

# RAZMATRANJA O OCJENI TAČNOSTI GEODETSKIH MJERENJA NA BAZI MATEMATIČKE STATISTIKE I TEORIJE VJEROJATNOSTI

POVODOM TRIGONOMETRIJSKE MREŽE GRADA BEOGRADA

Inž. ZVONIMIR NAROBÉ, GF — Zagreb\*

UVOD. — U izdanju Savezne geodetske uprave, izašla je 1961. godine publikacija pod naslovom »Trigonometrijska mreža grada Beograda«. Pisac publikacije, prof. Nikola Svečnikov, pregledom radova i detaljnom analizom tačnosti mjerenja, upoznao je time i šire stručne krugove sa rezultatima ovog zaista značajnog zadatka koji je kod nas izvršen.

Visoka tačnost mreže, njena veličina i cjelovitost pružaju zahvalni materijal za studij i analizu na širokom području geodetskih radova ove vrste.

Cilj ovog članka jest da se na primjeru trigonometrijske mreže Beograda, ukaže na samo neke metode i mogućnosti razmatranja, razrađene u teoriji matematičke statistike. Primjena tih metoda kod geodetskih mjerenja omogućena je radi povezanosti matematičke statistike i teorije pogrešaka. Sudeći po našoj stručnoj štampi, može se reći, da se kod nas razmatranja ove vrste koriste daleko manje nego što ona to zaslužuju.

Članak će se ograničiti samo na vanjsku tačnost mjerenja kuteva u mreži, izraženu pogreškama u zatvaranju trokuta. Kao izvorni podaci poslužiti će numeričke vrijednosti za 135 trokuta, koje su štampane u tablici 22 na 55 strani spomenute publikacije.

HISTOGRAMI I MOMENTI RAZDIOBE BEOGRADSKE MREŽE. — Umjesto pojedinačnih numeričkih vrijednosti, pogreške zatvaranja trokuta  $\Delta$ , prikazat će se ovdje u obliku histograma. Na apscisi označene su granice razreda, a na ordinati pripadajuće frekvencije (broj pogrešaka koje pripadaju pojedinom intervalu). Slika 1 prikazuje nekoliko histograma, sa različitim širinama intervala.

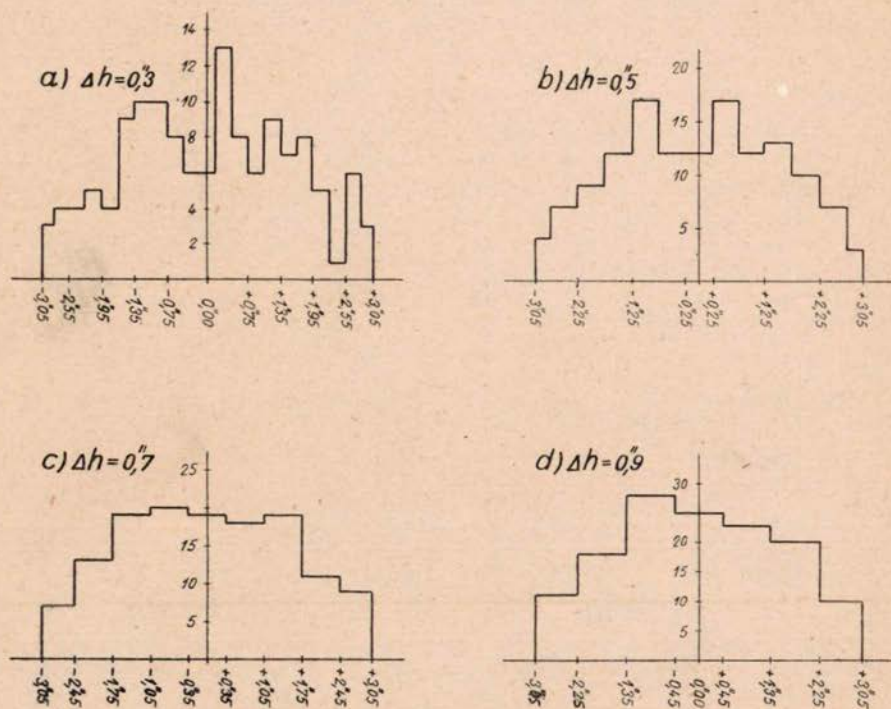
\* G. F. — Geodetski Fakultet — Zagreb, Kačićeva 26.

