

RAZMATRANJE VELIČINE I UTJECAJA REFRAKCIJE KOD TRIGONOMETRIJSKOG MJERENJA VISINA

Prof. Dr. Ing. NIKOLA ČUBRANIĆ — AGG Fakultet Zagreb

Osnovna formula za određivanje visina kod trigonometrijskog nivelmana glasi:

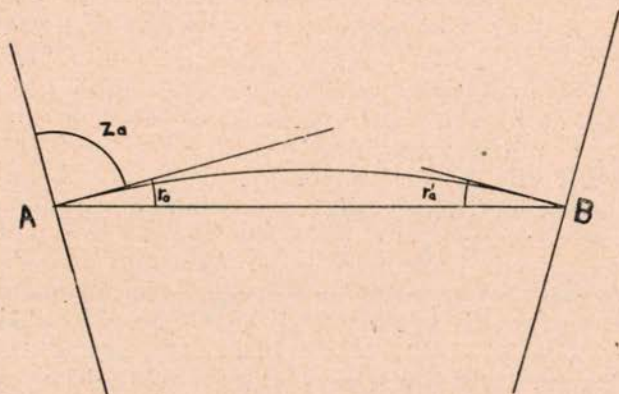
$$\Delta H_{a-b} = S \cot z_a + i_a - l_b + \left(\frac{1 - k_a}{2 R} \right) S^2 + \lambda \quad (1)$$

gdje je S udaljenost na plohi elipsoida između tačaka A i B , z_a zenitni kut izmjeren u tački A , i_a je visina instrumenata na tački A , l_b visina signala na vizurnoj tački B , k_a koeficijent refrakcije u tački A na visini instrumenata u momentu viziranja, a λ je mali korekcionni član, koji ovisi o nadmorskoj visini vizure.

Visinsku razliku možemo dobiti i mjereći zenitni kut u tački B po analognoj formuli

$$\Delta H_{b-a} = S \cot z_b + i_b - l_a + \left(\frac{1 - k_b}{2 R} \right) S^2 + \lambda \quad \dots (1)$$

Glavnu poteškoću za tačno sračunavanje visinskih razlika po gornjim formulama čini nedovoljno poznavanje koeficijenata refrakcije k_a i k_b .



Sl. 1.

Kod izvoda gornjih formula aproksimirali smo utjecaj refrakcije na vizuru tako da vizura postaje dio kružnog luka, kako to prikazuje sl. 1,

te smo uzeli da je zakrivljenost tog kružnog luka nekoliko puta manja od zakrivljenosti Zemlje (da je radij tog kruga za nekoliko puta veći od radija Zemlje) odnosno da je depressioni kut tog kruga, refrakcioni kut

$$r_a = r'_a = k_a \frac{\delta}{2}; \quad r_b = r'_b = k_b \frac{\delta}{2} \quad (2)$$

gdje je $\frac{\delta}{2}$ depressioni kut zakrivljenosti Zemlje (δ je centrični kut). Smisao zakrivljenosti je isti kao i kod Zemlje. Spomenuta aproksimacija refrakcione krivine s lukom kruga omogućila nam je da smo dobili formule (1), odnosno da možemo pristupiti računanju visinskih razlika. U stvari refrakciona krivina će više ili manje odstupati od luka kruga, pa će r'_a biti samo približno jednako r_a i r'_b bit će samo približno jednako r_b .

Kad bi znali koeficijent refrakcije k_a u momentu viziranja sa tačke A, odnosno k_b u momentu viziranja sa tačke B, mogli bismo vrlo tačno, naročito ako je refrakciona krivulja tačan luk kruga, po formulama (1) sračunati visinsku razliku tačaka A i B.

