

SREDNJE POGREŠKE NIVELIRANJA USLOVLJENE INSTRUMENTALNIM I SUBJEKTIVNIM UTJECAJIMA

Doc. ing. DUŠAN BENČIĆ, G. F. — Zagreb*

Za ocjenu tačnosti niveliranja usvojeno je u praksi kao mjerilo srednja pogreška visinske razlike određene na 1 km dvostrukog niveliranja (1):

$$M_{km} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{d^2}{s} \right]}$$

gdje je n broj nivelmanskih stranica

d diferencija visinske razlike niveliranja naprijed i natrag jedne nivelmanske stranice, izražena u mm
 s dužina nivelmanske stranice u km.

U našoj stručnoj literaturi naći ćemo vrlo često opise ispitivanja nivelira, izvršena praktičnim mjerenjima, a kojih je ocjena kvalitete data na osnovu gornje formule. Ovakva praktična ispitivanja daju nesumnjivo potrebne i vrlo korisne podatke. Međutim, ne samo da ovakove podatke nemamo za sve nivelire, ili nam nisu pri ruci, nego su dati podaci ipak vezani i za određene uslove mjerenja. Za jednu svestraniju i detaljniju analizu, kako u svrhu izbora instrumenta, tako i razmatranja samih rezultata mjerenja, svakako je potrebno, na osnovu ispitanih tehničkih podataka o niveliru i fizioloških zakona, unaprijed odrediti srednju pogrešku visinske razlike za 1 km dvostrukog niveliranja M'_{km} . Ovakva srednja pogreška M'_{km} ne samo što bi nam dala jednostavan komparativan uvid pri izboru nivelira, već bi nam i odnos

$$k = \frac{M_{km}}{M'_{km}}$$

dao uvid u veličinu upliva ostalih neobuhvaćenih utjecaja na tačnost niveliranja, kao što su na pr. atmosferska refrakcija, pogreške letve (postav, podjela, savijanje, istezanje), pomaci stativa, vidljivost (u širem smislu) i drugi, naravno, u koliko su pretpostavke date u izvodu formule za M'_{km}

* G. F. — Geodetski Fakultet — Zagreb, Kačićeva 26.

ispunjene. Uz optimalne uslove veličina k će iznositi 1—1,5 a moguće je, da uz loše uvjete, dosegne i veličinu 5. Iznos veličine k svakako će nas upozoriti na razmatranja o uzročnostima, ukoliko prelazi predviđen iznos.

Osnovne komponente koje utječu na srednju pogrešku vizure, a sadrže instrumentalne i subjektivne uplive su:

1. Osjetljivost libele i tačnost horizontiranja vizure;
2. Tačnost očitavanja podjele letve.

Utjecaj neodredivih subjektivnih upliva, kao što su neizvježbanost, nepažnja ili indispozicija opažača, zanemarit će se pri ovim razmatranjima.

OSJETLJIVOST LIBELE I TAČNOST HORIZONTIRANJA VIZURE.

Osjetljivost libele ϵ kreće se kod nivelira od 5" do 60", a najčešće u području od 10" do 30". U uskoj vezi sa osjetljivošću ϵ je i tačnost horizontiranja vizure. Tačnost horizontiranja ovisna je o načinu dovođenja libele do vrhunjenja, a zatim i o optičkoj funkciji uređaja (ako postoji) za očitavanje položaja mjehura. (na pr. povećanje lupe kojom promatramo). Kod običnih libela srednja pogreška horizontiranja m_L kreće se u iznosu

$$\frac{\epsilon}{7} \text{ do } \frac{\epsilon}{15}, \text{ pa se kao srednje uzima } \frac{\epsilon}{10}.$$

Kod libela sa koincidencijom mjehura, kreće se ovaj iznos od $\frac{\epsilon}{20}$ do $\frac{\epsilon}{60}$

pa se u srednjem uzima vrijednost $\frac{\epsilon}{40}$.

Tu moramo napomenuti, da je tačnost horizontiranja ovisna ne samo o libeli, već i o veličini uspona i kvaliteti elevacionog vijka, pa su u veličini m_L sadržani i njihovi utjecaji.

Kako je tačnost horizontiranja vizure jedna od osnovnih instrumentalnih komponentata, dobro je, da je opažać sam odredi za svoj nivelir. Na kraćoj udaljenosti stavimo precizno mm-mjerilo (povoljnije je ako to vršimo u laboratoriju), te iz više opažanja odredimo srednju pogrešku jednog horizontiranja m_L .

$$m_L'' = \frac{200 m_L}{s}$$

gdje je s izmjerena udaljenost do mjerila u metrima.

Kod preciznih nivelira sa mikrometrom treba tom prilikom posebno odrediti i srednju pogrešku viziranja, kako bi je mogli eliminirati iz mjerenja pri određivanju m_L .

Utjecaj neparalelnosti vizurne osi i tangente na tjeme libele, kao sistematski upliv na tačnost horizontiranja, zanemarujemo u ovim razmatranjima, jer pretpostavljamo rad sa rektificiranim nivelirima, te nejednakosti u dužinama vizura tolike, da uzrokuju pogreške reda veličine takove da ih možemo zanemariti. Ta će pretpostavka vrijediti, naravno, i u svim onim slučajevima kod kojih je suma dužina vizura natrag jednaka sumi dužina vizura naprijed pri jednom nivelmanskom vlaklu.

Samo horizontiranje vizure kod nivelira sa libelama zahtijeva koncentraciju opažača, što uzrokuje brži zamor, a s time i smanjenu tačnost mjerenja. Ta činjenica daje veliku prednost nivelirima sa automatskim horizontiranjem vizure.

TAČNOST OČITANJA PODJELE NA LETVI — Kod niveliranja vršimo čitanje na letvi uglavnom:

- procjenjivanjem položaja niti nitnog križa u intervalu podjele letve
- očitanjem položaja niti u intervalu pomoću optičkog mikrometričkog uređaja (zakret plan-ploče, pomak prizme).