TABELA I

$\Delta^n$	$f_{\Delta}$	$f_{\Delta} \Delta$	$f_{\Delta} \Delta^2$	$f_{\Delta} \Delta^3$	$f_{\Delta} \Delta^4$	$f_{\Delta}  \Delta $	$t = \frac{\Delta}{m_{\Delta}}$	$\varphi(t)$	$f_{\Delta} = \frac{v_{\Delta}}{60,97 \varphi(t)}$	$v_{\Delta} = f_{\Delta} - f_{\Delta}$	$v_{\Delta}^2$	$\frac{v_{\Delta}^2}{f_{\Delta}}$	$P_{\Delta} = \varphi(t)/2,21$	$Q_{\Delta} = 1 - P$	$NPQ$	$m = \sqrt{NPQ}$	$v^2 = \frac{v_{\Delta}^2}{NPQ}$	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	
-4,2	0	0,0	0,0	0	0	0,0	2,710	0,0128	0,8	-0,8	0,64	7,3	2,7	0,0058	0,9942	0,8	0,9	2,7
-3,5	0	0,0	0,0	0	0	0,0	2,258	0,0312	1,9	-1,9	3,61	7,3	2,7	0,0141	0,9859	1,9	1,4	2,7
-2,8	7	-19,6	54,9	-154	431	11,7	1,806	0,0780	4,7	+2,3	5,3	7,3	2,7	0,0353	0,9647	4,6	2,1	1,2
-2,1	13	-27,3	57,3	-120	252	18,8	1,355	0,1593	9,7	+3,3	10,9	7,3	2,7	0,0721	0,9279	9,0	3,0	1,2
-1,4	19	-26,6	37,2	-52	73	22,4	0,903	0,2654	16,2	+2,8	7,8	7,3	2,7	0,1201	0,8799	14,3	3,8	0,5
-0,7	20	-14,0	9,8	-7	5	16,8	0,452	0,3602	22,0	-2,0	4,0	7,3	2,7	0,1630	0,8370	18,4	4,3	0,2
0,0	19	0,0	0,0	0	0	0,0	0,000	0,3989	24,3	-5,3	28,1	7,3	2,7	0,1805	0,8195	20,0	4,5	1,4
+0,7	18	+12,6	8,8	+6	4	15,1	0,452	0,3602	22,0	-4,0	16,0	7,3	2,7	0,1630	0,8370	18,4	4,3	0,9
+1,4	19	+26,6	37,2	+52	73	22,4	0,903	0,2654	16,2	+2,8	7,8	7,3	2,7	0,1201	0,8799	14,3	3,8	0,5
+2,1	11	+23,1	+48,5	+102	214	16,0	1,355	0,1593	9,7	+3,3	1,7	7,3	2,7	0,0721	0,9279	9,0	3,0	0,2
+2,8	9	+25,2	70,6	+198	554	15,0	1,806	0,0780	4,7	+4,3	18,5	7,3	2,7	0,0353	0,9647	4,6	2,1	4,0
+3,5	0	0,0	0,0	0	0	0,0	2,258	0,0312	1,9	-1,9	3,61	7,3	2,7	0,0141	0,9859	1,9	1,4	4,0
+4,2	0	0,0	0,0	0	0	0,0	2,710	0,0128	0,8	-0,8	0,64	7,3	2,7	0,0058	0,9942	0,8	0,9	2,7
$\Sigma$	135	0,0	324,3	+25	1606	138,2		2,2127	134,9	+0,1		14,8		0,9999				15,5

$\Sigma |f_{\Delta} \Delta| = 175,0$   
 $\mu_1 = \bar{\Delta} = \frac{1}{N} \Sigma f_{\Delta} \Delta = \frac{1}{135} 0,0 = 0,00$  ;  $\mu_2 = \frac{1}{N} \Sigma f_{\Delta} \Delta^2 = + \frac{25}{135} = + 0,185$  ;  
 $\mu_3 = \frac{1}{N} \Sigma f_{\Delta} \Delta^3 = \frac{1}{135} 324,3 = 2,402$  ;  $\mu_4 = \frac{1}{N} \Sigma f_{\Delta} \Delta^4 = \frac{1606}{135} = -11,90$  ;  
 $m_{\Delta} = \sqrt{\mu_2} = \pm 1,36$   
 $\rho_{\Delta} = \left( \frac{\Sigma f_{\Delta} |\Delta|}{N} \right)^2 = \pm 1,05$   
 $Q_{\Delta} = \frac{\Sigma |f_{\Delta} \Delta|}{N} = \pm 1,30'$

Iz histograma, moguće je vidjeti samo opću sliku odnosa frekvencija i pogrešaka. Nastojanje izvršioca mjerenja, da u mreži ne bude pogrešaka većih od 3'', ima za posljedicu nagli pad na oba kraja histograma.



Sl. 1

Histogrami sa malom širinom razreda, daju doduše detaljnije informacije, ali su nepravilniji. Suprotno, histogrami sa većom širinom razreda, mnogo bolje otkrivaju zakonitost vladanja promatranog skupa. Ako je srednja pogreška  $m_{\Delta}$  poznata bar približno, za optimalnu širinu razreda uzima se  $\Delta h = 0,5 m_{\Delta}$ . U ovom primjeru, to bi odgovaralo širini razreda od  $0'',7$  i histogramu na slici 1c. Ovako grupirani podaci, uzeti će se dalje u razmatranje.

Pojedini parametri računati su na osnovu razrednih sredina (aritmetička sredina granica razreda) iz rubrike 1 tabele I.\* U rubrici 2 ispisane su empiričke frekvencije.\*\* Na pr. iz šestog reda razabire se, da je u mreži 20 trokuta čije pogreške su u granicama od  $-0''35$  do  $-1''05$  (razredna sredina  $-0''7$ ). Da bi podaci bili svrstani u razrede jednake veličine, granice krajnjih razreda jesu  $-3''15$  i  $+3''15$  umjesto pravilnijih  $-3''05$  i  $+3''05$ . Zbog toga, kao i općenito radi računanja sa grupiranim podacima, ovdje sračunati parametri, neznatno će se razlikovati od istih parametara dobivenih u publikaciji. Egzaktniji račun, zahtijevao bi uvođenje tzv. Sheppardove korekture, koja se ovdje neće uzimati u obzir.