Tačnost bi zavisila samo o tačnosti mjerenja zenitnog kuta i tačnosti dužine S, a te veličine možemo ponavljanjem mjerenja dobiti tačno kako se želi. No vrijednosti koeficijenata k_a i k_b u momentu mjerenja ne znamo, pa obzirom na već učinjenu aproksimaciju da $r'_a = r_a$ i $r'_b = r_b$ uzimamo dalje i $r_a = r_b = r$, odnosno $k_a = k_b = k$. Za računanje uzimamo da je $k = 0,13$, koja je vrijednost dobivena iz prakse. Ovdje moramo naglasiti da se u aritmetičkoj sredini ΔH sračunatoj iz (1) i (1') utjecaj k potpuno poništava. Bilo kakovu vrijednost uzeli za k , čak i grubo pogrešnu, neće imati utjecaja na tačnost aritmetičke sredine. Na tačnost aritmetičke sredine utiče samo razlika stvarne refrakcije u tačkama A i B, odnosno razlika $k_a - k_b$. Ako je refrakcija u tački A i u tački B za vrijeme mjerenja bila potpuno ista, makar i nepoznata, dobit ćemo vrlo tačnu visinsku razliku, oslobođenu od pogrešaka i nepoznavanja refrakcije.

Mjerenja koja smo vršili prošlih godina, što ćemo u posebnom članku iznijeti pokazuju da k_a i k_b variraju svaki za sebe i međusobno u toku dana i u raznim terenima prilično. No unatoč velikih varijacija ta mjerenja pokazuju, da se istovremene vrijednosti k_a i k_b na terenu prikladnom za trigonometrijsko mjerenje visina međusobno vrlo dobro slažu. Prema tome za specijalne slučajeve, kad želimo postići što veću tačnost, ne žaleći truda i većih troškova skopčanih istovremenim obustranim mjerenjem, primjenit ćemo tu staru i isprobanu metodu.

Kod obične primjene trigonometrijskog mjerenja visina, kojeg vršimo uz triangulaciju 3 i 4. reda, obostrano izmjereni zenitni kutovi nisu istovremeni. Ta mjerenja vrši triangulator kako kad i koji dan stigne na koju od trigonometrijskih tačaka. Kod sračunavanja visina uzima se za koeficijent refrakcije $k = 0,13$.

Iz obrade prvih mjerenja ove vrsti kod nas, koja su se vršila uz triangulaciju tokom 1938 i 1939 g. uglavnom na području Makedonije autor je u radnji »Trigonometrijsko mjerenje visina i njegova praktička upo-

treba« Geod. list 1947. dao ocjenu tačnosti određivanja visina na temelju 1696 obostrano izmjerenih visinskih razlika. Ta je ocjena glasila: srednja pogreška obostrano (raznovremeno) izmjerene visinske razlike iznosi 3,7 cm na 1 km dužine. Dužine vizura kretale su se od 0,6 km do 5 km, većina je vizura bila dužine 1 do 2 km. Spomenuta ocjena dobivena je na temelju međusobnog odstupanja visinskih razlika iz mjerenja tamo i mjerjenja natrag. Moramo spomenuti ovdje, da smo tada neki doista mali procent mjerenja izbacili iz razmatranja, jer su se visinske razlike dobivene u smjeru tamo i natrag razlikovale više od »dozvoljenih odstupanja« koje smo a priori postavili.

To je bila mjera opreza, da se ne uvuče kakova gruba pogreška, ali mogli smo na taj način izbaciti i vjerojatno smo izbacili i mnoga tačna mjerenja, jer su te razlike mogle nastat što se stvarni koeficijent refrakcije kod tih (odbačenih) mjerenje mogao za veći iznos razlikovati od 0,13 (što ne utiče na tačnost aritmetijske sredine).