Najbrži i najjednostavniji način čitanja na letvi je procjenjivanje položaja niti. Tačnost takvog očitavanja ovisit će:

- o tačnosti procjenjivanja
- o tačnosti viziranja.

Tačnost procjenjivanja ovisi u prvom redu o veličini intervala podjele. Još 1891 god. dao je prof. Reinhertz zakon za srednju pogrešku procjenjivanja prividnog intervala (3)

$$m_i = k \sqrt{i'}$$

k je koeficijent koji ovisi o položaju niti u intervalu podjele.

i' prividna veličina intervala koju možemo izračunati po formuli:

$$i' = 0,25 i \frac{P}{s}$$

i je stvarna veličina intervala

P povećanje durbina

s udaljenost podjele od objektiva durbina

Pod prividnom veličinom intervala podrazumijevamo veličinu slike koju daje durbin u daljini jasnog vida (250 mm). Takovo uspoređivanje, međutim, ne smije nas navesti na krivi zaključak, da ta slika i mora biti u daljini jasnog vida, a što često nalazimo u našoj literaturi.

Pogrešku procjenjivanja u intervalu na letvi m_i Reinhertz izvodi iz razmjera:

$$m_i : m_{i'} = i : i'$$

Uvrstimo li vrijednosti za $m_{i'}$ i i' dobivamo:

$$m_i = 2k \sqrt{\frac{is}{P}}$$

Iz ovoga slijedi da pogreška procjenjivanja raste proporcionalno sa drugim korjenom udaljenosti. Ova formula vrijedi samo od određene udaljenosti, dakle u ograničenom području.

Eggert izvodi, na osnovu datih opažanja, empiričku formulu:

$$m_i = \pm \left(0,136 \frac{s}{P} + 0,0292 i \right)$$

koju i danas nalazimo primjenjivanu u našoj literaturi.

Danas smatramo da je dobro procjenjivanje desetina intervala moguće, ako je prividni dijametar intervala bar 10', pa prema G. Förstneru (2) iznosi u tom slučaju:

$$m_i \doteq \pm \frac{i}{25}$$

V. Happach (4) iznosi ove podatke za srednju pogrešku procjenjivanja:

za $i = 10 \text{ mm}$ $m_i = \pm 0,50 \text{ mm}$ ili $m_i'' = \frac{0,5}{s} \varrho'' = \pm \frac{100''}{s}$
 s u metrima

za $i = 5 \text{ mm}$ $m_i = \pm 0,25 \text{ mm}$ ili $m_i'' = \pm \frac{50''}{s}$ s [m]

Uzimajući na taj način pogrešku procjenjivanja u prosjeku konstantnom, znatno pojednostavljujemo naša razmatranja.

Maksimalno dozvoljene udaljenosti za dati uslov:

$$\varrho' \frac{i'}{0,25} < 10'$$

dobit ćemo za $\varrho' \frac{iP}{s} < 10'$ (što slijedi iz formule za prividnu veličinu intervala)

$$s_{\max} = \frac{iP}{10} \varrho' \text{ uz iste jedinice za } i \text{ i } s$$

ili $s_{\max} = \frac{i P_i}{10'000} \varrho'$ i [mm]
 s [m]

$$s_{\max} = 0,344 i P$$

Za letve sa cm-podjelom: $i = 10 \text{ mm}$, $s_{\max} = 3,44 P \doteq 3,5 P$

| | | | | | |
|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| P | $20 \times$ | $25 \times$ | $30 \times$ | $32 \times$ | $40 \times$ |
| s_{\max} | 70m | 88 | 105 | 112 | 140 |

Za letve sa $1/2$ cm-podjelom: $i = 5 \text{ mm}$, $s_{\max} = 1,72 P$

| | | | | | |
|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| P | $20 \times$ | $25 \times$ | $30 \times$ | $32 \times$ | $40 \times$ |
| s_{\max} | 35m | 43 | 52 | 55 | 69 |

Interesantno je uz ova razmatranja učiniti i osvrt na primjenu nivelira sa kompenzatorom tipa Zeiss Ni2 sa procjenjivanjem letve. Pokazalo se naime, da je upotreba ovog nivelira, uz primjenu dviju letava, najekonomičnija za udaljenosti letve oko 52 m (2). Preko ovih udaljenosti mora se čekati na prenos letava. Kako je povećanje kod Ni2 32×, vidimo iz tabele da je 55 m maksimalna udaljenost uz primjenu letve sa 1/2 cm-podjelom. Dakle, uz rad sa nivelirima s automatskim horizontiranjem povećanja oko 30×, korisno je, za povećanje tačnosti mjerenja, primijeniti letve sa 1/2 cm-podjelom. Kako ekonomičnost pri niveliranju izražavamo omjerom brzine niveliranja (km/h) i M_{km} , to je očito, da će ona biti na taj način povećana.

Što se tiče razmatranja tačnosti viziranja pri čitanju letve, dobro je, da prije toga tačnije razjasnimo sam pojam viziranja. Tim više što ono ima posebni značaj kod preciznih nivelira sa mikrometrima.

