se očitati koordinatne razlike Δy i Δx, čiji je predznak definiran izrazima:

$$\Delta y = y_0 - y \quad i \quad \Delta x = x_0 - x \tag{5}$$

Definitivne popravke približnih koordinata dy i dx, dobit ćemo množenjem Δy i Δx s faktorom $\frac{1000}{\varrho''}$ jer smo dužine bili izrazili u km, a veličine Δl u kutnoj mjeri.

$$dy = \Delta y \cdot \frac{1000}{\varrho''} \qquad (6)$$

$$dx = \Delta x \cdot \frac{1000}{\varrho''}$$

Definitivne koordinate tražene tačke će biti:

$$y = y_0 + dy \qquad (6a)$$

$$x = x_0 + dx$$

Time je praktički zadatak izjednačenja postignut. Međutim kod ovog grafičkog izjednačenja mogu se još neposredno dobiti i popravke pravaca:

$$v'' = \frac{\Delta}{d} \qquad (7)$$

gdje se Δ očitava u mjerilu crtanja,, a d je izražen u km. Predznak popravke v se dobiva promatranjem iz svake tačke Ti. Ako se pravac φ pomiče (zakreće oko Ti) u smjeru kretanja kazaljke na satu (smjer porasta kuteva) pri prelasku u tačku T, tada će popravka imati pozitivan predznak, a u protivnom slučaju negativan.

Popravke v možemo koristiti za računanje [vv] i srednje pogreške mjerenog pravca φ.

Cjelokupno izjednačenje možemo kontrolirati pomoću definitivnih smjernih kuteva ν sračunati iz definitivnih koordinata, koji moraju biti identični sa smjernim kutevima dobivenim po formuli:

$$\nu = \varphi + v$$

Grafičko izjednačenje presjeka vanjskih pravaca je brzo, jednostavno i daje teoretski ispravno rješenje, te bi moglo imati korisnu primjenu.

1.2. GRAFIČKO IZJEDNAČENJE PRESIJECANJA UNUTARNJIH PRAVACA

Izjednačenje tačke određene presijecanjem unutarnjih pravaca je povezano s poteškoćom, što se ovdje pojavljuje još jedna nepoznanica do, koja predstavlja popravku privremenog kuta orijentacije (o).

Na sl. 3. je prikazan jedan unutarnji pravac sa svim njegovim elementima i popravkama.

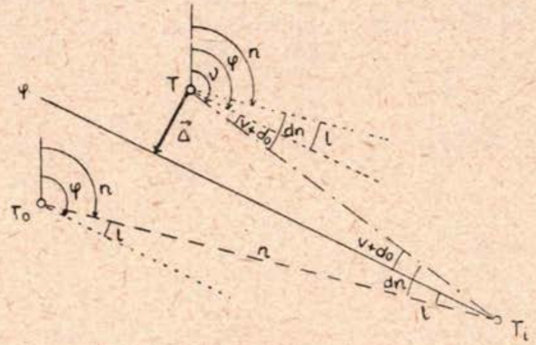
Iz sl. 3. je vidljivo da se figura pogrešaka za unutarnje pravce dobiva na potpuno identičan način kao i kod vanjskih pravaca. Od približnog smjera n se nanosi veličina -l, te se dobiva orijentirani smjer φ. Pravci φ tada čine figuru pogrešaka.

Do veličina l se dolazi postupkom kao kod numeričkog izjednačenja tj.

$$l_1 = n_1 - \alpha_1 - \frac{[o]}{n}$$

gdje je $$o_1 = n_1 - \alpha_1$$

Međutim za razliku od vanjskih pravaca pravac φ kod unutarnjih vizura odstupa od tačke T za iznos v + do (sl. 3.). Postupajući po gra-



Sl. 3

fičkom principu izjednačenja, identičnom kao kod vanjskih pravaca, dobili bi tačku za koju je ispunjen $[v + do]^2 = \min$, a ne onu za koju je $[vv] = \min$.

Popravka kuta orijentacije do, određena je formulom:

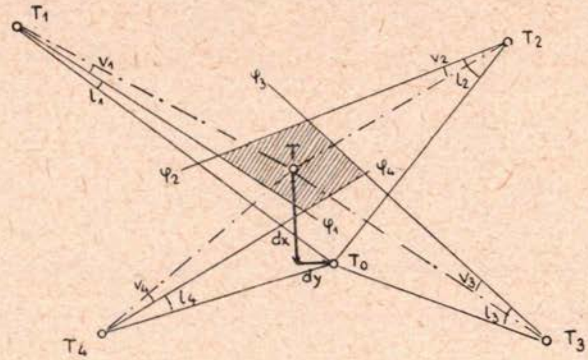
$$do = a_0\, dx + b_0\, dy \tag{8}$$

Veličina popravke ovisi o tačnosti kojom su određene približne koordinate i o koeficijentima ao i bo, koji su ovisni o rasporedu i dužini pravaca. Kad bi pravci bili iste dužine i pravilno raspoređeni po horizontu, tada bi bilo ao = o i bo = o pa bi i do bilo jednako nuli. Kod određivanja trig. tačaka postavlja se zahtjev, da pravci budu što bolje raspoređeni i podjednake dužine (da ne prelaze omjer 1:3). Zato možemo redovito pretpostaviti da je popravka do malena.

S pretpostavkom da je do = O, pravci φ odstupaju od tražene tačke T za iznos v, što je identično kao kod vanjskih pravaca. (sl. 4.). Prema tome će se identičnim grafičkim postupkom dobiti najvjerojatniji položaj tačke T i popravke koordinata dy i dx. Ovakvo rješenje mora se smatrati približnim, iako će ovako dobivene popravke u većini slučajeva neznatno odstupati od pravih (numerički određenih) popravki, što je vidljivo i iz kasnije navedenog primjera. Pogreške u određivanju popravki kretat će se u velikoj većini slučajeva u granicama ± 10% od veličine samih popravki.

U ovom približnom rješenju zadržana je identičnost rješenja kao kod vanjskih pravaca, te je time zadovoljena jednostavnost i brzina, a da tačnost, kako je napomenuto, nije bitnije dovedena u pitanje.

U koliko se ne zadovoljavamo s ovim približnim izjednačenjem koordinata, tada je postupak nešto duži tj. moramo ga nastaviti. Ovaj nastavak ima smisla samo u slučaju ako je raspored pravaca izričito nepravilan i ako su razlike u dužinama pravaca jako velike.