U spomenutom radu iznijeli smo i ukazali na neke nedostatke dotadnjeg rada, koje je moguće ukloniti i povećati tačnost. Uočili smo i nepovoljan utjecaj blizine terena na vizuru, te smo preporučili da se u projektu određivanja visina (kako za određivanje visina neke tačke postoji više mogućih vizura) biraju one vizure, koje su što dalje od terena i raslinstva. U tom smo radu ujedno konstatirali da su pozitivne visinske razlike u jednom smjeru redovito veće od odgovarajućih negativnih (u apsolutnoj veličini). Ovu smo pojavu rastumačili u radu: »Točnost visinskog povezivanja otoka pomoću trigonometrijskog nivelmana«. Geod. list 1956. (tekstom na str. 131 i slikom koja je greškom otisnuta na str. 77). Protumačili smo time da je refrakcioni kut za vrijeme mjerenja bio redovito veći od onog s kojim smo računali visinske razlike, odnosno da je stvarni koeficijent refrakcije bio redovito veći od onog s kojim smo računali pojedinačne visinske razlike t. j. veći od 0,13. U vezi toga smo dalje zaključili, da na razlike d koje formiramo iz apsolutnih vrijednosti mjerenja tamo i natrag utiče razlika stvarnog koeficijenta refrakcije i onog 0,13. Kako se u aritmetijskoj sredini utjecaj koeficijenta refrakcije (s kojim smo računali pojedinačne visine) eliminira jer tačnost ovisi samo o međusobnoj razlici stvarnih koeficijenata k_a i k_b , to će d biti opterećeni i tom »pogreškom« koja u stvari nije pogreška. Kako tačnost određivanja visinskih razlika ocjenjujemo na temelju odstupanja d po formuli za dvostruka mjerenja

$$m_0 = \sqrt{\frac{[pdd]}{2n}}$$

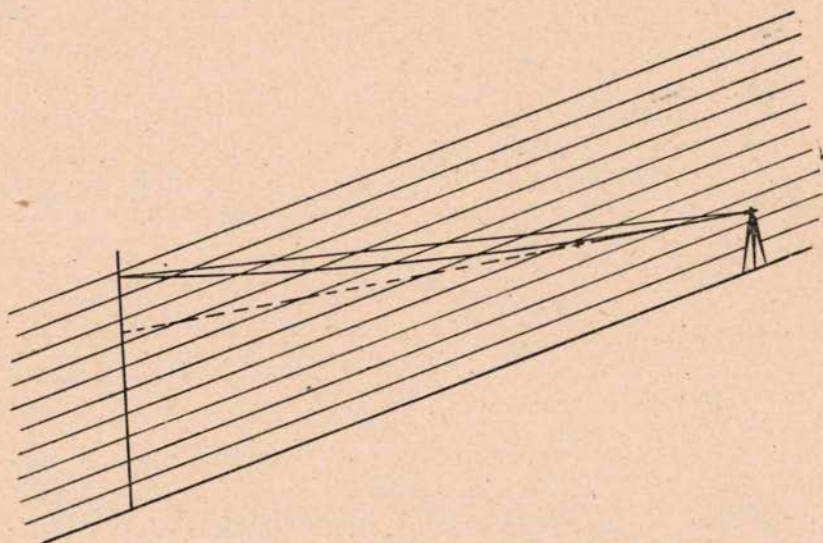
to će tako sračunata srednja pogreška na jedinicu težine (dužine) biti veća od stvarne, t. j. tačnost izvršenih mjerenja bit će veća od one što je dobijemo ocjenom po prednjoj formuli.

Ing. N. Činklović je člankom »O ispitivanju koeficijenta refrakcije u Crnoj Gori« Geod. list 1954. dao lijep i vrijedan doprinos razmatranju ovog problema. U cilju ispitivanja koeficijenta refrakcije ing. Činklović vršio je obostrana i istovremena mjerenja na 8 trigonometrijskih strana dužine 4,2 — 12,8 km, dana 6., 7., 8. i 9. VIII. 1953. u periodu od 8 do

17 sati u punim satima. Svaka je strana mjerena kroz 1 dan, za neke strane uspjele je izvršiti svih 10 mjerenja, dok za druge to nije bio slučaj, a dvije su strane zbog nemogućnosti viziranja mjerene samo 4 puta (u četiri razna sata). Trigonometrijske tačke nalazile su se na izrazitim vrhovima (u blizini planine Durmitor i kanjona rijeke Tare) »tako da su vizure prolazile celom svojom dužinom visoko iznad terena i nisu imale nikakvih naročitih prepreka. Sva četiri dana vreme je bilo mirno i sunčano izuzev slabih vjetrova i manje oblačnosti«.