Da bi se empirička distribucija mogla podrobnije analizirati, u daljnjim rubrikama tabele izvršene su potrebne predradnje, i zatim sračunata prva četiri momenta ( $\mu_1 \dots \mu_4$ ), srednja pogreška  $m_{\Delta}$ , vjerojatna pogreška  $\rho_{\Delta}$  i prosječna pogreška  $Q_{\Delta}$ .

Prvi moment (aritmetička sredina pogrešaka) iznosi

$$\mu_1 = \bar{\Delta} = 0''00 \quad \left( \frac{m_{\Delta}}{\sqrt{N}} = \pm 0''13 \right) \quad (1)$$

To je vrijednost, koja se kod normalne distribucije očekuje sa najvećom vjerojatnošću. U zagradi je navedena srednja pogreška aritmetičke sredine za dati primjer, što su ujedno granične vrijednosti kriterija o prisutnosti sistematskih pogrešaka. Prekorači li aritmetička sredina ove granice, to se sa vjerojatnošću većom od 68% nazire mogućnost prisustva sistematskih pogrešaka istog predznaka.

Omjer

$$\tau_3 = \frac{\mu_3}{m_{\Delta}^3} \quad (2)$$

je mjera za asimetriju i kod potpuno simetrične krivulje frekvencija  $\tau_3 = 0$ .

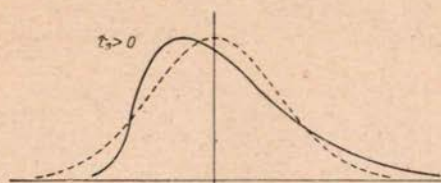
U statistici se uzima:

$$\begin{aligned} 0,00 < \tau_3 < 0,10 & \text{ — nema asimetrije} \\ 0,10 < \tau_3 < 0,25 & \text{ — postoji mala asimetrija} \\ 0,25 < \tau_3 < 0,50 & \text{ — postoji srednja asimetrija} \\ \tau_3 > 0,50 & \text{ — postoji jaka asimetrija} \end{aligned}$$

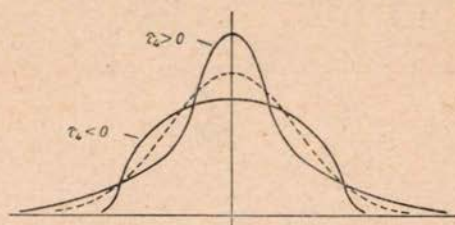
\* Parametri — numeričke veličine koje daju opće obilježje, kao npr. arit. sredina, srednja pogreška itd.

\*\* Pod empiričkim veličinama smatraju se faktične vrijednosti dobivene mjerenjem.

Ako je predznak za  $\tau_3$  pozitivan, asimetrija je desnostrana tj. duži kraj krivulje prostire se u desno, i obratno. Takav oblik krivulje, a kod koje je istovremeno  $\Delta = 0,00$ , vidi se na slici 2.



Sl. 2



Sl. 3

Za granice dozvoljenih odstupanja, prof. Böhm [1] navodi vrijednost  $\pm \frac{3,87}{\sqrt{N}}$ . Prelazi li sračunata vrijednost za  $\tau_3$  ove granice, postoji mogućnost da je simetrija narušena sistematskim uplivom. U primjeru beogradske mreže, neznatna asimetrija.

$$\tau_3 = + 0,05 \left( \pm \frac{3,87}{\sqrt{N}} = \pm 0,33 \right) \quad (3)$$

pripisuje se posljedici slučajnosti pogrešaka. Iako beznačajna, ova asimetrija mogla se već uočiti iz histograma na slici 1d.

Međutim, i potpuno simetrična krivulja ( $\bar{\Delta} = 0,00$ ,  $\tau_3 = 0,00$ ) može se znatno razlikovati od krivulje normalne distribucije. Ona može biti »oštrija« ili »položenija« u odnosu na normalnu krivulju (slika 3).

Izraz

$$\tau'_4 = \frac{\mu_4}{m_\Delta^4} - 3,00 \quad (4)$$

je mjera za eksces krivulje frekvencija i kod normalne krivulje  $\tau'_4 = 0$ , dok se za granice dozvoljenih odstupanja uzima  $\pm \frac{9,80}{\sqrt{N}}$ . Iz primjera beogradske mreže

$$\tau'_4 = - 0,94 \quad \left( \pm \frac{9,80}{\sqrt{N}} = \pm 0,84 \right) \quad (5)$$

razabire se, da se empirička distribucija znatno razlikuje od pripadajuće normalne distribucije. Predznak za  $\tau'_4$  govori o krivulji koja je položenija. Ovakova krivulja formira se onda, kad se nakupi veći dio pogrešaka srednje veličine na račun pogrešaka malih i velikih numeričkih vrijednosti. Veći eksces signalizira mogućnost sistematskog upliva, a uzroke ekscesa potrebno je dalje istraživati.