VIZIRANJE. Nitni križ durбина preslikan je, promatrano u optičkom obratu zraka svjetlosti, pomoću objektiva durбина u prostor predmeta. Promatranje okom kroz durbin položaja nitnog križa prema objektu, odnosno, dovođenje nitnog križa na određenu tačku objekta zovemo viziranjem. Dakle, pri viziranju oko sa durbinom čini nerazdvojivu cjelinu. Konačna slika, kako viziranog objekta, tako i nitnog križa je na mrežnici oka. Vidni impulsi prenose se sa mrežnice oka u mozak i tu se vrši registracija mjerenja. Viziranje je zato subjektivna fiziološko optička pojava. Oko opažača je k tome živi pokretni organizam koji sa durbinom ne čini fiksnu optičku cjelinu. Tačnost viziranja je zato ovisna ne samo o fiziološkim svojstvima oka, već i o veličini promjene položaja oka prilikom mjerenja. Viziranje je zato pojam kojeg treba uzeti u širem i užem smislu. Viziranje u užem smislu ili čisto viziranje je dovođenje niti u određen položaj (kod preciznih nivelira npr. pomoću mikrometra). Tačnost ovog viziranja ovisna je u bitnom o relativnom odnosu niti prema prividnom intervalu objekta, kao i strukturi mrežnice oka. Uz isti relativni odnos niti prema prividnom intervalu, tačnost viziranja će se povećavati primjenom većeg povećanja durбина po određenom zakonu. To međutim, vrijedi samo do izvjesnih granica, jer se povećanjem ujedno povećavaju i amplitude titranja slike uslijed refrakcionih promjena u zraku. Time dolazimo do tzv. kritičnog povećanja, prelaskom kojeg tačnost viziranja možemo samo smanjiti. Tačnost viziranja u ovisnosti o povećanju durбина ispitivali su mnogi autori. U našoj literaturi nalazimo uglavnom dvije osnovne zakonitosti za tačnost viziranja:

$$m_v = \pm \frac{c_1}{\sqrt{P}} \quad \text{i} \quad m_v = \pm \frac{c_2}{P}$$

gdje je c konstanta, a P povećanje durбина

$c_1 = 3'' - 10''$ (Noetzi, Deumlich, Seyfert)

$c_2 = 10'' - 50''$ (Stampfer, Doležal, Happach, Vogler)

Pravilnije je upotrebiti zakonitost $m_v = \frac{c}{P}$ što se može dokazati

teoretskim razmatranjem na osnovu optičkih i fizioloških zakonitosti. Konstantu c pri tome nije pravilno smatrati fiziološkim graničnim kutem definiranim prema svojstvu moći razdvajanja oka, kao što to daje Dr Happach (5), već je treba smatrati u uskoj vezi sa svojstvima oka za viziranje. Dovoljno je napomenuti da je već Noetzi 1915 god. svojim pokusima pokazao, da je moguće, čak i prostim okom vizirati na tačnost od $\pm 0,02$ (6), dok fiziološki granični kut, zbog same strukture mrežnice, ne može biti manji od $20''$. Konstantu c treba definirati kao fiziološku konstantu viziranja koju je moguće odrediti eksperimentalnim putem. Na osnovu praktičnih iskustava možemo uzeti, da je uz normalne ostale uslove konstanta viziranja $c = 20''$, tj. $m_v'' = \pm \frac{20''}{P}$.

Kod nivelira s mikrometrom možemo, zbog specijalne povoljnosti odnosa niti i intervala (u većini slučajeva niti u obliku klina), uzeti konstantu $c = 10''$, pa će biti:

$$m_v'' = \pm \frac{10''}{P}$$

ili linearno: $m_v = \frac{m_v''}{\rho''} s = \pm \frac{s}{20P} \quad m_v[\text{mm}]; s[\text{m}]$

Na tačnost viziranja utječe i paralaksa nitnog križa. Zbog nesavršenosti oka, ono neće nikada biti u stanju da idealno dovede sliku vizurnog objekta u ravninu nitnog križa. To će uzrokovati da pomak oka ispred okulara vrši relativni pomak slike vizurnog objekta i nitnog križa na mrežnici oka.

Dade se izvesti, da je dovođenje slike u ravninu nitnog križa, metodom poništavanja paralakse, 5 do 7 puta tačnije od obične metode izoštravanja. Međutim, na terenu, gdje imamo često titranje slika (makar i vrlo malih amplituda), ta prednost može otpasti. Iz toga slijedi da paralaksa nitnog križa može biti različita, uz istu pomnjevost u radu, a samim time i tačnost viziranja. To je razlog koji opravdava izdvajanje ovog utjecaja pri razmatranjima tačnosti čistog viziranja. Time ovom utjecaju možemo dati veću ili manju težinu, već prema postojećim terenskim uslovima mjerenja. Osim toga utjecaj paralakse nitnog križa dolazi i izolirano od čistog viziranja pri običnom procjenjivanju, te tu ostaje i kao jedina komponenta tačnosti viziranja. Teoretski se može dokazati, da paralaksa nitnog križa djeluje po istom zakonu na tačnost viziranja tj.

$$m_n = \pm \frac{k}{P}$$

gde je k konstanta ovisna o načinu uklanjanja paralakse, a s tim u vezi i o veličini amplituda titranja slike i vidljivosti. Tako na primjer:

Kod laboratorijskih mjerenja uz poništavanje paralakse $k = 5''$
 Kod terenskih mjerenja uz optimalne uslove $k = 10''$
 Kod terenskih mjerenja uz lošiju vidljivost ili titranje
 slika $k = 20''$ do $40''$

Dakle, paralaksa nitnog križa može u određenim uslovima osjetno smanjiti tačnost viziranja.

RAZMATRANJE SREDNJIH POGREŠAKA. Srednja pogreška vistske razlike za 1 km dvostrukog nivelmana biti će:

$$M'_{km} = \pm m \sqrt{\frac{n}{2}}$$

m srednja pogreška jedne vizure
 n broj vizura na 1000 m nivelmana

Ako označimo dužinu vizure sa s , a uz pretpostavku da su dužine vizura jednake, imamo $n = \frac{1000}{s}$, pa ako uvrstimo u gornji izraz dobivamo:

$$M'_{km} = \pm m \sqrt{\frac{500}{s}} \quad (1)$$

Time smo dobili općenitu formulu koja nam služi za određivanje M'_{km} .

Potrebno je sada razraditi i uvrstiti u formulu 1. vrijednost za srednju pogrešku jedne vizure. U geodetskoj literaturi ne ćemo naći jedinstvene načine razrade ovog problema.

G. Förstner (2) uzeo je pri analizi srednje pogreške vizure ove komponente:

1. Komponenta koju daje procjenjivanje podjele. Uzevši da je m_p konst., uvrštenjem u 1. dobivamo:

$$M_1 = \pm m_p \sqrt{\frac{500}{s}} \quad s[m]$$

Dakle, uz konstantnu srednju pogrešku procjenjivanjem m_p , M_1 je obrnuto proporcionalna sa drugim korjenom dužine vizure s .