Ova ispitivanja vršena su upravo na idealnom terenu za određivanje visina trigonometrijskim putem. Vizure prolaze daleko iznad terena koji nepovoljno utječe na veličinu i promjenu refrakcije. Nadalje na visokim vrhovima uvijek će postojati makar blaga strujanja zraka — vjetrić, što omogućuje miješanje slojeva zraka, čime se postizava stabilnost vizure. Sračunata srednja vrijednost koeficijenta refrakcije kod tih mjerenja iznosila je 0,136.

Iz pogleda na tabelu u kojoj ing. Činklović iznosi sračunate koeficijente refrakcije (na temelju neslaganja visinskih razlika tamo i natrag) za pojedine dane i sate vidimo da je koeficijent refrakcije prilično postojan, da varira samo od 0,105 do 0,186 odnosno od svoje srednje vrijednosti za 40%. Iako su na prvi pogled te varijacije velike, one su zapravo vrlo malene, a to zahvaljujući upravo idealnom terenu u pogledu stabilnosti refrakcije. No tablica pokazuje, da su varijacije mnogo manje makar u razne dane ali u iste sate. Dakle i iz ovog slijedi, da ako nemožemo vršiti obostrana istovremena mjerenja, treba nastojati da mjerenje u jednom i drugom smjeru vršimo približno u iste sate. Mi smo već dali u spomenutoj radnji »Trigonometrijsko mjerenje visina« preporuku da triangulator dolaskom na stanicu prije podne vrši najprije mjerenje ho-

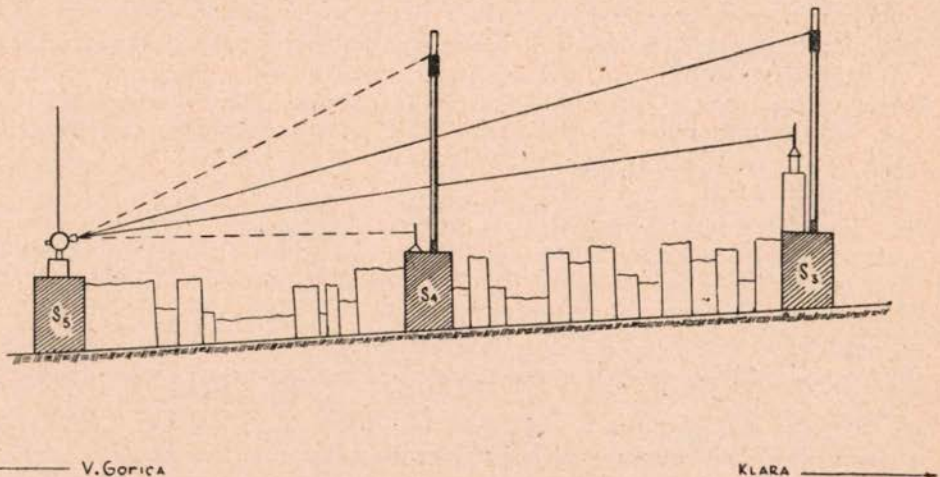


Sl. 2.

rizikalnih a zatim zenitnih kutova, a poslije podne najprije zenitnih pa onda horizontalnih kutova.

Na područjima gdje vizura prolazi blizu terena možemo očekivati ogromne promjene u refrakciji a tokom lijepog i sunčanog dana čak i negativnu vrijednost refrakcionog kuta. Slojevi zraka različite gustoće koji prouzrokuju lom svjetla slijede u blizini terena teren i konfiguraciju terena. Gustoća odnosno promjena gustoće slojeva ovisna je u glavnom o temperaturi tih slojeva odnosno o temperaturnom gradijentu. Temperatura pak naročito donjih slojeva ovisna je o temperaturi tla. Par sati nakon izlaska Sunca ugrijat će se teren i dalje sve više zagrijavati a predveče i u noći rashlađivati. Što se teren više zagrijava, to će više isijavati toplinu, slojevi zraka uz teren bit će topliji od gornjih, dakle rijedi, a vizura mora poprimiti oblik od rijedeg u gušći ka okomici, kako je to prikazano na sl. 2, odnosno refrakcionim kut morati će biti suprotnog predznaka od normalnog koji je prikazan na sl. 1. Na veličinu i promjenljivost refrakcionog kuta jako će utjecati: blizina terena, jačina zagrijavanja, sastav površine terena, raslinstvo i neravnost terena. Očito je da će ti utjecaji biti jako promjenljivi, te da uopće neće biti moguće govoriti niti o nekom općem srednjem koeficijentu refrakcije.