Ovdje će zato biti navedena još dva kriterija za eksces krivulje, koji su u teoriji pogrešaka bolje poznati, a temelje se na teoretskom odnosu srednje, prosječne i vjerojatne pogreške. Za Gaussovu krivulju normalne razdiobe vrijedi:

$$\tau_4'' = \frac{m_\Delta}{Q_\Delta} - 1,253 = 0 \quad \left( \pm \frac{0,95}{\sqrt{N}} \right), \quad (6)$$

$$\tau_4''' = \frac{m_\Delta}{\varrho_\Delta} - 1,483 = 0 \quad \left( \pm \frac{1,30}{\sqrt{N}} \right), \quad (7)$$

dok na primjeru promatrane mreže, oni su:

$$\tau_4'' = -0,061 \quad (\pm 0,082) \quad (8)$$

$$\tau_4''' = -0,007 \quad (\pm 0,112) \quad (9)$$

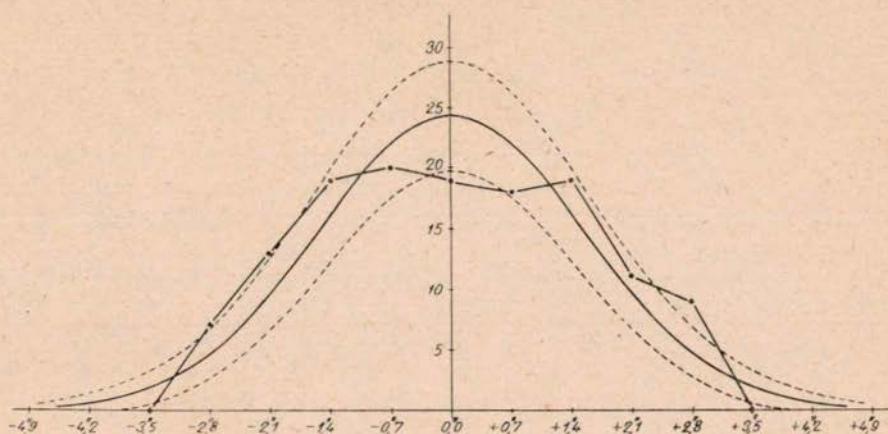
Razmotre li se sada sva tri kriterija za eksces, vidi se da prema predznaku svi ukazuju na krivulju, položeniju u odnosu na normalnu. Dok prvi kriterij ( $\tau_4$ ) prelazi dovoljene granice, druga dva ( $\tau_4''$  i  $\tau_4'''$ ) nalaze se unutar granica. Treba napomenuti da su vrijednosti pojedinih kriterija međusobno različite. Kod sva tri kriterija ( $\tau_4$ ,  $\tau_4''$ ,  $\tau_4'''$ ) u brojniku i nazivniku su parametri dobiveni iz istih izvornih podataka, pa su međusobno zavisni. Zbog toga i granične vrijednosti u zagradama treba shvatiti kao približne. Ispitivanje normalnosti emiričke distribucije navedenim načinom ima dakle samo informativni karakter.

**DALJNJE MOGUĆNOSTI ANALIZE — TESTOVI** — Gaussova krivulja normalne razdiobe pogrešaka, tabelirana je u gotovo svim udžbenicima s područja teorije vjerojatnosti. Poznavajući aritmetisku sredinu  $\bar{\Delta} = 0,00$ , i srednju pogrešku  $m_\Delta = \pm 1,55$ , uz pomoć tabele može se sračunati kakva bi trebala biti teoretska razdioba frekvencija  $f_t$  za 135 trokuta beogradske mreže. Ovaj račun izveden je u daljnjim rubrikama tabele I, iz koje je ujedno vidljiv i postupak. Treba samo napomenuti da se vjerojatnost  $\varphi(t)$  za pojedini razred vade iz tabele na osnovu argumenta  $t$ . Da bi kontinuitet normalne krivulje bio bolje izražen, teoretske frekvencije  $f_t$  sračunate su na jednu decimalu, što dakako nema praktični značaj. Dalje su u tabeli sračunate razlike  $v$  između teoretskih i empiričkih frekvencija.

Na slici 4 je sve ovo prikazano grafički. Ucrtana je normalna krivulja na osnovu teoretskih frekvencija i empirički poligon frekvencija, pa se mogu vidjeti i odstupanja empiričkih od odgovarajućih teoretskih vrijednosti. Ove diferencije u pojedinim razredima su različite i po veličini i po predznaku. Međutim, ovakvim uvidom još uvijek se ne može donijeti zaključak jesu li ove diferencije po svojoj numeričkoj vrijednosti takove da bi se one mogle tolerirati.

Na strani 56 publikacije, na sličan se način vrši uporedba teoretskih i empiričkih frekvencija apsolutnih vrijednosti pogrešaka, i poslije se analiziraju pojedine diferencije. Čitalac dobiva dojam, da je potrebno obja-

sniti svaku »veću« diferenciju, i dalje da je granična vrijednost koja dijeli »veće« od »manjih« diferencija jednaka za sve razrede.



Sl. 4.

Ostaje otvoreno pitanje, koje razlike smatrati velikim a koje malim?

Raspored pogrešaka, kao niz slučajnih veličina, treba se pokoravati Gaussovom zakonu normalne distribucije, koji ima za podlogu zakon velikih brojeva. Teoretski oblik distribucije izražen je normalnom krivuljom. Za empirički konačni niz slučajnih veličina, posve je prirodno da isto tako slučajno odstupi od svog teoretskog oblika razdiobe. Ukoliko su diferencije takove veličine da im se može pripisati slučajnost, onda daljnja objašnjenja nisu potrebna.