2. Komponenta koja dolazi od nagiba vizure srednje pogreške μ .

Kod svoje analize G. Förstner ovu srednju pogrešku uzima na taj način, da je kod nivelira sa procjenjivanjem letve ona identična sa srednjom pogreškom horizontiranja vizure pomoću libele ($\mu = m''_L$), a kod preciznih nivelira sa mikrometrom nastaje sumarnim djelovanjem pogreške horizontiranja i pogreške viziranja pomoću mikrometra (koincidencija niti i crte podjele na letvi).

Linearni iznos utjecaja srednje pogreške nagiba vizure na udaljenosti letve s će iznositi:

$$m = 1000 s \frac{\mu''}{s''} \quad s[m]$$

Ako ovu vrijednost uvrstimo u 1. dobivamo:

$$M_2 = \pm 1000 \text{ s } \frac{\mu''}{\rho''} \sqrt{\frac{500}{\text{s}}}$$

$$M_2 = \pm \frac{\mu}{200} \sqrt{500 \text{ s}}$$

$$M_2 = \pm 0,11 \mu'' \sqrt{\text{s}}$$

Kod konstantne kutne pogreške vizure μ , M_2 je proporcionalna sa korjenom iz dužine vizure s .

KOD PRECIZNIH NIVELIRA S MIKROMETRIMA ne dolazi u obzir komponenta m_p , pa će u tom slučaju vrijediti:

$$M'_{km} = \pm 0,11 \mu'' \sqrt{s} \quad \text{s [m]} \quad (2)$$

Srednja pogreška raste sa povećanjem dužine vizure. I to je, prema tome razlog, da ne govorimo o refrakcionim uplivima, zašto dužine vizura kod preciznih nivelira moraju biti kratke.

KOD NIVELIRA UZ PROCJENJIVANJE LETVE

$$M'_{km} = \pm \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$$

$$M'_{km} = \pm \sqrt{500} \sqrt{\frac{m_p^2}{\text{s}} + \frac{\mu^2 \text{ s}}{40000}} \quad (3)$$

$$M'_{km} [\text{mm}]; m_p [\text{mm}]; \mu [\text{sek.}]; s[\text{m}]$$

Očito vidimo, da će u ovom slučaju, zbog različitosti upliva dužine vizure na formiranje ukupne srednje pogreške, postojati optimalna udaljenost letve. Ako diferenciramo formulu 3. po s i tražimo uslov minimuma dobit ćemo:

$$s_{opt} = \frac{200 m_p}{\mu} \quad m_p [\text{mm}]; \mu [\text{sek.}] \quad (4)$$

Naravno, mora biti i

$$s_{opt} < s_{max} \quad \left(\begin{array}{l} s_{max} = 3,5 \text{ P za } i = 10 \\ s_{max} = 1,7 \text{ P za } i = 5 \end{array} \right)$$

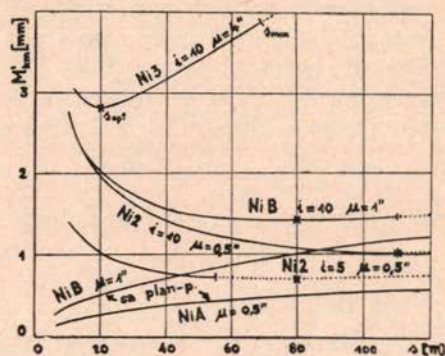
Ako uvrstimo 4. u 3. imamo:

$$M'_{km}(s_{opt}) = \pm \sqrt{5 m_p \mu} \quad (5)$$

Na taj način dobivena je prilično jednostavna formula za račun srednje pogreške M'_{km} uz mjerenje na optimalnim dužinama. Pitanje optimalnih dužina vizure ne treba uzimati suviše kruto, jer zbog djelovanja

i drugih upliva, neobuhvaćenih ovom formulom, područje optimuma ima izvjesnu širinu, a što su pokazala praktična mjerenja. Ukoliko po formuli 4. dobijemo $s_{opt} > s_{max}$ (na pr. Ni2, $i = 5\text{mm}$, $s_{opt} = 80\text{ m}$), to je ta vrijednost samo teoretska.

Krivulje koje predočuju $M'_{km} = f(s)$ prikazane su na sl. 1. Krivulje su za $s > s_{max}$ tačkane i tu nemaju nikakav značaj.



Sl. 1

Krivulje su konstruirane za ove podatke (prema G. Förstneru):

| | | | | |
|---------------------|----------|---------------------------|-------------------|--------------------|
| Ni 3 | $i = 10$ | $m_p = \pm 0,4\text{ mm}$ | $\mu = \pm 4''$ | ($P = 20\times$) |
| Ni B | $i = 10$ | $m_p = \pm 0,4\text{ mm}$ | $\mu = \pm 1''$ | ($P = 32\times$) |
| Ni 2 | $i = 10$ | $m_p = \pm 0,4\text{ mm}$ | $\mu = \pm 0,5''$ | ($P = 32\times$) |
| Ni 2 | $i = 5$ | $m_p = \pm 0,2\text{ mm}$ | $\mu = \pm 0,5''$ | |
| Ni B sa plan-pločom | | | $\mu = \pm 1''$ | |
| Ni A sa plan-pločom | | | $\mu = \pm 0,5''$ | |

Primjer. Ni 3

$$s_{opt} = \frac{200 \cdot 0,4}{4} = 20\text{ m}$$

$$M'_{km} (\text{uz } s_{opt}) = \pm \sqrt{5 \cdot 0,4 \cdot 4} = \pm 2,8\text{ mm/km}$$

Pogled na krivulje može nam poslužiti za izvjesne zaključke. Tako na primjer, vidimo, da su za nivelire tipa Ni 3 povoljne udaljenosti letava 10 do 40 m, a optimalna je 20 m. Povoljne udaljenosti su veće za nivelire kod kojih je μ manji. Iz krivulja vidimo i zanimljivu činjenicu, da nivelir sa kompenzatorom Zeiss Ni2, uz procjenjivanje letve sa $1/2\text{ cm}$ podjelom, daje za udaljenosti oko 40 m iste tačnosti mjerenja kao i NiB sa mikrometrom (plan-ploča), uz činjenicu, da je i očitavanje procjenjivanjem brže.