Da bi gornja očekivanja i dokazali, izveli smo posebna mjerenja, koja odgovaraju po udaljenosti vizure od terena općenito normalnim mjerenjima na ravnom terenu. Ova ispitivanja izvršili smo na dijelu bazisa Klara — V. Gorica, između petog i trećeg (S_5 i S_3) te petog i četvrtog (S_5 i S_4) stabiliziranog etapnog stuba (po 1008 m).



Sl. 3.

Dužina između tih stubova poznata je iz mjerenja bazisa sa milimetarskom točnošću. Bolne, koje definiraju dužinu, iznivelirane su prilikom mjerenja bazisa, te ponovo preciznim nivelmanom u dva smjera, prilikom ovog ispitivanja. Na svakom od stubova S_3 i S_4 postavljena su po 2 signala, jedan niski, jedan visoki (sl. 3) i njihove visine od iznive-

ranih bolcni na milimetar točno izmjerene. Neka ekscentričnost signala izazvala je malu promjenu dužine vizure, što je uzeto u obzir. Instrument je postavljen centrično nad bolcnom u S_5 . Na slici je šematski naznačena visina raslinstva. Teren je jednoličan sa padom 1‰ od S_3 ka S_5 . Mjerenja su vršena teodolitom Theo 010 br. 109912 kroz četiri dana od 14. VI. do 17. VI. 1961. god. od 6^h do 19^h, sa prekidom oko podne. Prvi dan mjerenja je bio dan iza kiše, ponešto oblačan, i mogla su se vršiti mjerenja kroz cijeli dan. Ostale dane bilo je toplo i sunčano te se oko sredine dana zbog prejakog titranja nisu mogla vršiti mjerenja.

Svaka je vizura izmjerena sa gornjim, srednjim i donjim koncem u oba položaja durbina, što predstavlja dalje jedno mjerenje. Ovakva su mjerenja vršena svakih pola sata na sva 4 signala.

Podaci izmjerenih zenitnih kutova kroz svakih pola sata sa svim ostalim podacima mjerenja, dužine vizura, visine instrumenata, visine signala iznijeti su u tabelama TI, TII, TIII i TIV. TI i TII odnose se na mjerenja sa S_5 na S_3 (TI na visoki, TII na niski signal). TIII i TIV odnose se na mjerenja sa S_5 na S_4 (TIII na visoki, TIV na niski signal). Iznesene visine instrumenta i signala odnose se na iznivelirane bolcne na kamenim stupovima.

Visine kamenih stupova bile su cca 1,15 m od terena. Visina instrumenata (početka vizure) bila je na cca 1,50 m od terena. Visoki signal na S_3 bio je $3,09 + 1,15 = 4,19$ m od terena, a na S_4 bio je $3,03 + 1,15 = 4,18$ m od terena. Raslinstvo (uglavnom žito i još nizak kukuruz) bilo je mjestimično visoko do 1 m. Iz ovih podataka izlazi, da vizure na visoke signale odgovaraju vizurama kod normalnih slučajeva ovakovih mjerenja u ravnici. U stupcima Z_a uneseni su podaci mjerenja zenitnog kuta na odgovarajući signal kroz svakih pola sata. Podataka za Z_a oko sredine drugog i trećeg dana nema, jer se zbog prejakog titranja nisu mogli izvesti (Prvi dan je to bilo moguće, jer kako smo rekli, to je bio dan iza kiše i ponešto oblačan, te se tlo nije uspjelo ugrijati). Četvrti dan vršena su mjerenja samo prije podne.