Srednja pogreška u teoriji vjerojatnosti dana je izrazom

$$m = \pm \sqrt{NPQ} \quad (10)$$

gdje su

N — broj elemenata (u ovom primjeru 135),

P — vjerojatnost da nastupi neki događaj,

Q — protivna vjerojatnost  $Q = 1 - P$

Za primjer beogradske mreže može se tako sračunati, kolika bi u pojedinim razredima smjela biti odstupanja, a da bi ona bila u granicama srednje pogreške. Prema formuli (10) u tabeli I. sračunata su odstupanja koja odgovaraju srednjoj pogreški, a na slici 4 gornja i donja granica povučena je crtkano. Zona je na krajevima distribucije uža, iz čega slijedi da su i odstupanja na krajevima značajnija od odstupanja u sredini distribucije. Sada se iz slike može preglednije vidjeti koji su razredi i u kojoj mjeri odstupili od teoretskih veličina. Numerički se ovo vidi iz rubrika 11 i 17 tabele I, gdje su u rubrici 11 faktična odstupanja, a u rubrici 17 odstupanja koja odgovaraju srednjim kvadratnim pogreškama  $m$ . Što su odstupanja u rubrici 11 izražena mjerom iz rubrike 17 veća, to su ona i manje vjerojatna, znači nepovoljnija.

Iz teorije pogrešaka poznato je, da se unutar granica srednje pogreške (na slici 4 crtkano) treba nalaziti 68% empiričkih vrijednosti. Iz podataka u tabeli je sumarno stanje u ovom primjeru slijedeće:

u granicama:	$\pm m$	$\pm 2 m$	$\pm 3 m$
teoretski treba:	68%	95%	99,7%
u primjeru ima:	45%	91%	100%

Obzirom da su u nekim razredima odstupanja blizu granice  $\pm m$ , stanje je nešto nepovoljnije. Međutim, zbog malog ukupnog broja razreda (11), za ovaj se primjer ne može sa dovoljno visokom vjerojatnošću tvrditi da odstupanja nemaju slučajni karakter.

Osim ovakvog načina ispitivanja normalnosti neke empiričke razdiobe, postoji danas razrađen cijeli niz metoda odnosno testova. Čitaoci Geodetskog lista su u članku Ing. Abdulaha Muminagića [7] bili upoznati sa metodom pomoću Anrijevog pravca (u statistici bolje poznat pod imenom »papira vjerojatnosti«). U istom je članku objašnjen i vrlo popularan Pearsonov  $\chi^2$  (hi kvadrat) test, koji će se i ovdje primijeniti.

U tabeli I. sračunat je

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_{\Delta} - f_t)^2}{f_t} \quad (11)$$

Iz posebnih tablica se na osnovu ovog argumenta i 8 stepena slobode dobiva za razmatrani primjer vjerojatnost od samo

$$P = 7\% \quad (12)$$

da su diferencije od teoretskog oblika krivulje slučajne. S druge strane postoji visoka vjerojatnost od 93% da diferencije nemaju slučajni karakter. Za primjer beogradske mreže ovo je svakako dosta nepovoljan rezultat, iako je još uvijek prihvatljiv. Za donju granicu prihvatanja uzima se naime  $P = 5\%$  što odgovara dvostrukoj srednjoj pogreški.

Ovakvom tretiranju rezultata  $\chi^2$  testa može se naći više prigovora. Primijetilo se da na veličinu  $\chi^2$ , u formuli (11), velik uticaj imaju odstupanja na krajevima distribucije. Zato, po savjetu statističara Fishera, treba nastojati da u razredima ne bude manjih frekvencija od 5. U ovom bi primjeru tako trebalo spojiti razrede  $\Delta \geq 2,8$ , čime bi se znatno smanjila vrijednost za  $\chi^2$ , odnosno povećala vjerojatnost P. Međutim za ovaj primjer bi to bilo pristrano, jer su empiričke frekvencije u krajnjim razredima namjerno dovedene na nulu, nastojanjem da u mreži ne bude odstupanja većeg od 3", dok se istovremeno testom ispituje stepen bliskosti sa teoretskim oblikom razdiobe.

Postoje prigovori i u tome, da se stepen bliskosti, tj. mjera koliko je empirička razdioba bliska teoretskoj, izražava pomoću vjerojatnosti P. Dobije li se naime po formuli (11) niska vrijednost za  $\chi^2$ , to postoji visoka vjerojatnost (koja se približuje sigurnosti) da su odstupanja slučajna. Međutim, ne samo velika odstupanja emiričkog od teoretskog oblika, nego isto tako i njihova predobra saglasnost, malo je vjerojatna. Istina, za em-

pirički niz slučajnih veličina postoji najveća vjerojatnost da će dati teoretski oblik. Međutim ova najveća vjerojatnost, u odnosu na sumarno uzetu vjerojatnost ostalih mogućnosti, toliko je mala, da teoretski raspored empiričkih veličina postaje rijedak događaj. Za takve primjere Fisher kaže: »slaganje je predobro a da bi bilo istinito«. Uvedena je zato ne samo donja (5%) nego i gornja (95%) granica za prihvaćanje hipoteze.

Iako se  $\chi^2$  test upotrebljava vrlo mnogo, već iz ovog što je rečeno vidi se da on može dosta često dovesti do pogrešnog tumačenja i zablude. Naravno kritički, na ovaj se test osvrću ruski naučnici. Tako B. S. Jastremskij [6] utvrđuje, da  $\chi^2$  kriterij ne daje osnova za sud o stepenu bliskosti empiričkih i teoretskih učestalosti, već da on rješava sasvim drugu zadaću. Negativan stav ruskih naučnika, izražen je i serijom novih predloženih kriterija koji rješavaju takav zadatak.