Formule 2. do 5. ne govore nam o veličini utjecaja paralakse nitnog križa. Veličina μ nije najpraktičnija za nivelire sa mikrometrom, jer se u prospektima obično navodi veličina m'' , a

$$\mu = \pm \sqrt{m_L^2 + m_V^2}$$

Osim toga iznijete formule ne pokazuju direktno funkcionalnu ovisnost M'_{km} od osnovne instrumentalne karakteristike nivelira, kao što je povećanje durbina.

Da odgovorimo i na ta pitanja, pođimo dalje u razmatranju i izvršimo analizu srednje pogreške vizure prema Dr V. Happachu (4). V. Happach smatra nužnim, da se sve instrumentalne komponente nivelira pri samoj konstrukciji tako podese, da instrumentalni utjecaji budu što manji prema neizbježivim pogreškama uslovljenim fiziološkim zakonima. Ukoliko konstruktor ne zadovolji taj zahtjev, to on ipak određuje takve karakteristike instrumentalnim komponentama, da su one u određenom skladu sa fiziološkim zakonima. Kako je, međutim, komponenta fiziološkog utjecaja ovisna o povećanju durbina i o dužini vizure, to mora biti:

$$m = f(P, s)$$

V. Happach uzima u razmatranje ove komponente:

m_L srednja pogreška horizontiranja

m_p srednja pogreška procjenjivanja

m_v srednja pogreška namještanja (viziranja), uslovljena fiziološkim zakonom.

Za m_v uzima vrijednost $m_v = \frac{40''}{P}$ ili $m_v = \frac{20''}{P}$ (za povoljne uslove)

gdje $c = 40''$ ili $20''$ uzima kao fiziološki granični kut

To pojmovno nije ispravno, a što smo već objasnili u opisu viziranja. Ipak, razmatranje će biti ispravno, ako pri nivelirima sa procjenjivanjem letve, pojam viziranja uzmemo u širem smislu, te će tada biti $m_v = m_n$ (srednja pogreška viziranja uslijed paralakse nitnog križa).

Srednja pogreška vizure biti će:

$$m = \pm \sqrt{m_L^2 + m_p^2 + m_v^2}$$

Primjer.

Neka je osjetljivost obične libele $\varepsilon = 40''$, a čita se procjenjivanjem letve sa 1 cm podjelom. Povećanje durbina iznosi $30\times$.

U tom slučaju ćemo imati: $m_L'' = \pm 4''$, $m_p = \pm 0,5 \text{ mm}$, a $m_v = \frac{40''}{30} = \pm 1'',3$

(za nepovoljnije uslove).

$$m'' = \pm \sqrt{4^2 + \left(\frac{100}{s}\right)^2 + 1,3^2}, \text{ ili linearno}$$

$$m = \frac{1000 s m''}{\rho} \quad s[m]$$

Prema formuli 1. $M'_{km} = \pm m \sqrt{\frac{500}{s}} = \pm 22,3 \frac{m}{\sqrt{s}}$

Ako uvrstimo vrijednost za m dobivamo konačno:

$$M'_{km} = \pm 0,11 \sqrt{17,7 s + \frac{10^4}{s}} \quad (6)$$

Za $s = 20$ m, $M'_{km} = \pm 3,3$ mm; za $s = 40$ m, $M'_{km} = \pm 3,5$ mm.

M'_{km} je, kao što smo naveli, srednja pogreška visinske razlike za 1 km dvostrukog nivelmana.

Happachova formula 6. vrijedila bi za jednostavne nivelire

Spomenuli smo, da se konstrukcija instrumenta usklađuje sa fiziološkim zakonima. Najjednostavnije će biti, ako uzmemo:

$$m_L = m_V$$

Iz toga slijedi konstruktivni uslov za osjetljivost libele kod običnih nivelira:

$$\text{Obična libela} \quad \frac{\epsilon''}{10} = \frac{20''}{P} \quad (c = 20'' \text{ uz povoljne uslove})$$

$$\epsilon'' = \frac{200''}{P}$$

Osjetljivost libele direktno je ovisna o povećanju durbina. Libela sa koincidencijom

$$\frac{\epsilon''}{40} = \frac{20''}{P}; \quad \epsilon'' = \frac{800''}{P}$$

Happach je pri analizi postavio i ovaj uslov:

$$m_L = m_V = m_p \quad (5)$$

Kako je uzet

$$m_V = \frac{20''}{P}$$

ili linearno na udaljenosti s :

$$m_V = \frac{m_V''}{q} s = \frac{20''}{q''P} 1000 s$$

$$m_V [\text{mm}] = \frac{s}{10 P} \quad s [\text{m}]$$

Međutim, ako uzmemo $m_V = m_p$, slijedi

$$\frac{s}{10 P} = 0,5$$

$$s = 5 P$$

Ovaj uslov prema Happachu, dolazi u kontradikciju sa uslovom za prividni dijametar u veličini $10'$, što je uslovalo:

$$s_{\max} = 3,5 P$$

Za zadovoljenje ovog uslova trebalo bi uzeti $m_p = \pm 0,35$ mm, što je teško postići na tako velikim udaljenostima. Ako uzmemo $m_p = \pm 0,4$ mm (po Förstneru), tada mora biti $s = 4 P$ (za uslov $m_v = m_p$), što je nešto iznad s_{\max} . Dakle, uz ove ograde možemo preći na konačni izvod Happachove formule.