Podatci mjerenja pokazuju postepeno povećanje mjerenog zenitnog kuta od ujutro do cca 14 sati, a zatim prema večeri postepeno opadanje. Kod opažanja sa S_5 na visoki signal na S_3 (TI) (udaljenost 2 km), to postepeno povećavanje i smanjivanje dosiže dvije minute, a vjerojatno bi se taj raspon pokazao drugog i trećeg dana još veći, da ga je bilo moguće registrirati (mjeriti). Kod opažanja sa S_5 na niski signal na S_3 te razlike iznose 1,3' ali je tu bio mnogo kraći vremenski period mjerenja. No očito je razmatrajući podatke da bi te razlike vjerojatno prešle veličinu od 2 minute da je bilo moguće vršiti mjerenja i oko sredine dana.

Kod vizura sa S_5 na S_4 (udaljenosti 1 km) na visoki (TIII) i niski (TIV) signal, tendencija povećavanja odnosno smanjivanja zenitnog kuta je ista. Kod mjerenja na visoki signal raspon povećavanja i smanjivanja iznosi cca 0,5' a kod mjerenja na niski signal cca 1'. Pošto veličina refrakcionog kuta raste proporcionalno sa dužinom vizure, to bi trebalo očekivati, da će, ako na 2 km taj raspon dosiže veličinu od 2 minute, ovdje na 1 km dosizati veličinu 1 minute. No mjerenja su pokazala dvostruko manji raspon. Ovu pojavu, neslaganje, može nam protumačiti sl. 3. Naime

pošto su visoki signali jednako visoki na S_4 i S_5 , to se vizura sa S_5 na S_4 prije diže od terena nego ona sa S_5 na S_3 .

U stupce k pored svakog izmjerenog zenitnog kuta upisan je koeficijent refrakcije koji odgovara svakom izmjerenom zenitnom kutu. Koeficijent refrakcije sračunavan je po formuli:

$$k = \frac{2R}{S} \cot z_a - \left[(\Delta H - i_a + l_b) \frac{2R}{S^2} \right] + 1$$

Za sračunavanje koeficijenata refrakcije su sve veličine vrlo točno poznate osim zenitnog kuta z_a , u koji ulazi pogeška mjerenja, koju smo na temelju podataka mjerenja ocijenili sa $\pm 1''5$ (ostatak neslaganja rezultat je refrakcije koju i računamo). Dužina S je uzeta iz mjerenja bazisa (sa korekcijom malih ekscentriciteta signala). Veličina ΔH dobivena je dvostrukim preciznim nivelmanom bolnici na stupovima i iznosi:

$$\Delta H (S_5 - S_4) = + 1,10243 \text{ m } (1,1032)$$

$$\Delta H (S_5 - S_3) = + 2,22867 \text{ m } (2,2277)$$

Podaci u zagradi rezultati su niveliranja prilikom mjerenja bazisa 1952. godine.

Veličine i_a i l_b su direktno mjerene na milimetar točno.

Sve mjerene veličine unesene su pregledno u odgovarajuće tabele. Kod formule za računanje k zanemarili smo član λ formule (1) koji ovisi o visinskoj razlici i nadmorskoj visini vizure (što bi bilo isto da smo povećali R za nadmorsku visinu mjerenja 100 m). Uticaj toga člana na veličinu K iznosi maksimum dvije jedinice na četvrtom decimalnom mjestu, što je bilo ispod točnosti sračunavanja k .

Razmatrajući dobivene veličine za koeficijent k nalazimo da se ovdje ti koeficijenti bitno razlikuju od veličine $+ 0,13$ koju redovito u praksi koristimo. Pokazala se je točna naša pretpostavka da će njegova vrijednost po danu biti većinom negativna. Razabiremo da se vrijednost za k spušta do $- 2,9$. Tek rano ujutro i predveče predznak k mijenja se u plus. No makar kako različite bile vrijednosti koeficijenta k , razabire se, počevši od ujutro k sredini dana, postepeno smanjivanje koeficijenta refrakcije (zapravo povećavanje u negativnom iznosu) a predveče postepeno povećavanje. Nadalje razabiremo, da je veličina refrakcije u razne dane a u iste sate približno podjednaka.