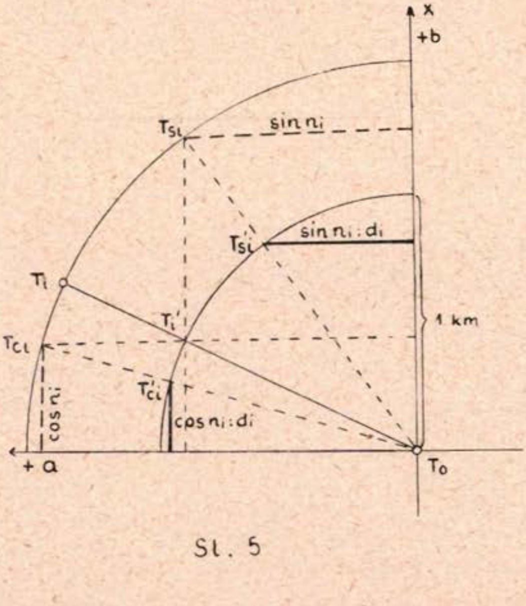
Sl. 4

U nastavku postupka je neophodno odrediti popravku kuta orijentacije do po formuli (8), odnosno koeficijenta ao i bo po formulama (9) i (10).

$$a_0 = \frac{[a]}{n} \quad ; \quad b_0 = \frac{[b]}{n} \tag{9}$$

$$a = -\frac{\sin n}{d} \cdot \varrho'' \quad ; \quad b = \frac{\cos n}{d} \cdot \varrho'' \tag{10}$$

Numeričko određivanje koeficijenata a i b prema form. (10) može se izbjeći relativno jednostavnom grafičkom konstrukcijom (sl. 5).

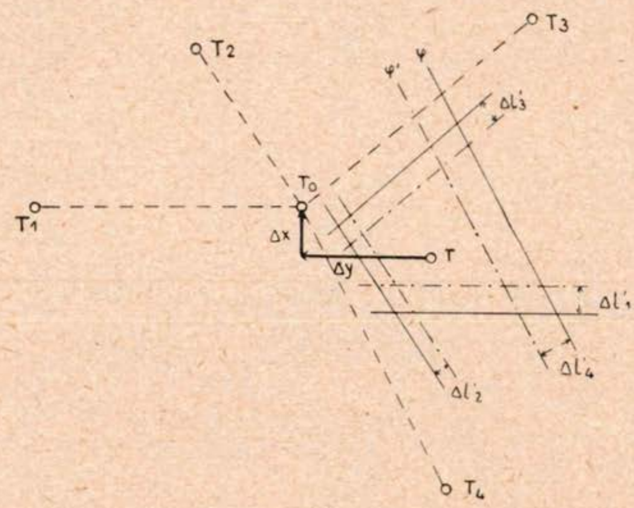


Sl. 5

Oko tačke To na skici tačaka, opisujemo kružnicu s radiusom 1 km u mjerilu skice. Na sjecištu ove kružnice s pravcem ToTi dobiva se tačka Ti'. Povlačenjem paralela s x i y osi kroz tačku Ti' do sjecišta s koncentričnom kružnicom kroz tačku Ti, dobivaju se tačke Tsi i Tci. Na sjecištu spojnica Tsi i Tci s To i kružnice radijusa 1 km, dobivaju se tačke Tsi' i Tci'. Ordinata tačke Tsi' predstavlja vrijednost sin n_i: $d_i$km, a apscisa tačke Tci' vrijednost cos n_i: $d_i$km.

Ovu konstrukciju načinimo za sve zadane tačke. Pomoću stotinjara (štek-cirkla) zbrajamo (po predznaku) veličine (sin n:d) i posebno veličine (cos n:d). Konačnu sumu očitamo na graduiranom pravcu mjerila 1:206,2 tj. $1:\frac{\varrho''}{1000}$ Za praktične svrhe bi u potpunosti zadovoljio i razmjernik u mjerilu 1:200. Time je dobivena vrijednost za [a] i [b] s predznakom koji je vidljiv iz slika. Konačno još preostaje sračunati ao i bo po formulama (9).

Koeficijente ao i bo, te popravke koordinata dy i dx određene ranijim grafičkim postupkom, koristimo za računanje popravke do po formuli (8).



Sl 6

Da bi se dobila ispravna figura pogrešaka (sl. 6) oslobođena pogreška do, potrebno je od približnog smjera n nanijeti kutne veličine (l-do), odnosno linearni iznos Δl = (l-do) . d. Ovo se praktički može izvesti i na taj način, što ćemo od postojećih pravaca φ nanijeti paralelne pravce φ' (sl. 6) s pomakom:

$$\Delta l' = -do \cdot d \tag{11}$$

Iz nove figure pogrešaka, dobit će se grafičkim rješenjem nove popravke koordinata $\Delta y'$ i $\Delta x'$ odnosno dy' i dx', koje će praktički odgovarati numerički računatim popravkama. Daljnje aproksimacije, s ponovnim određivanjem do, s novim $\Delta l'_{ii}$ i figurom pogrešaka, ne bi donijele neko znatnije povečanje tačnosti.

Popravke v_i za unutarnje pravce će se ponovo računati po formuli: (7), tj. $v_i = \frac{\Delta_i}{d_i}$, pomoću kojih možemo sračunati [vv] i m. Za konačnu kontrolu mogu poslužiti smjerni kutevi, sračunati s definitivnim koordinatama po formuli:

$$\nu = \alpha + (0) + do + v \tag{12}$$

Kod približnog izjednačenja će popravke v_i biti opterećene sistematskom pogreškom + do, ali će konačna kontrola sa smjernim kutevima odgovarati, jer ako uzmemo do = o, a umjesto v uzmemo v + do, ostaje gornja formula (12) nepromijenjena.

1.3. GRAFIČKO IZJEDNAČENJE PRESIJECANJA KOMBINIRANIM PRAVCIMA

Trigonometrijske tačke se najčešće određuju iz presjeka kombiniranih pravaca, što vanjskih što unutarnjih. Kod toga neki pravci mogu biti obostrani, a neki jednostrani. Prema dosadašnjem izlaganju, trebalo bi nanijeti paralelno s približnim smjerom n pravce φ, posebno za vanjske pravce, a posebno za unutarnje pravce. Tada bi trebalo naći tačku T za koju je $\left[\frac{\vec{\Delta}}{d^2}\right] = 0$.

Iz sl. 7. se vidi, da kod obostranog pravca imamo dva vektora. Δ_v i Δ_u (vanjski i unutarnji), koji imaju zajedničko ishodište i smjer.

Zato će biti:

$$\frac{\vec{\Delta}_v}{d^2} + \frac{\vec{\Delta}_u}{d^2} = \frac{1}{d^2}\,(\vec{\Delta}_v + \vec{\Delta}_u) = \frac{2}{d^2} \cdot \frac{\vec{\Delta}_v + \vec{\Delta}_u}{2} = \frac{2}{d^2} \cdot \vec{\Delta}$$

i konačno:

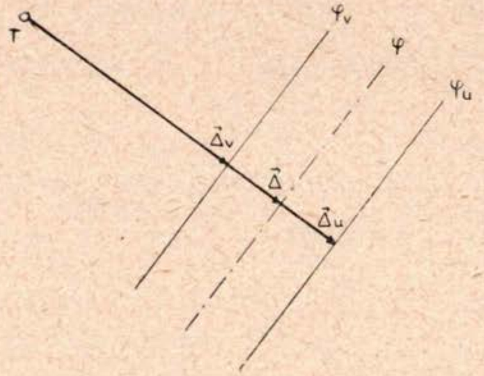
$$\frac{\Delta_v}{d^2} + \frac{\Delta_u}{d^2} = \frac{\Delta}{\frac{d^2}{2}} \tag{13}$$

Iz formule (13) i sl. 7 je vidljivo, da se u slučaju obostranog pravca, paralelno s n nanosi pravac $\varphi = \frac{\varphi_v + \varphi_u}{2}$, koji ima pomak:

$$\Delta l = \frac{l_v + l_u}{2} \cdot d \tag{14}$$

ali prilikom određivanja tačke T treba voditi računa, da vektor $\vec{\Delta}$ ima težinu p=2 tj. treba ga dijelii s $^1/_2\, d^2$ a ne s d^2.