Ovdje će se prikazati samo kriterij Jastremskog. Po već uvedenim oznakama, treba sračunati izraz

$$\sum \frac{(f_{\Delta} - f_i)^2}{NPQ} \quad (13)$$

Numerička vrijednost izraza, u srednjem treba biti jednaka broju razreda  $n$ , koji je u ovom primjeru  $n = 11$ . Kod beogradske mreže (vidi tabelu) došlo je do razlike od 4,5 tj. 15,5 — 11,0. Za dopustive granice Jastremskij navodi vrlo široku zonu koja odgovara trostrukoj srednjoj pogreški.

$$I = \pm 3 \sqrt{2m + 2,4} = \pm 14,8 \quad (14)$$

Kako je razlika 4,5 unutar dozvoljenih 14,8 smatra se da je empirička razdioba dovoljno bliska normalnoj. Razlika 4,5 manja je i od granice koja odgovara dvostrukoj srednjoj pogreški  $I = \pm 9,9$  ( $I$  kod  $\chi^2$  testa uzete su ove granice).

Cjelokupno razmatranje ukazuje, da u beogradskoj mreži postoje dođe nešto veća odstupanja od teoretskog oblika, ali ta su odstupanja još uvijek takva da se bez daljnjega mogu tolerirati. U odnosu na ovdje dobivena odstupanja, u publikaciji su na strani 56 odstupanja nešto manja. Jedan razlog je taj što su razredi tamo drugačije grupirani. Osim toga, vjerojatno uslijed pogrešne procjene širine razreda, tamo su krivo sračunate teoretske vrijednosti. Zadnje tri rubrike u tablici 23 na strani 56 trebale bi biti ovakove:

Tabela II

Teoretski T	17	14	13	13	12	11	10	8	7	6	5	4	4	3	2	2	1	1	→ 2
Stvarni S	12	13	7	13	12	13	12	10	8	9	5	5	6	4	6	0	0	0	0
$V = T - S$	+5	+1	+6	0	0	-2	-2	-2	-1	-3	0	-1	-2	-1	-4	+2	+1	+1	+2

ANALIZA TENDENCIJE ODSTUPANJA. — Pogleda li se kritički na izložene metode i kriterije, dolazi se do zaključka da je iz njih dobivene rezultate potrebno prihvaćati sa izvjesnom rezervom. Jedan je razlog taj



što su neki od njih zasnovani na približnim formulama. Drugi je razlog, da rezultati ovise o upotrebljenom načinu grupiranja u razrede. Konačno, moglo se uočiti da se pri računanju nisu uzimali u obzir predznaci odstupanja. Izložene metode, potrebno je dakle dopuniti analizom tendencije odstupanja.

Na primjeru beogradske mreže vrlo jasno se razabire, da tendencija postoji. To se vidi iz rubrike 11 tabele I prema grupiranju predznaka odstupanja, a isto tako i iz zadnjeg reda tabele II. Koji je uzrok za ovakvo stanje?

Sva mjerenja u mreži izveli su iskusni stručnjaci, sa mnogo pažnje u radu. Prethodno je, zbog raznih uzroka prema navodima u publikaciji, ponovljen manji broj mjerenja (6,2%) . Veliki broj ponavljanja (37,9%) izvršen je zato što su u 12 trokuta (9%), pogreške zatvaranja prelazile 3".

Iz ovih se podataka može pretpostaviti, da je prije 37,9% ponovljenih mjerenja srednja pogreška zatvaranja trokuta bila približno  $m_{\Delta} = \pm 2,0$ . Pravi podatak u publikaciji nije naveden.

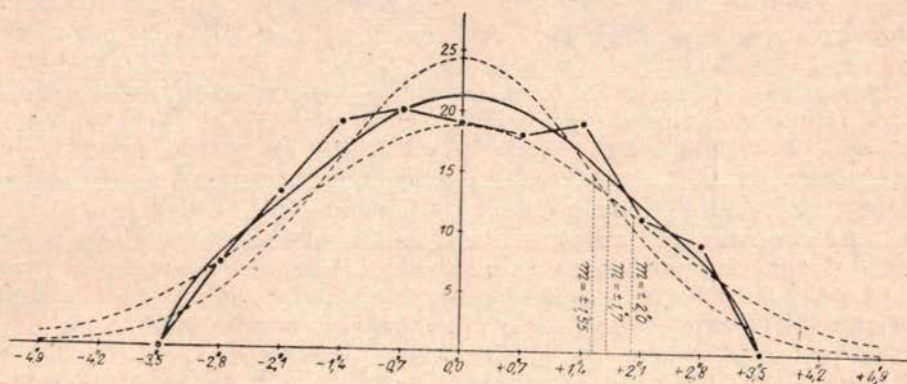
Normalna teoretska distribucija sa parametrima  $N = 135$  i  $m = \pm 2,0$  sračunata je u rubrici 4 tabele III. U distribuciji postoji 15 trokuta sa odstupanjem većim od 3"15, što se smatra normalnom pojavom. Pretpostavi li se, da su unatoč tome istom tačnošću ( $m = \pm 2,0$ ) izvršena ponovna mjerenja u ovih 15 trokuta, i ako egzistiraju opet samo slučajne pogreške, trokutu će se teoretski rasporediti kao što je sračunato u rubrici 5. Ponove li se mjerenja u još preostala 2 trokuta, dobije se nova teoretska razdioba u rubrici 7 za svih 135 trokuta.