Iz svega toga možemo zaključiti slijedeće:

1. Da je trigonometrički nivelman u ravnim terenima nesiguran.
2. Pogreške u jednostranom određivanju visine mogu iznositi na 1 km do 30 cm (1 min. u visinskom kutu), na 2 km do 120 cm (2 min. u visinskom kutu).

PREGLED PODATAKA MJERENJA I KOEFICIJENTI REFRAKCIJE

VRIJEME OPAZANJA	14. 6. 1961.		15. 6. 1961.		16. 6. 1961.		17. 6. 1961.		GRUPE
	$T_A = S_5$ $T_B = S_3$	VISOKI SIGNAL	$T_A = S_5$ $T_B = S_3$	VISOKI	$T_A = S_5$ $T_B = S_3$	VISOKI	$T_A = S_5$ $T_B = S_3$	VISOKI	
	$d = S = 2016,93 \text{ m}$		$d = S = 2016,93 \text{ m}$		$d = S = 2016,93$		$d = S = 2016,93$		
	$i_a = 0,3456 \text{ m}$		$i_a = 0,3451 \text{ m}$		$i_a = 0,3448$		$i_a = 0,3447$		
$l_b = 3,0899 \text{ m}$		$l_b = 3,0893 \text{ m}$		$l_b = 3,0883$		$l_b = 3,0887$			
	Za	K	Za	K	Za	K	Za	K	
6 ⁰⁰			89° 52' 19",1	-0,463	89° 52' 24",1	-0,614	89° 52' 22",7	-0,573	I
6 ³⁰			52' 24",1	-0,616	52' 30",2	-0,801	52' 27",1	-0,707	
7 ⁰⁰	89° 52' 18",3	-0,488	52' 33",2	-0,895	52' 34",2	-0,924	52' 36",5	-0,995	
7 ³⁰	52' 21",9	-0,524	52' 43",8	-1,217	52' 40",8	-1,126	52' 28",8	-0,759	
8 ⁰⁰	52' 25",2	-0,650	52' 39",3	-1,082	52' 38",3	-1,049	52' 28",7	-0,756	
8 ³⁰	52' 18",5	-0,444	52' 44",5	-1,241	52' 47",9	-1,344	52' 41",9	-1,162	
9 ⁰⁰	52' 25",6	-0,662	52' 50",1	-1,413	53' 01",2	-1,752	52' 56",9	-1,621	
9 ³⁰	52' 37",1	-1,015	53' 00",7	-1,738	52' 58",2	-1,678	52' 54",7	-1,535	
10 ⁰⁰	52' 48",1	-1,352	53' 13",8	-2,141	53' 08",4	-1,972	53' 04",3	-1,848	II
10 ³⁰	52' 53",1	-1,506	53' 18",4	-2,275	53' 09",3	-2,001	53' 17",8	-2,263	
11 ⁰⁰	52' 57",7	-1,647	53' 21",4	-2,373			53' 15",3	-2,186	
12 ⁰⁰	53' 02",4	-1,790							
13 ⁰⁰	53' 02",9	-1,806							III
14 ⁰⁰	52' 57",3	-1,635							
14 ³⁰	53' 05",8	-1,895							
15 ⁰⁰	52' 58",7	-1,677							
15 ³⁰	52' 48",7	-1,371			52' 50",2	-1,414			
16 ⁰⁰	52' 31",3	-0,837	52' 37",5	-1,027	52' 34",7	-0,939			
16 ³⁰	52' 21",2	-0,537	52' 22",2	-0,558	52' 23",1	-0,583			
17 ⁰⁰	52' 07",8	-0,116	52' 10",0	-0,183	52' 08",6	-0,138			
17 ³⁰			52' 03",4	+0,019	52' 05",6	-0,046			IV
18 ⁰⁰	51' 41",3	+0,696	51' 55",3	+0,267					
18 ³⁰			51' 38",0	+0,798	51' 40",7	+0,418			
19 ⁰⁰	51' 14",9	+1,506							
19 ³⁰	51' 02",9	+1,902	51' 12",1	+1,409	51' 15",2	+1,499			
20 ⁰⁰					50' 41",9	+2,521			
SREDINE	52' 28",608	-0,7515	52' 30",717	-0,8186	52' 25",178	-0,6468	52' 46",736	-1,3005	