Za $m_L = m_v = m_p = \frac{s}{10 P}$ slijedi:

$$M'_{km} = \pm \sqrt{3 \left(\frac{s}{10 P} \right)^2} \sqrt{\frac{500}{s}}$$

$$M'_{km} = \pm 3,9 \frac{\sqrt{s}}{P} \quad s \text{ [m]} \quad (7)$$

Na taj način dobili smo i formulu u kojoj imamo izraženu M'_{km} kao funkciju povećanja durbina. Formula prividno daje i ovisnost o udaljenosti, međutim, udaljenost je već uslovljena uslovom $m_v = m_p$ ($s = 4 P$). Ova udaljenost svakako nije ni optimalna, pa formula 7. nije pogodna za analize rada sa nivelirom, kako je to primijenjeno po Dr Happachu (4).

Uzmimo, međutim, veličinu m_p (srednju pogrešku procjenjivanja) neovisnu o udaljenosti, kao analogiju po kojoj je izvod formula dao G. Förstner. Uzmimo $m_p = \pm 0,5$ mm. U tom slučaju imamo:

$$M'_{km} = \pm \sqrt{2 \left(\frac{s}{10 P} \right)^2 + 0,5^2} \sqrt{\frac{500}{s}}$$

$$M'_{km} = \pm \sqrt{\frac{10 s}{P^2} + \frac{12,5}{s}} \quad s \text{ (m)} \quad (8)$$

Ova formula nam daje M'_{km} kao funkciju povećanja i dužine vizure s , uz uslove:

$$m''_v = \frac{20''}{P}; m'_L = m''_v; m_p = \pm 0,5 \text{ mm (konst); } i = 10 \text{ mm.}$$

Formulu 8 možemo pisati:

$$M'_{km} = \pm 3,16 \sqrt{\frac{s}{P^2} + \frac{12,5}{s}}$$

Za male udaljenosti ima drugi član pod korjenom mnogo veći upliv. Zanimalo bi nas kada ova funkcija poprma minimalnu vrijednost uz promjenljivu veličinu s , a uz dato povećanje P .

$$dM'_{km} = 3,16 \frac{1}{2 \sqrt{\frac{s}{P^2} + \frac{12,5}{s}}} \left(\frac{1}{P^2} - \frac{12,5}{s^2} \right) ds$$

Za uslov minimuma $\frac{dM'_{km}}{ds} = 0$, pa slijedi

$$\frac{1}{P^2} - \frac{12,5}{s^2} = 0 \quad \left(\text{tj. } \frac{s}{P^2} = \frac{12,5}{s} \right)$$

$$s^2 = 12,5 P^2$$

$$s = 3,5 P$$

Prvo vidimo da jednakost oba člana pod korjenom daje ujedno i uslov minimalne srednje pogreške M'_{km} . Optimalna dužina vizure s zadovoljava ujedno i uslov prividne veličine intervala od $10'$ ($s_{max} = 3,5 P$).

Dakle je: $s_{opt} = 3,5 P = s_{max}$.

U tom slučaju iznosi srednja pogreška visinske razlike za 1 km dvostrukog nivelmana:

$$M'_{km} = \pm 3,16 \sqrt{2 \frac{s_{opt}}{P^2}} = \pm 3,16 \sqrt{2 \frac{3,5 P}{P^2}}$$

$$M'_{km} = \pm \frac{8,5}{\sqrt{P}} \quad (9)$$

$$s_{opt} = 3,5 P$$

$$M'_{km} [\text{mm}], s [\text{m}].$$

Dobili smo vrlo jednostavnu formulu za srednju pogrešku M'_{km} u ovisnosti o važnoj konstanti instrumenta — povećanju, na osnovu koje ćemo vrlo brzo izračunati srednju pogrešku.

Vidimo, da je M'_{km} obrnuto proporcionalna sa drugim korjenom iz povećanja durbina.

Formula 9. građena je za uslove:

$$m_v = m_L = \pm \frac{20''}{P}; m_p = \pm 0,5 \text{ mm (konst.); } i = 10 \text{ mm.}$$

Za optimalnu udaljenost svakako vrijedi nešto šire područje, no što daje sama formula s_{opt} . Razlog tome je taj, što se pogreška procjenjivanja za kraće udaljenosti smanjuje (formule Reinhertza i Eggerta), a za kraće udaljenosti manji su i štetni uplivi atmosfenske refrakcije. I iz tih razloga treba optimalnu udaljenost shvatiti kao maksimalnu udaljenost za postizanje srednje pogreške date formulom 9. Pri primjeni formule 9. nemamo slučaj $s_{opt} > s_{max}$, kao što je to bilo kod formula 4. i 5.

Analogno možemo izračunati za iste uslove pod kojima je građena formula 9, ali uz promjenu letve tj. uzimamo letvu sa $1/2$ cm podjelom ($i = 5$ mm), a $m_p = \pm 0,25$ (konst.):

$$s_{opt} = 1,7 P$$

(što zadovoljava uvjet veličine prividnog intervala od $10'$)

$$M'_{km} = \pm \frac{6}{\sqrt{P}} \quad (10)$$

Veličinu pogreške m_v treba smatrati, prema izloženom o viziranju, kao srednju pogrešku viziranja nastalu uslijed paralakse nitnog križa. Za k je uzeta vrijednost od $20''$, što odgovara srednjoj vrijednosti.

Tu moramo naročito napomenuti da će izvedene formule vrijediti samo u onom slučaju, ako instrumentalno fiziološki uslovi odgovaraju datim pretpostavkama. Za sigurnu analizu potrebno je stoga uvijek provjeriti tehničke podatke sa prospekta, odnosno praktički odrediti srednje pogreške horizontiranja i viziranja. Neki puta naći ćemo nesklad datih podataka u prospektima između povećanja, osjetljivosti libele, tačnosti horizontiranja i srednje pogreške M'_{km} , što ukazuje na nesigurnost tih podataka, odnosno na izvjesne tehničke nedostatke pri konstrukciji nivelira. To će naročito biti slučaj kod posve jednostavnih nivelira, gdje pitanje što jednostavnije i jeftinije proizvodnje igra osnovnu ulogu, pa moguće, kvaliteta mehaničkih dijelova neće odgovarati optičkim mogućnostima i osjetljivosti libele nivelira.