Za jednostrane pravce vrijedilo bi i dalje dosadašnje pravilo, da je $\Delta l = l \cdot d$, a vektori bi imali težinu 1 i dijelili bi se s d^2.



Sl. 7

Grafičkim postupkom određena tačka T, kao i popravke dy i dx ne bi bile potpuno tačne, već bi predstavljale približno rješenje, jer su unutarnji pravci opterećeni pogreškom do. Utjecaj pogreške do bio bi u ovom slučaju, zbog prisustva vanjskih pravaca, koji su u tom smislu bez pogreške, još manji nego li u slučaju presijecanja samo s unutarnjim pravcima.

Za povećanje tačnosti, ako se ova smatra potrebnom, moglo bi se i ovdje pristupiti određivanju popravke do. Koeficijenti a_i i b_i bi se morali odrediti (grafički) samo za unutarnje pravce.

Ranije nanešeni pravci φ, morali bi tada dobiti pomak $\Delta l'$ da bi se eliminirala popravka do. Za jednostrane unutarnje pravce, $\Delta l'$ bi se računalo po formuli (11), za obostrane pravce po formuli:

$$\Delta l' = -\frac{do}{2} \cdot d \tag{15}$$

dok za jednostrane vanjske pravce ne bi bilo pomaka.

Ponovnim grafičkim određivanjem položaja tačke T, dobile bi se definitivne popravke koordinata dy' i dx', a eventualno bi mogli ponovo sračunati i do = ao . dx' + bo . dy'.

Iz definitivnih koordinata se mogu sračunati za kontrolu definitivni smjerni kutovi ν. Za vanjske pravce mora biti $\nu = \varphi + v$ a za unutarnje: $\nu = \alpha + (o) + do + v$.

Popravke pravaca bi se računale za jednostrane pravce po formuli (7), tj.

$$v'' = \frac{\Delta}{d}$$

dok bi se kod obostranih pravaca morale računati po formulama:

$$v_v = \frac{\Delta}{d} + \frac{l_v - l_u}{2} \qquad (16)$$

$$v_u = \frac{\Delta}{d} - \frac{l_v - l_u}{2} - do$$

1.4. ODREĐIVANJE NAJVJEROJATNIJEG POLOŽAJA TAČKE T

Figura pogrešaka odnosno položaj pravaca φ u odnosu na tačku To i traženu tačku T, dobiva se nanašanjem veličine — Δl od pravaca n. Mjerilo nanašanja ovisi o veličinama Δl, o potrebnoj tačnosti i veličini papira odnosno prostora za crtež. Zato je najzgodnija primjena trobridnog razmjernika. U tako odabranom mjerilu moraju se kasnije očitati koordinatne razlike Δy i Δx i veličina vektora Δ za određivanje popravki V.

Kod nanašanja vektora $\frac{\vec{\Delta}}{d^2}$ i kod konstruiranja sume tih vektora, mogu se dužine vektora $\vec{\Delta}$ neovisno od odabranog mjerila izražavati u mm, kod čega se možemo služiti log. računalom s kojim očitamo Δ, dijelimo ga s d^2 i odmah nanašamo ovaj kvocijent $\frac{\Delta}{d^2}$. Sve vektore $\frac{\vec{\Delta}}{d^2}$ možemo pomnožiti s proizvoljnom multiplikacionom konstantom, kako isti ne bi bili niti premaleni niti preveliki. Najpovoljnije je množenje s takvom konstantom k da $k \cdot \frac{1}{d_s^2}$ bude blizu 1, gdje je ds srednja dužina pravca.

1.4.1. Slučaj presjeka 2 (obostrana) pravca

I u slučaju presjeka dva obostrana pravca, moramo izvršiti izjednačenje, jer imamo jedno prekobrojno mjerenje. I u ovom slučaju možemo primijeniti grafičko izjednačenje. Ovdje ćemo nanijeti φ_1 umjesto φ_{1v} i φ_{1u}, i φ_2 umjesto φ_{2v} i φ_{2u}. Pravci φ_1 i φ_2 će se sjeći u tački T za koju je ujedno ispunjen uvjet $\left[\frac{\vec{\Delta}}{d_2}\right] = o$, jer su Δ_1 i Δ_2 jednaki nuli. Time je ujedno dobiven najvjerojatniji položaj tačke T.

1.4.2. Slučaj presjeka 3 pravca

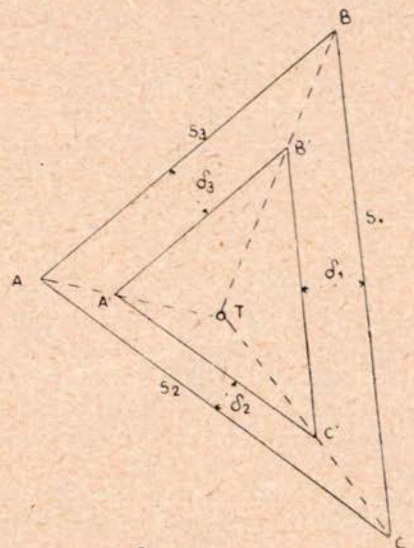
Tri pravca svojim presjekom daju općenito trokut kao figuru pogrešaka (sl. 8), a samo se iznimno sijeku u jednoj tački, koja u tom slučaju definira i traženu tačku T.

Da bi odredili položaj tačke T, potrebno je konstruirati novi trokut A' B' C' s paralelnim stranicama, unutar ili izvan zadanog trokuta ABC, kojeg daju pravci φ, a na udaljenosti δ_i (sl. 8). Veličine paralelnog pomaka δ potrebno je odrediti po formuli:

$$\delta_i = k \cdot s_i \cdot \frac{d_i^2}{p_i} \qquad (17)$$

U ovoj formuli je:

$k \cdot s_i$ — stranica trokuta u proizvoljnom mjerilu
d_i — dužina pravca
p_i — težina (za jednostrane pravce 1, a za obostrane pravce 2)



Sl 8

Ako se spoje odgovarajuće tačke trokuta AA' BB' i CC', na sjecištu tih spojnica ležati će tražena tačka T.