Tabela III

$\Delta''$	$t = \frac{\Delta}{2,00}$	$\varphi(t)$	$f_t =$ 47,25 $\varphi(t)$	5,39 $\varphi(t)$	0,63 $\varphi(t)$	$f_t =$ (4)+(5)+(6)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
-4,9	2,45	0,0314	1,5	0,2	0,0	0,0
-4,2	2,10	0,0440	2,1	0,2	0,0	0,0
-3,5	1,75	0,0863	4,1	0,5	0,0	0,0
-2,8	1,40	0,1497	7,1	0,8	0,1	8,0
-2,1	1,05	0,2299	10,9	1,2	0,2	12,3
-1,4	0,70	0,3122	14,7	1,7	0,2	16,6
-0,7	0,35	0,3752	17,7	2,0	0,3	20,0
0,0	0,00	0,3989	18,8	2,2	0,3	21,3
+0,7	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
$\Sigma =$			135,0	15,4		135,1

Na slici 5 prikazana je crtkano normalna krivulja  $m = \pm 2,0$  (položenija) i normalna krivulja  $m = \pm 1,55$  (oštrija). Osim poligona empi-

ričkih vrijednosti, punom je linijom ucrtana i nova teoretska distribucija prema rubrici 7 tabele III. Po obliku nove razdiobe vidi se, da ona nema ništa zajedničkog sa normalnom krivuljom, a izgubila se je i tačka infleksije. To je oblik razdiobe, koji se teoretski očekuje onda, kada se



Sl. 5

ponavljaju mjerenja s većim odstupanjima iako su ta odstupanja sasvim normalna pojava za izvjesnu tačnost mjerenja. Slika pokazuje, da se toj teoretskoj razdiobi vrlo dobro prilagodio empirički poligon frekvencija beogradske mreže.

Izvedeni oblik distribucije nije strogo primijenjen na podatke beogradske mreže. To prema raspoloživim podacima nije bilo moguće, a nije bio ni cilj. U praksi, ponavljanje mjerenja vezano je ne samo uz pojedinačne pogreške u zatvaranju trokuta, već i uz razne druge uslove kojima mjerenja trebaju udovoljiti. Problem nije tako jednostavan, kako bi to možda izgledalo iz ovog razmatranja.

**ZAKLJUČIVANJA.** — Cilj razmatranja bio je, da se dovoljno uvjerljivo prikaže kako je ponovljenim mjerenjima u beogradskoj mreži poremećen teoretski odnos pogrešaka. Uostalom, poremećaj je konstatiran i u publikaciji, i tamo ocijenjen kao neznatan. Obzirom na numeričke apsolutne vrijednosti odstupanja konstatacija je na mjestu. Međutim, obzirom na tendenciju, ovaj je poremećaj ipak nešto ozbiljnije naravi.

I ovdje treba napomenuti, da se gornji zaključci ne smiju prihvaćati bez rezerve. Teško je dokazati nešto, a pri tome se služiti podacima i metodama koje se baziraju na teoriji vjerojatnosti. Izvjesna hipoteza nalazi svoju potvrdu jedino tako, da je ona prihvatljiva sa većom ili manjom vjerojatnošću. Prema tome, i zaključci se donose uz manje ili više rizika, i nisu ekskluzivni. U tom smislu treba shvatiti i daljnje izlaganje.

Stanje u mreži Beograda, samo po sebi nameće cijeli niz pitanja. Neki odgovori, nalaze se u samoj publikaciji. Na pr. budući da se zakoni raspodjele pogrešaka moraju poštovati, nije pravilno nastojati da u mreži

ne bude pogrešaka većih od 3,"0 »kada ova maksimalna greška nije u saglasnosti sa srednjom greškom.« Ipak, čita se dalje, naknadna mjerenja u svrhu povećanja tačnosti treba vršiti, ali »tako da maksimalna greška bude u punoj saglasnosti sa srednjom greškom izvršenih merenja«. Ovo se postiže tako, da naknadna mjerenja obuhvate ne samo trokute sa velikim odstupanjima, nego se ona vrše u većem opsegu. Pod velikim odstupanjem, ovdje se ne misli na grube pogreške, nego za izvjesnu metodu i način rada, sasvim normalna odstupanja sa krajeva distribucije.

Iz navedenog se zaključuje da su u beogradskoj mreži vršena naknadna mjerenja u svrhu povećanja tačnosti. Umjesto 9% (12 trokuta), izvršena u naknadna mjerenja u opsegu 37,9% vjerovatno zato da povećanje tačnosti ne bi išlo na štetu normalnosti raspodjele pogrešaka. Unatoč tome, kako je u ovom izlaganju konstatirano, to se nije postiglo.

Možda je pravilno mišljenje, da se kod ovakove vrste radova ne bi smjelo gledati na ekonomičnost. Ipak, ako se naknadna mjerenja vrše u tako velikom opsegu, nehotice se nameće pitanje: koliki je dobitak u tačnosti kao protuvrijednost za ovolika naknadna mjerenja?