Formule 9. i 10. odgovaraju kvalitetnijim tipovima nivelira ($m''_L = \frac{20''}{P}$) koje često nalazimo pod imenom inženjerskih nivelira. Pokušajmo sada naći i analogan izraz za posve jednostavne nivelire, makar i samo orijentaciono, jer kako smo naglasili, kod njih je teže naći skladnost svih konstrukcionih elemenata.

Uzmimo da je $m''_L = \frac{100''}{P}$ njihova srednja pogreška horizontiranja, a $m_p = \pm 0,5$ mm; samu pogrešku viziranja možemo prema veličini m''_L zanemariti (u slučaju normalnih uslova mjerenja). U linearnom iznosu na udaljenosti s : $m_L = \frac{s}{2P}$, tada je:

$$M'_{km} = \pm \sqrt{\left(\frac{s}{2P}\right)^2 + 0,5^2} \sqrt{\frac{500}{s}} = \pm \sqrt{125 \left(\frac{s}{P^2} + \frac{1}{s}\right)}$$

Ako tražimo uvjet minimuma dobivamo:

$$s_{opt} = P \quad M'_{km} = \pm \frac{16}{\sqrt{P}} \quad (11)$$

Dakle, optimalna dužina vizure u metrima jednaka je povećanju durbina.

Uzmemo li srednju pogrešku horizontiranja $m_L = \pm \frac{100''}{P}$ a srednju pogrešku procjenjivanja $m_p = \pm 1$ mm, dobivamo analogno:

$$s_{opt} = 2P \quad M'_{km} = \pm \frac{22}{\sqrt{P}} \quad (12)$$

Formule 11. i 12. su orijentacione naravi, ali nam mogu poslužiti za korisne zaključke. Formulu 12. mogli bismo uzeti i kao graničnu formulu tačnosti niveliranja.

Sve izvedene formule date su za određene uslove. Želimo li računati za neke druge instrumentalne uslove i uvjete viziranja, onda računamo po općenitijoj formuli za srednju pogrešku vizure:

$$\left. \begin{aligned} m'' &= \pm \sqrt{m_L^2 + m_V^2 + m_p^2} \\ m_{(mm)} &= \frac{1000 \text{ s } m''}{\rho''} \\ \text{a } M'_{km} &= \pm m \sqrt{\frac{500}{s}} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Primjer. Nivelir povećanja $20\times$ upotrebit će se sa 1 cm letvom. Traži se odgovarajuća osjetljivost libele, daljina viziranja i M'_{km} , ako usvajamo

$$m_L = \frac{20''}{P} = \pm 1''.$$

Za običnu libelu: $\epsilon'' = \frac{200''}{20} = 10''$; za libelu sa koinc. mjehura

$$s'' = \frac{800}{20} = 40''.$$

$$m'' = \pm 1'' = \mu$$

Prema 4. i 5.

ili prema 9.

$$s_{opt}^i = \frac{200 m_p}{\mu} = \frac{200 \cdot 0,4}{1}$$

$$s_{opt.} = 3,5 P = 70 \text{ m}$$

$$s_{opt.} = 80 \text{ m (što je veća od } s_{max})$$

$$M'_{km} = \frac{8,5}{\sqrt{20}} = \pm 1,9 \text{ mm}$$

$$M'_{km} = \pm \sqrt{5 \cdot 0,4 \cdot 1} = \pm 1,4 \text{ mm}$$

Ova vrijednost je zbog $s_{opt} > s_{max}$ samo teoretska.

PRECIZNI NIVELIRI. — Srednja pogreška viziranja u povoljnim uslovima:

$$m''_v = \pm \frac{10''}{P}$$

ili linearno $m_v = \frac{s}{20 P} s(m)$ (7) (vidi: viziranje)

Za uslov $m_v = m_L$, slijedi $\frac{\epsilon}{40} = \frac{10}{P}$.

Osjetljivost libele (kao konstrukcioni uslov) $\epsilon'' = \frac{400''}{P}$.

Ako uzmemo utjecaj paralakse za povoljne uslove: $m_n = \frac{10''}{P}$, slijedi

$$m_v = m_L = m_n = \frac{s}{20 P}$$

Kod ovih nivelira moramo uzeti u obzir i pogrešku samog čitanja mikrometra, koja rezultira iz tačnosti procjenjivanja podjele bubnja, odnosno zaokruživanja očitavanja, kao i iz slučajne pogreške funkcije mehanizma mikrometra. Ako uzmemo, da ona u prosjeku iznosi $\pm 0,02$ mm i manje (4), to možemo, za dužine vizura 20 do 30 metara aproksimativno uzeti: $m_o = \frac{1}{2} m_v = \frac{s}{40 P}$, tada imamo

$$m = \pm \sqrt{m_v^2 + m_L^2 + m_n^2 + m_o^2}$$

$$M'_{km} = \pm \sqrt{3 \left(\frac{s}{20 P} \right)^2 + \left(\frac{s}{40 P} \right)^2} \sqrt{\frac{500}{s}}$$

$$M'_{km} = \pm 2 \sqrt{\frac{s}{P}} \quad (14)$$

Ova formula ne vrijedi pri kratkim dužinama vizure, jer tada ne odgovara pretpostavka uzeta za srednju pogrešku očitavanja. Ako uzmemo za $s = 25$ m, tada dobivamo vrlo jednostavan oblik za ovisnost srednje pogreške M'_{km} o povećanju durbina:

$$M'_{km} = \pm \frac{10}{P} M'_{km} \text{ u (mm) za } s = 25 \text{ m} \quad (15)$$

Kod PRECIZNIH NIVELIRA VRHUNSKIH TAČNOSTI tačnost horizontiranja iznosi $m''_L = \pm \frac{\varepsilon''}{80}$, pa možemo uzeti: $m''_L = \frac{1}{2} m''_v$.