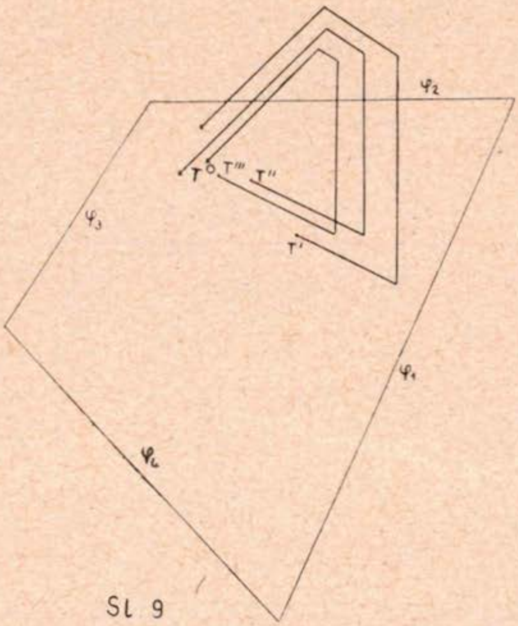
Za kontrolu se može nanijeti suma vektora $\frac{\vec{\Delta}}{d_2}$, koja mora biti jednaka nuli (vektori moraju dati zatvorenu figuru).

1.4.3. Opći slučaj presjeka većeg broja pravaca

U slučaju presjeka tačke s većim brojem pravaca, položaj tačke T nije moguće dobiti direktnom i jednostavnom grafičkom konstrukcijom. Ovdje su prikazana dva postupka za dobivanje položaja tačke T.

A. GRAFIČKI POSTUPAK

Grafički postupak je u stvari postupak postepenog približavanja. Unutar figure bi po volji odabrali tačku T', za koju bi konstruirali sumu vektora $\frac{\vec{\Delta}}{d^2}$. Suma vektora redovito neće biti jednaka nuli već će dati neko odstupanje f (neće se zatvarati). Ovo odstupanje raspolavljamo i u sredini ovog razmaka odabiremo novu polaznu tačku T'', za koju ponovno konstruiramo sumu vektora. Odstupanje ponovo dijelimo na dvoje i tako dobivamo tačku T'''. Postupak se ponavlja sve dok odstupanje f nije manje od tačnosti, koju tražimo za koordinate (sl. 9).



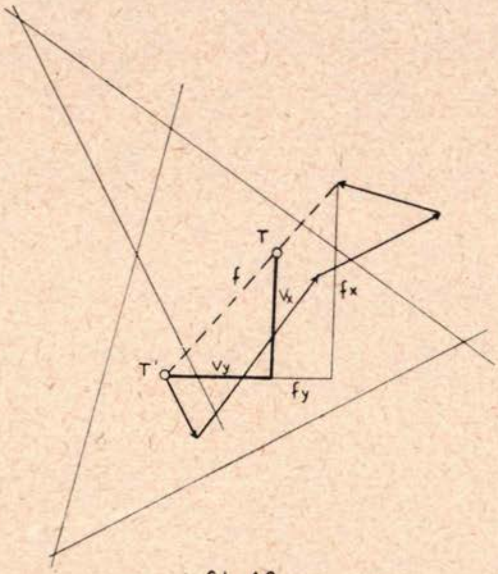
Sl 9

Redovito se sa 3—4 aproksimacije (ponavljanja) dolazi do cilja, što ovisi u mnogome o odabiranju prve tačke T'. Kod toga se treba rukovoditi principom, da će tražena tačka T vjerojatno ležati bliže onom pravcu φ, kojemu odgovara kraća dužina d.

Kod nanašanja vektora $\frac{\vec{\Delta}}{d_2}$ možemo sve vektore pomnožiti s istom multiplikacionom konstantom K, kako bi vrijednost $\frac{K}{d^2}$ bila što bliža jedinici. Ovo je naročito potrebno u slučaju većih dužina pravaca. Međutim, u ovom slučaju treba imati na umu, da će i odstupanje f biti K-puta veće i shodno tome treba postaviti tačku T u slijedećoj aproksimaciji.

B. NUMERIČKI POSTUPAK

Slično grafičkom postupku odabiremo proizvoljnu tačku T', za koju konstruiramo sumu vektora $\frac{\vec{\Delta}}{d^2}$, čime dobivamo odstupanje f . (rezultirajući vektor). Vektor f možemo rastaviti u dvije komponente: fy i fx. U daljnjem postupku se postavlja zahtjev: odrediti popravke Vy i Vx



Sl 10

između privremeno određene tačke T' i tražene tačke T. Veličine popravki Vy i Vx možemo odrediti po formulama:

$$V_y = \frac{A}{N} \cdot f_y \frac{C}{N} \cdot f_x \tag{18}$$

$$V_x = \frac{B}{N} \cdot f_x \frac{C}{N} \cdot f_y \tag{19}$$

gdje se koeficijenti: A, B, C i N mogu odrediti po formulama:

$$A = \left[\frac{\sin^2 \varphi}{d^2}\right] \tag{20}$$

$$B = \left[\frac{\cos^2 \varphi}{d^2}\right] \tag{21}$$

$$C = \left[\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{d^2}\right] \tag{22}$$

$$N = A \cdot B - C^2 \tag{23}$$

Radi ograničenosti prostora, nisu ovdje dani izvodi, već su dane samo gotove formule.

Koeficijente A, B i C možemo odrediti na tri načina:

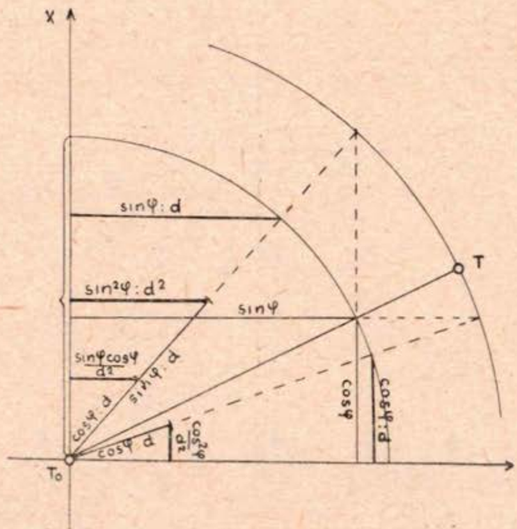
1) numerički
2) grafički
3) pomoću nomograma.

1) Numeričko određivanje koeficijenata A, B i C

Za numeričko određivanje koeficijenata A, B i C prema formulama: (20), (21) i (22), poželjno bi bilo sastaviti tablicu funkcija: $\sin^2\varphi$, $\cos^2\varphi$ i $\sin\varphi \cdot \cos\varphi$ za svaki stupanj od 0^0 do 45^0. Iz tablice bi tada bilo jednostavno izvaditi odgovarajuću veličinu i pomoću log. računala ju podijeliti s pripadnim d^2. Umjesto tablice bi mogao poslužiti nomogram tih funkcija, u kojem bi se grafički očitale vrijednosti: $\sin^2\varphi$, $\cos^2\varphi$ i $\sin\varphi \cdot \cos\varphi$.

2) Grafičko određivanje koeficijenata A, B i C

Za grafičko određivanje koeficijenata A, B i C, koristi se konstrukcija na (sl. 5), koja se još mora neznatno dopuniti (sl. 11). Radi toga je ovaj postupak posebno preporučljiv, ako su grafički bili određivani koeficijenti a i b, radi određivanja a_0 i b_0.