Na prvi pogled odgovor je jednostavan. Od srednje pogreške  $\pm 2,"0$  (približno) prije naknadnih mjerenja, konačna je tačnost mreže izražena srednjom pogreškom  $\pm 1,"55$ . Međutim, ovakove se numeričke vrijednosti dobivaju samo onda, kad se srednja pogreška računa po formuli

$$m_{\Delta} = \pm \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{N}} \quad (15)$$

koja se temelji na Gaussovoj normalnoj razdiobi pogrešaka. Ako se radi o nekom drugačijem teor. obliku raspodjele, kao npr. o obliku na slici 5, smije li se i dalje upotrebljavati formula (15)?

Može se poći i drugim putem. Srednja pogreška definirana je kao granična vrijednost unutar koje leži 68% pogrešaka. Kod normalne krivulje ova je granica identična sa tačkom infleksije. Krivulja, zatim lijeva i desna granica, te apscisna os zatvaraju 68% površine ispod normalne krivulje. I za teoretsku krivulju na slici 5 može se pronaći lijeva i desna granica, koje će zatvarati 68% površine. Prema podacima iz rubrike 7 tabele III, linearnom interpolacijom za graničnu vrijednost dobiva se  $m_{\Delta} = \pm 1,"7$ . Znači, u smislu gornje definicije za srednju pogrešku, **ne može se više govoriti o postignutoj tačnosti  $m_{\Delta} = \pm 1,"55$ , već je ta tačnost  $m = 1,"7$ . Istina, formula (15) daje »ljepši« rezultat ali je pitanje dali je on i »bolji« (realniji). Posebno je još pitanje, kako će se kod izjednačenja metodom najmanjih kvadrata ponašati ovakav oblik distribucije, kad se izjednačenje osniva na normalnom obliku raspodjele pogrešaka?**

Ovdje je već u prvom dijelu, kod ispitivanja pomoću momenata, ukazano na oblik krivulje sa slike 5 (vidi sl. 3). Tamo je rečeno, da ovakav oblik signalizira mogućnost prisustva sistematskih pogrešaka. Kasnije se vidjelo, da takav oblik proizlazi i onda ako se ponavljaju mjerenja sa krajeva distribucije, pri čemu po apsolutnoj vrijednosti dosta niska granica ponavljanja ( $\pm 3,"0$ ) nije dovoljno argumentirana.

Međutim i prvu verziju o prisustvu sistematskih pogrešaka, ne treba odbaciti. Naime, na strani 50 publikacije, kao opravdanje za 44% ponovljenih mjerenja, navodi se glavni uzrok, uticaj bočne refrakcije kod gradskih mjerenja. Različitim predznakom i veličinom, ova pogreška utiče i na vrijednost ukupne pogreške u zatvaranju trokuta. Takav njen karakter ne daje mogućnosti da se odredi njena prava vrijednost, a ni mogućnost eliminacije iz rezultata mjerenja. Kombinacijom mjerenja pri raznim vanjskim okolnostima, nastoji se jedino smanjiti njen uticaj. U kojoj je mjeri to postignuto sa 44% ponovljenih mjerenja? Nije li nedovoljan uspjeh u tom pravcu izražen deformacijom normalne krivulje? Možda je te predznak, da način rada, tačnost izmjere, vanjske okolnosti pod kojima se radi (dnevni uslovi, gradska mjerenja) i njihovo nedovoljno poznavanje, ne daju više dovoljno mogućnosti za povećanje tačnosti.

Na strani 57 publikacije napisana je u postskriptumu primjedba: »Iz opita (ogleda) je konstatovano, da je pri dnevnoj svetlosti nemoguće, usled nepovoljnih uslova za prolaz zrakova u gradovima, izmeriti uglove sa srednjom greškom manjom od 3''—4''.« Podatak se odnosi na mjerenja u poligonometrijskim mrežama. Međutim, ova granica iako manja postojati će i za mjerenja kod gradske triangulacije. Nije li beogradska trigonometrijska mreža primjer pokušaja da se pređu ove granice?

Odluka, da se izvrše naknadna mjerenja većeg opsega, donešena je svakako nakon obrade i analize prethodnih mjerenja. Nova mjerenja zahtijevala su i ponovan izlazak na teren i ponovnu obradu novih podataka. Pribroji li se tome danas gotovo uvijek kratak rok i neophodnost što hitnijeg izvršenja zadataka, ekonomski elementi dolaze do svog punog izražaja. Zato i pitanje oportuniteta poboljšanja već i onako visoke tačnosti mjerenja, ne bi trebalo ignorirati.

#### LITERATURA:

- (1) Böh m: Vyrovnávací počet, Část I., Teorie chyb — Praha 1958.
- (2) Čebotarev: O matematičeskoj statistike, Geodezija i aerofotosjorka No 2 — Moskva 1960.
- (3) Čubranić: Račun izjednačenja — Zagreb 1958.
- (4) Delong: Zhodnocení Československé trigonometrické síť I. řádu, Geodetický a kartografický sborník, sv. 6 — Praha 1960.
- (5) Haljd: Matematičeskaja statistika s tehničeskimi prilozhenijami — Moskva 1956.
- (6) Jastremskij: Matematičeskaja statistika — Moskva 1956.
- (7) Muminagić: Anrijev pravac i Pirsonov kriterij u primeni na ocenu naše triangulacije I reda, G. L. br. 5—8 od 1957.
- (8) Svečnikov: Trigonometrijska mreža grada Beograda — Beograd 1961.
- (9) Vranić: Vjerojatnost i statistika — Zagreb 1958.