Iz toga slijedi osjetljivost libele, kao konstrukcioni uslov:

$$\frac{\varepsilon''}{80} = \frac{5''}{P} \text{ tj. } \varepsilon'' = \frac{400''}{P}$$

U tom slučaju je: $m_v = m_n = \frac{s}{20 P}$ a $m_L = m_o = \frac{s}{40 P}$, te uvrštenjem dobivamo:

$$M'_{km} = \pm 1,8 \sqrt{\frac{s}{P}} \quad (16)$$

Primjer: WILD N3

Povećanje ovog nivelira iznosi $42 \times$. Osjetljivost libele $\varepsilon'' = \frac{400}{42} = 9,5''$

(prema prospektu $10''$). $m'' = \frac{\varepsilon''}{80} = \pm 0,12''$.

Ako primijenimo formulu 2.

$$\mu = \pm \sqrt{m_L^2 + m_V^2} = \sqrt{0,12^2 + \left(\frac{10}{42}\right)^2} = \pm 0,27''$$

$$\text{Za } s = 30 \text{ m, } M'_{km} = 0,11 \cdot 0,27 \cdot 5,5 = \pm 0,16 \text{ mm.}$$

Prema formuli 16.:

$$\text{za } s = 30 \text{ m. } M'_{km} = 1,8 \frac{5,5}{P} = \frac{10}{P} = \pm 0,24 \text{ mm}$$

Za razliku od formule 2. ovdje je obuhvaćen i utjecaj paralakse, kao i pogreške očitavanja.

ZAKLJUČAK. — U nizu formula koje smo izveli, prikazali smo srednju pogrešku vizure, kao i srednju pogrešku visinske razlike za 1 km dvostrukog nivelmana kao funkcije instrumentalnih i subjektivnih utjecaja. Pri tom smo pretpostavljali slučajnost nastalih pogrešaka, pa smo sistematske uplive zanemarili. Uz prikaz izvoda iz naše stručne literature nastojali smo i izvesti što jednostavniji ili pregledniji oblik za srednju pogrešku u ovisnosti o osnovnoj instrumentalnoj konstanti — povećanju. Kod običnih nivelira dobili smo na taj način formule:

$$M'_{km} = \pm \frac{8,5}{\sqrt{P}} \text{ za } s_{opt} = 3,5 P, \text{ letva sa } 1 \text{ cm podjelom, srednja pogreška horizontiranja } m''_L = \pm \frac{20''}{P} \text{ gdje je } P \text{ povećanje durbina.}$$

$$M'_{km} = \pm \frac{6}{\sqrt{P}} \text{ za } s_{opt} = 1,7 P, \text{ letva sa } \frac{1}{2} \text{ cm podjelom, } m_L = \pm \frac{20''}{P} \\ m_p = \pm 0,25 \text{ mm.}$$

Za najjednostavnije nivelire orjentacione formule bi glasile:

$$M'_{km} = \pm \frac{16}{\sqrt{P}} \text{ za } s_{opt} = P, \text{ letva sa } 1 \text{ cm podjelom } (m_p = \pm 0,5 \text{ mm}) \text{ i} \\ \text{srednja pogreška horizontiranja } m_L = \pm \frac{100''}{P}$$

$$M'_{km} = \pm \frac{22}{\sqrt{P}} \text{ za } s_{opt} = 2 P, \text{ letva sa } - \text{ cm podjelom i srednjom pogreškom} \\ \text{procjenjivanja } m_p = \pm 1 \text{ mm, te } m_L = \pm \frac{100'}{P}.$$

$$\text{Za precizne nivelire uz } s = 25 \text{ m, } m''_V = m_L = \frac{10''}{P}$$

$$\text{osjetljivost libele } \epsilon'' = \frac{400''}{P}$$

$$M'_{km} = \pm \frac{10}{P}$$

Sve vrijednosti za M'_{km} dobivaju se izražene u mm.

Pri primjeni formula treba uočavati njihovu strukturu, tj. pretpostavke na osnovu kojih su izvedene. Imajući to u vidu neće nas iznenaditi izvjesne razlike koje će se pojaviti, bilo pri komparativnoj usporedbi formula, bilo prema izvjesnim podacima iz prospekata tvornica.

Teoretski postavljene formule ne mogu nam sa sigurnošću predskazati tačnost mjerenja koju ćemo postići, jer ne samo što to ovisi o svrsishodnosti konstrukcije instrumenta u svim djelovima, ne samo što to ovisi o opservatoru i terenskim okolnostima, već i zbog toga, što ove formule obuhvaćaju samo određene instrumentalne i fiziološke komponente koje se kod mjerenja pojavljuju. Ipak, one imaju svoj značaj, jer nam pokazuju utjecaj nekih određenih upliva, što nas navodi na korisne praktičke zaključke o dužinama vizura, o izboru instrumentarija, kao i mogućnostima određenog instrumenta. A što je najkorisnije, dobivamo podatke o tačnosti koju uz određene uslove možemo postići.

LITERATURA:

- (1) Prof. ing. Slavko Macarol: Praktična geodezija, Zagreb 1954.
- (2) Dr ing. G. Förstner: Wirtschaftliches Nivellieren Allgemeine Vermessungsnach. 1953/7.
- (3) Ing. A. Kostić i ing. N. Svečnikov: Nivelman, Beograd 1936.
- (4) Dr V. Happach: Optimale Dimensionierung von Nivellieren Zeitschrift für Verm. 1952/7.
- (5) Dr V. Happach: Zur Leistungsteigerung bei Nivellieren Allgemeine Verm. 1952/1.
- (6) Dr A. Noetzli: Untersuchungen über die Genauigkeit des Zilens mit Fernrohren, Dis. Zürich, 1915.
- (7) W. Schneider: Über die Entwicklung neuzeitlicher Nivelliere, insbesondere mit automatischer Horizontierung. Vermessungstechn. Rundschau 1953/8.