Sl. 11

Na sl. 11 je prikazan postupak za određivanje veličina: ($\sin^2\varphi : d^2$), ($\cos^2\varphi : d^2$) i ($\sin\varphi \cos\varphi : d^2$), koje se pomoću stotinjara mogu grafički zbrojiti i time direktno dobiti koeficijenti A, B i C. Ovdje jedino treba imati na umu, da su veličine $\sin^2\varphi : d^2$ i $\cos^2\varphi : d^2$ uvijek pozitivne, dok je veličina: $\sin\varphi\cos\varphi : d^2$ pozitivna u 1. i 3. kvadrantu a negativna u 2. i 4. kvadrantu, o čemu treba voditi računa kod grafičkog zbrajanja.

IZJEDNAČENJE KOORDINATA TAČKE ODREĐENE PRESIJECANJEM PRAVACA

Mjerilo skice tačaka 1:20.000 .Mjerilo crteža 1:25 (1" = 4 mm)

T	d_{KM}	l_v	l_u	l_s	Δl	d^2	$\frac{d^2}{Kp}$	a	b	$\Delta l'$	Δ	$\frac{l_v - l_u}{2}$	V_v	V_u	(V_v)	(V_u)
△69	1.04	+ 24			+ 24.9	1.1					+ 1.2		+ 1.2		(+ 1.0)	
△49	1.62	0			0	2.6					+ 2.8		+ 1.7		(+ 1.6)	
△70	1.18	− 15			− 17.7	1.4					+ 1.6		+ 1.4		(+ 1.2)	

1. Približno izjednačenje

$\Delta y =$ $dy =$ ( )

$\Delta x =$ $dx =$ ( )

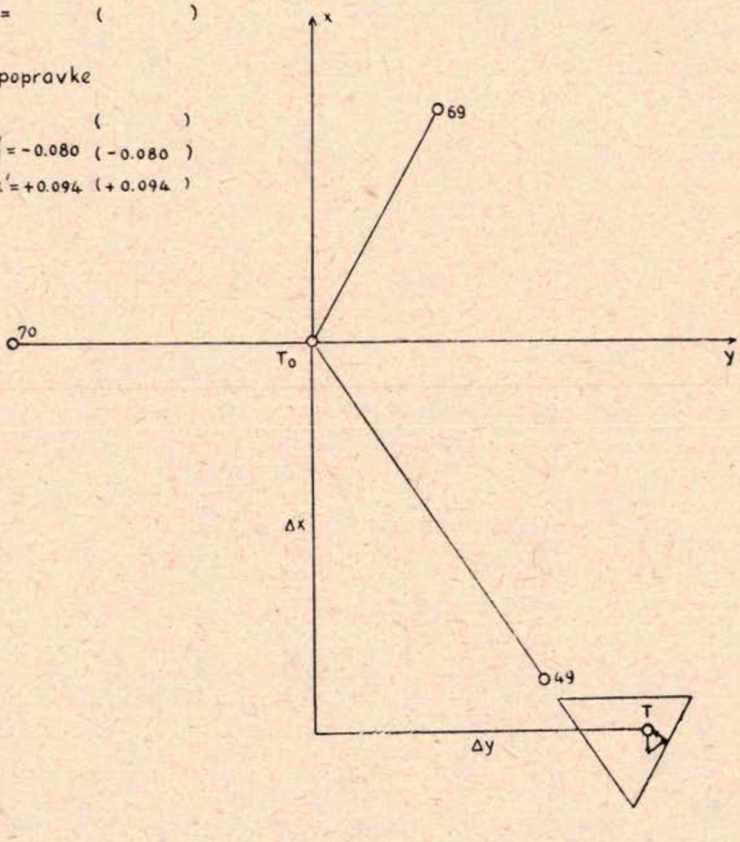
2. Definitivne popravke

$do =$ ( )

$\Delta y' = -16.4$ $dy' = -0.080$ (-0.080)

$\Delta x' = +19.3$ $dx' = +0.094$ ($+0.094$)

$do =$



Primjedba: Ovo je primjer izjednačenja vanjskih pravaca.
U zagradi su podaci dobiveni numeričkim izjednačenjem

IZJEDNAČENJE KOORDINATA TAČKE ODREĐENE PRESIJECANJEM PRAVACA

Mjerilo skice tačaka 1:20 000 Mjerilo crteža 1:50 (1" = 2mm)

T	d_{KM}	l_v	l_u	l_s	Δl	d^2	$\frac{d^2}{K \cdot p}$	a	b	$\Delta l'$	Δ	$\frac{l_v - l_u}{2}$	V_v	V_u	(V_v)	(V_u)
8 173	2.26		− 15		− 33.8	5.1		− 16	+ 91	+ 5.9	− 27.1			− 12.0		(− 11.2)
8 69	1.04		+ 5		+ 5.2	1.1		− 96	+ 178	+ 2.6	+ 6.2			+ 6.1		(+ 6.2)
8 47	0.62		+ 14		+ 8.7	0.4		− 274	− 184	+ 1.6	− 0.7			− 1.1		(− 0.9)
8 49	1.62		+ 5		+ 8.1	2.6		− 70	− 105	+ 4.2	+ 3.2			+ 2.0		(+ 2.4)
8 70	1.18		− 10		− 11.8	1.4		+ 175	0	+ 3.1	− 1.5			+ 1.3		(+ 2.3)

$a_0 = -56$ $b_0 = -4$

1. Približno izjednačenje

$\Delta y = +4.3$ $d_y = +0.021$ $(+0.018)$

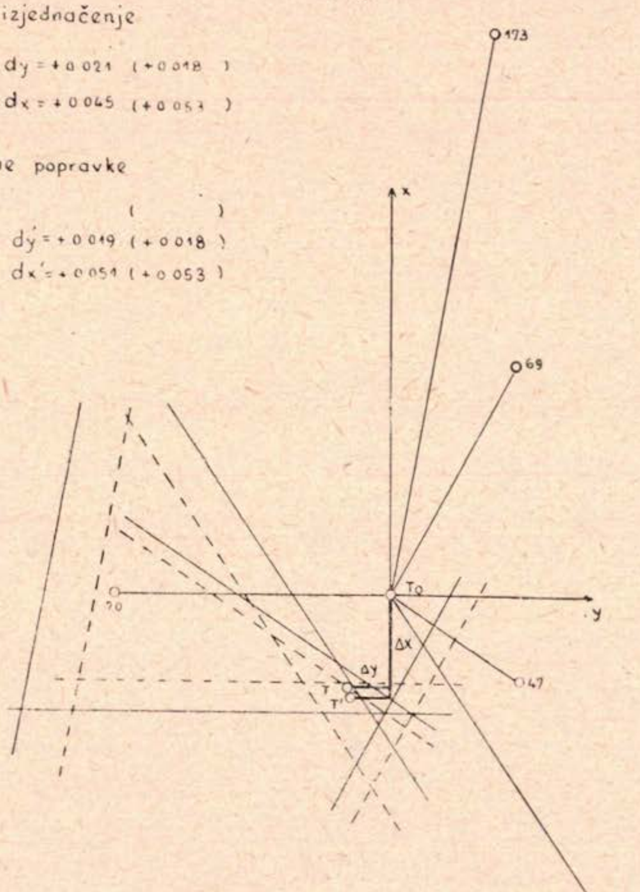
$\Delta x = +9.2$ $d_x = +0.045$ $(+0.053)$

2. Definitivne popravke

$d_0 = -2.6$ $(\quad)$

$\Delta y' = +3.9$ $d_y' = +0.019$ $(+0.018)$

$\Delta x' = +10.4$ $d_x' = +0.051$ $(+0.053)$



Primjedba: Ovo je primjer izjednačenja unutarnjih pravaca.
U zagradi su podaci dobiveni numeričkim izjednačenjem
——— prvobitni pravci 4
– – – pravci promijenjeni za do

IZJEDNAČENJE KOORDINATA TAČKE ODREĐENE PRESIJECANJEM PRAVACA

Mjerilo skice tačaka 1:20.000 Mjerilo crteža 1:20 (1″ = 5 mm)

T	d_{KM}	l_v	l_u	l_s	Δl	d^2	$\frac{d^2}{K \cdot p}$	a	b	$\Delta l'$	Δ	$\frac{l_v - l_u}{2}$	V_v	V_u	(v_v)	(v_u)
173	2.26	+22	-14	+4	+9.0	5.1	2.6				+3.3	+18	+19.5	-16.5		
69	1.04	0	—	0	0	1.1	1.1				-5.4	—	-5.2			
47	0.62	-7	—	-7	-4.3	0.4	0.4				-2.2	—	-3.5			
70	1.18	-25	+15	-5	-5.9	1.4	0.7				-4.7	-20	-24.0	+16.0		

1. Približno izjednačenje

$\Delta y = -5.5$ $dy = -0.027$ (-0.027)

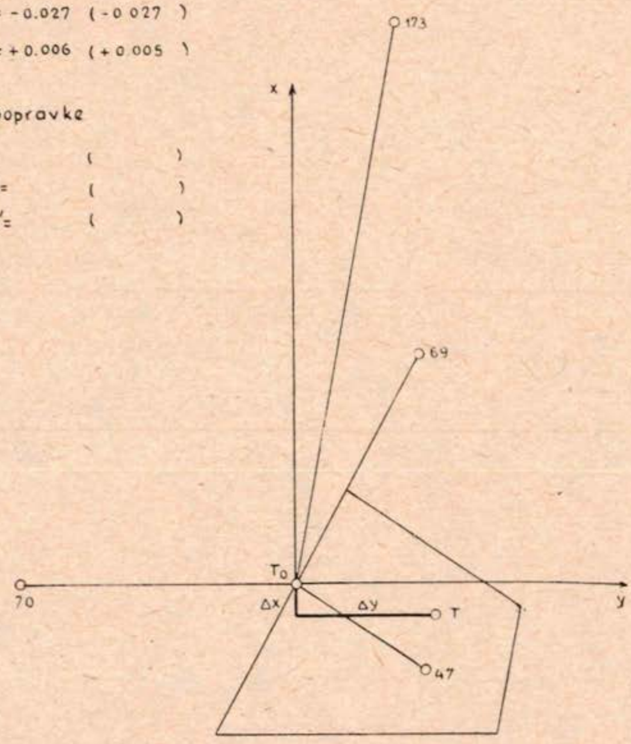
$\Delta x = +1.3$ $dx = +0.006$ $(+0.005)$

2. Definitivne popravke

$do =$ ( )

$\Delta y' =$ $dy' =$ ( )

$\Delta x' =$ $dx' =$ ( )



Primjedba: Ovo je primjer izjednačenja kombiniranih pravaca.
U zagradi su podaci dobiveni numeričkim izjednačenjem

3. Određivanje koeficijenata A, B i C pomoću nomograma

Za ovu svrhu su potrebna dva nomograma. Na jednom su urisane krivulje funkcija: $\sin^2\varphi$, $\cos^2 \varphi$ i $\sin \varphi \cdot \cos\varphi$. Na drugom nomogramu bi se sa očitanom vrijednošću funkcije pomoću stotinjara dobila vrijednost podijeljena s d^2.

U svim navedenim slučajevima potrebno je u slučaju obostranog pravca, izraze $\sin^2\varphi : d_o$, $\cos^2\varphi : d^2$ i $\sin\varphi \cos\varphi : d^2$ uzeti s težinom $p = 2$, odn. uzeti dva puta. Ovo je jedino nepotrebno, ako su svi pravci obostrani.

Kod konstrukcije prvobitne sume vektora $\frac{\vec{\Delta}}{d^2}$ radi određivanja odstupanja f, mogu se svi vektori pomnožiti s proizvoljnom konstantom K, ali će tada i dobiveno odstupanje f biti K-puta veće.

Koeficijente A, B i C nije potrebno odrediti s naročitom tačnošću, jer se i onako radi o malim odstupanjima f_y i f_x odn. v_y i v_x. Popravke položaja tačke v_x i v_y se po predznaku uglavnom poklapaju s predznakom od f_y i f_x, osim u slučaju ako je f_y i f_x, vrlo malo, kada može doći do nepodudaranja u predznaku.

Za kontrolu je dobro u definiranoj tački T, konstruirati sumu vektora $\frac{\vec{\Delta}}{d^2}$, koja mora dati nulu.

1.5. Prednosti grafičke metode izjednačenja

Prednosti grafičke metode pred numeričkom se sastoje u boljem uvidu o odstupanjima pravaca, radu bez upotrebe računskog stroja i većoj brzini dobivanja rezultata. Grafičkom metodom se uštеđuju slijedeće operacije:

1. Određivanje koeficijenata a i b sa kontrolom
2. Sastav normalnih jednadžbi
3. Rješavanje normalnih jednadžbi
4. Računanje popravaka v

tj. najveći dio rada kod numeričkog izjednačenja.

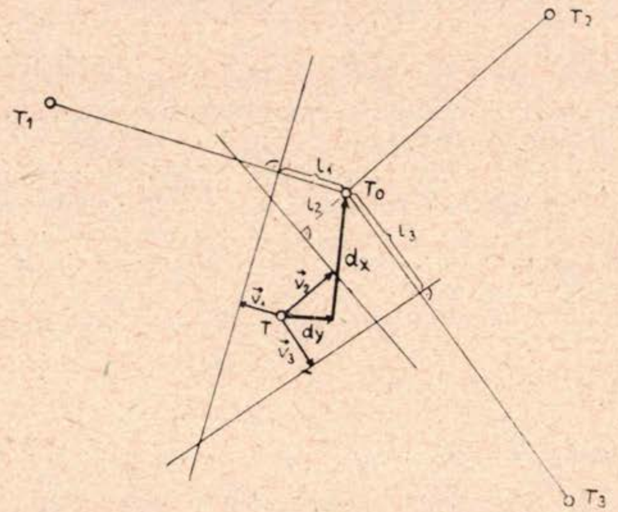
Kao najvažnije mane su: mogućnost pogreške u predznaku pri ucrtavanju pravaca φ i eventualna manja tačnost.

2. GRAFIČKO IZJEDNAČENJE LUČNOG PRESJEKA

Koordinate tačke određene lučnim presjekom mogu se dobiti grafičkim izjednačenjem na istom principu kakav je prikazan za tačke određene presijecanjem pravaca. Za razliku od izjednačenja tačaka određenih presijecanjem, izjednačenje lučnog presjeka je jednostavnije, brže i temelji se u potpunosti na principu najmanjih kvadrata, što kod presijecanja pravaca nije uvijek slučaj (radi unutarnjih pravaca). Ovdje je postupak jednostavniji, jer su odstupanja i popravke mjerenih veličina izražene u linearnim iznosima. Ovdje se direktno dobivaju: figura pogrešaka, popravke koordinata i popravke mjerenih dužina.

Ako sa mjerenim dužinama opišemo lukove oko zadanih tačaka, oni se neće sjeći u jednoj tački, već će činiti figuru pogrešaka. Figura pogrešaka je u odnosu na mjerene dužine vrlo malena, pa lukove možemo zamijeniti pravcima, koji su okomiti na mjerene dužine (sl. 12). Unutar figure pogrešaka potrebno je naći tačku T, za koju je

$$[ppv] = min$$



Sl. 12.

Ako popravke dužina v smatramo vektorima, tada mora biti:

$$p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \ldots + p_n v_n^2 = min \qquad (22)$$

Kako su kod mjerenja dužina težine:

$$p = \frac{1}{d} \qquad (24)$$

to će formula (24) poprimiti oblik:

$$\frac{v_1^2}{d_1} + \frac{v_2^2}{d_2} + \ldots + \frac{v_n^2}{d_n} = min \qquad (26)$$

Analogno izvodu (3) dobivamo

$$\frac{\vec{v_1}}{d_1} + \frac{\vec{v_2}}{d_2} + \ldots + \frac{\vec{v_n}}{d_n} = 0 \qquad (27)$$

Unutar figure pogrešaka potrebno je prema tome naći takvu tačku T, za koju je ispunjen uvjet (27), da vektorska suma vektora $\vec{v}$ podijeljenih s odgovarajućom dužinom bude nula.

Vektori $\vec{v}$ su definirani sa svojom dužinom, koja predstavlja udaljenost tačke T od pravca (granice) figure pogrešaka, a smjer mu je okomit na taj pravac odn. paralelan s mjerenom dužinom.

Numerički je potrebno sračunati približne koordinate tačke To (yo, xo), privremene dužine d_0, sračunate iz približnih koordinata i odstupanja: $l = d_0 - d$ (28)

Skicu tačaka imamo na detaljnoj skici ili skici linijske mreže. U protivnom slučaju je potrebno načiniti skicu na mm-papiru iz poznatih koordinata.

Od tačke T_0 nanosit ćemo odstupanja l u nekom proizvoljnom krupnom mjerilu (1:1, 1:2, 1:5 ili sl.). Veličine odstupanja l se nanose uzduž mjerenih dužina (sl. 12). Na taj način se dobiva figura pogrešaka, unutar koje je potrebno naći tačku, za koju je

$$\left[\frac{\vec{v}}{d}\right] = 0.$$

Popravke koordinata dy i dx se mogu direktno očitati u odabranom mjerilu crteža. Predznak popravki je ponovno definiran izrazima: $dy = y_0 - y$ i $dx = x_0 - x$ kao u form. (5). Definitivne koordinate će tada biti:

$$y = y_0 + dy$$

$$x = x_0 + dx$$

U mjerilu crteža mogu se neposredno očitati i popravke v mjerenih dužina. Jedino je potrebno paziti na predznak koji je pozitivan ako se prema slici dužina treba smanjiti i obratno.

Za određivanje položaja tačke T unutar figure pogrešaka stoje nam na raspolaganju iste metode, kao kod grafičkog izjednačenja tačaka adređenih presijecanjem pravaca.

U slučaju trokuta, tj. lučnog presjeka iz 3 tačke, postupilo bi se na isti način kao u ranije opisanom slučaju (1.4.2) i (sl. 8.). Paralelno sa stranicama trokuta nanose se nove stranice na udaljenosti δ, koje bi se sada računale po formuli:

$$\delta_i = k \cdot s_i \cdot d_i \tag{29}$$

U slučaju lučnog presjeka iz većeg broja tačaka, možemo kao kod tačke određene presijecanjem pravaca, koristiti grafičku i numeričku metodu. Kod izbora metode treba voditi računa o tome, da numerička metoda iziskuje relativno mnogo vremena.

Grafička metoda bi se odvijala identično opisanom postupku pod 1.4.3. A, s tim da vektore dijelimo s d a ne s d^2.

Kod numeričkog postupka bi slično onom pod 1.4.3. B odabrali tačku T', te odredili f, fy i fx. Popravke položaja tačke v_y v_x računali bi po istim formulama:

$$v_y = \frac{A}{N} \cdot f_y - \frac{C}{N} \cdot f_y \qquad v_x = \frac{B}{N} \cdot f_x - \frac{C}{N} \cdot f_y$$

gdje je: $N = A \cdot B - C^2$

Međutim, koeficijenti A, B i C bi se sada računali analogno prijašnjem, po formulama::

$$A = \left[\frac{\sin^2 \varphi}{d}\right] \tag{30}$$

$$B = \left[\frac{\cos^2 \varphi}{d}\right] \tag{31}$$

$$C = \left[\frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{d}\right] \tag{32}$$

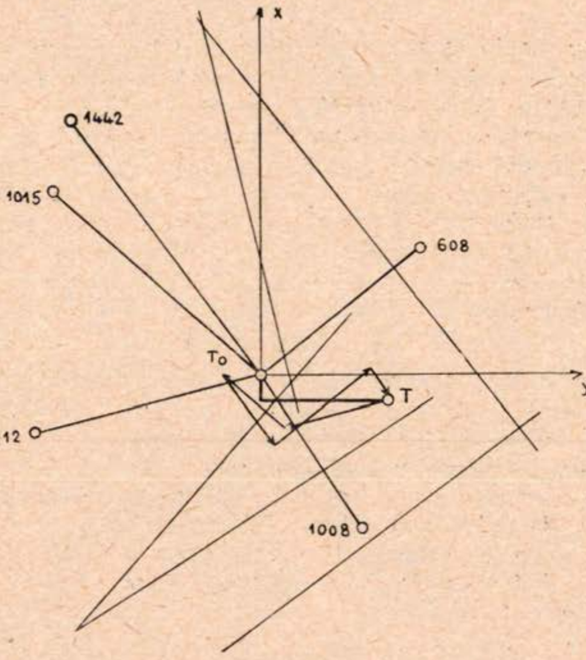
IZJEDNAČENJE KOORDINATA TAČKE ODREĐENE LUČNIM PRESJEKOM

Mjerilo skice točaka 1:2000 Mjerilo crteža 1:2

Tačka	d_{hm}	L	v	(v)
1012	0.83	−0.010	+0.031	(+0.029)
1015	0.98	−0.010	+0.029	(+0.030)
1442	1.12	−0.070	−0.036	(−0.034)
608	0.71	+0.060	+0.031	(+0.032)
1008	0.65	+0.040	+0.008	(+0.007)

dy = +0.045 (+0.044)

dx = −0.010 (−0.011)



Primjedbe: Primjer je uzet iz Pravilnika za državni premjer
u zagradi su podaci dobiveni numeričkim izjednačenjem

Kutevi φ su smjerni kutevi mjerenih dužina. Za čisto numerički postupak bi ih trebalo odrediti numerički ili očitati kutomjerom sa skice.

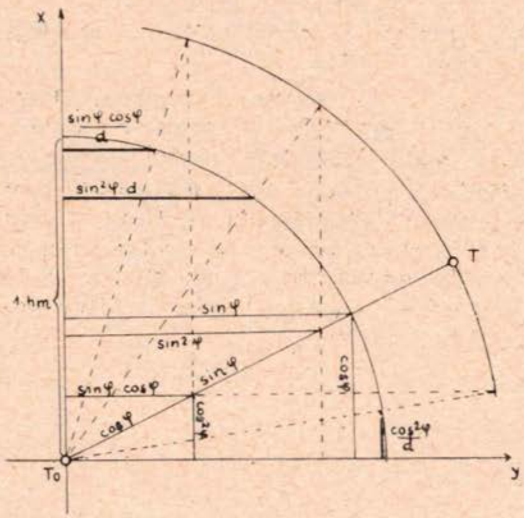
Koeficijente A, B i C mogli bi odrediti grafičkom konstrukcijom, slično opisanoj za presjek pravaca, koja je prikazana na sl. 13. Veličine $\frac{\sin^2\varphi}{d}$ i $\frac{\cos^2\varphi}{d}$ su pozitivne u svim kvadrantima, dok je $\frac{sni\varphi\cos\varphi}{d}$ pozitivno u 1. i 3. kvadrantu, a negativno u 2. i 4. kvadrantu. Grafičkim zbrajanjem pomoću stotinjara, mogu se odmah dobii koeficijenti A, B i C.

Rješenje zadatka pomoću nomograma bilo bi također moguće.

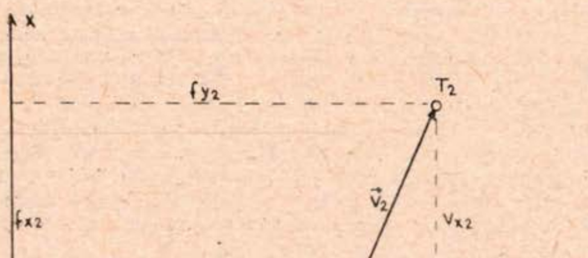
Za sva računanja i grafičke konstrukcije najzgodnije je dužine d izraziti u hektometrima.

3. OPĆENITO O GRAFIČKOM IZJEDNAČENJU POMOĆU VEKTORA

Grafičko izjednačenje pomoću vektora moguće je primijeniti uvijek onda, kada se izjednačuju koordinate jedne tačke. Kod toga je neophodno



Sl. 13.



Sl. 14.

sračunati približne koordinate tačke T_0 (yo, xo) i odstupanja l. Odstupanja l se tada nanose u krupnom mjerilu i time dobiva figura pogrešaka. Popravke v mjerenih veličina tada prikazujemo vektorima, a tražena tačka određuje pod uvjetom $[\vec{v}] = 0$ ili $[\vec{pv}] = 0$.

Na tom bi se principu mogle izjednačiti i koordinate poligonske čvorne tačke. Za tu bi svrhu trebalo na skicu nanijeti koordinate dobivene iz pojedinih vlakova (sl. 14). Time bi se dobilo onoliko tačaka, koliko ima vlakova. Ovdje bi bilo potrebno naći tačku T za koju je $[\vec{pv}] = 0$.

Vektor $\vec{v}$ — popravka položaja tačke — je definiran smjerom i dužinom spojnica tačaka T i T.

Međutim ovo razmatranje izjednačenja poligonskog čvora, ima samo teoretsko značenje, jer za praktičku primjenu ne dolazi u obzir, s obzirom da je numeričko izjednačenje brže i jednostavnije.

Grafičko izjednačenje pomoću vektora općenito, ima u nekim slučajevima više ili manje rezona. Ono dakako ne dolazi za primjenu u državnoj triangulaciji, za koju postoje propisi o izjednačenju prema Pravilniku o triangulaciji. Grafička metoda bi zato mogla naći primjenu u primijenjenoj geodeziji, kod određivanja paspunkta u fotogrametriji, kod izjednačenje lučnog presjeka i slično.

VEKTORIELLER GRAPHISCHER AUSGLEICH

Das beschriebene Ausglei.hsverfahren für eingeschnittene Punkte enthält den numerischen und graphischen Teil. Die vorläufigen Koordinaten und die Abweichungen l zwischen den vorläufigen und gemessenen Richtungen werdne numerisch bestimmt. Alle Punkte werden im beliebigen Massstab aufgetragen. Der graphische Vorgang besteht in der Konstruktion der Richtungen, die parallel zu den gemessenen auf einer Entfernung Δl (4) verlaufen, wobei Δl in einem grösseren Massstab aufzutragen sei. Die versetzten Richtungen gestalten die Fehlerfigur (Abb. 2), innerhalb welcher der gesuchte Punkt liegen muss. Die Punktlage wird auf Grund der Bedingung (3) bestimmt, nach welcher die Vektorsumme verschwinden bzw. eine geschlossene Figur ergeben soll. Die Punktlage kann man graphisch iterativ (1.4.3.A,bb.9) oder durch einen graphisch-numerischen Vorgang (1.3.4.B,Abb. 10,(18) und (19) erhalten

Im Falle, dass auch innere Richtungen z. V. stehen, muss man sich mit einer annähernden Lösung, die den Orientierungsfehler do (8) ausser Acht lässt, begnügen. Im Gegenfall muss man do und die Koefizienten a_0 und b_0 bestimmen (z. B. graphisch, Abb. 5). Die Richtungen φ sind dann um den Betrag $\Delta l'$ (11) bzw. (15) zu verbessern und der Punkt T ist wiederzubestimmen (Abb 6). Ausser den Koordinatenverbesserungen Δy und Δx kann man einfach auch die Verbesserungen v (7) bzw. (16) bekommen.

Auf ähnliche und einfachere Weise löst man die Ausglechung der Punkte, die mit Bogenschnitt bestimmt sind (Abb. 12).

In den angegebenen Beispielen sind die Tabellen mit den Rechnungen, die alle mit dem Rechenschieber durchführbar sind, gegeben.

Mit der Verwendung dieser graphischen Ausgleichung fällt die Koeffizientenbestimmung, die Aufstellung und die Auflösung von Normalgleichungen weg, während die Bestimmung der Verbesserungen und der Kontrollen reduziert wird.