PREGLED PODATAKA MJERENJA I KOEFICIJENTI REFRAKCIJE

VRIJEME OPAZANJA	14. 6. 1961.		15. 6. 1961.		16. 6. 1961.		17. 6. 1961.		GRUPE
	$T_A = S_5$		$T_A = S_5$		$T_A = S_5$		$T_A = S_5$		
	$T_B = S_3$	NISKI SIGNAL	$T_B = S_3$	NISKI	$T_B = S_3$	NISKI	$T_B = S_3$	NISKI	
	$d \equiv S = 2016,83 \text{ m}$		$d \equiv S = 2016,83$		$d \equiv S = 2016,83$		$d \equiv S = 2016,83$		
	$i_a = 0,3456 \text{ m}$		$i_a = 0,3451$		$i_a = 0,3448$		$i_a = 0,3447$		
	$l_b = 1,3210 \text{ m}$		$l_b = 1,3152$		$l_b = 1,3100$		$l_b = 1,3104$		
	Za	K	Za	K	Za	K	Za	K	
6 ⁰⁰			89° 55' 26,9" - 0,657		89° 55' 32,3" - 0,807		89° 55' 34,7" - 0,866		
6 ³⁰			55' 28,3" - 0,700		55' 41,7" - 1,004		55' 53,5" - 1,456		
7 ⁰⁰	89° 55' 05,7" - 0,026		55' 31,7" - 0,804		56' 54,1" - 1,381		56' 00,0" - 1,655		I
7 ³⁰	55' 12,5" - 0,233		55' 33,9" - 0,871		55' 42,8" - 1,128		55' 37,7" - 0,955		
8 ⁰⁰	55' 49,5" - 0,447		55' 43,8" - 1,174		55' 57,1" - 1,565		55' 57,8" - 1,585		
8 ³⁰	55' 29,7" - 0,762		55' 54,7" - 1,576		56' 04,4" - 1,788		56' 01,3" - 1,695		
9 ⁰⁰	55' 47,7" - 1,312		56' 06,0" - 1,852						
9 ³⁰	55' 49,9" - 1,376								
10 ⁰⁰	55' 58,0" - 1,625								II
10 ³⁰	56' 03,7" - 1,799								
11 ⁰⁰	56' 06,6" - 1,888								
12 ⁰⁰	56' 12,5" - 2,067								
13 ⁰⁰	56' 14,2" - 2,124								
14 ⁰⁰	56' 09,4" - 1,954								III
14 ³⁰	56' 05,9" - 1,867								
15 ⁰⁰	56' 04,9" - 1,835								
15 ³⁰	56' 02,3" - 1,756								
16 ⁰⁰	55' 55,5" - 1,548		55' 58,3" - 1,617		55' 53,1" - 1,444				
16 ³⁰	55' 42,1" - 1,738		55' 47,7" - 1,292		55' 45,9" - 1,222				
17 ⁰⁰	55' 29,9" - 0,766		55' 39,9" - 1,063		55' 38,2" - 0,987				
17 ³⁰	55' 19,0" - 0,432		55' 25,1" - 0,602		55' 22,7" - 0,796				IV
18 ⁰⁰	54' 56,2" + 0,263		55' 14,1" - 0,265		55' 13,7" - 0,238				
18 ³⁰			54' 48,9" + 0,506		54' 50,6" + 0,469				
19 ⁰⁰									
19 ³⁰									
20 ⁰⁰									
SREDINE	55' 45,26" - 1,2356		55' 35,284" - 0,9159		55' 37,75" - 0,9733		55' 50,65" - 1,3687		

PREGLED PODATAKA MJERENJA I KOEFICIJENTI REFRAKCIJE

VRIJEME OPAZANJA	14. 6. 1961.		15. 6. 1961.		16. 6. 1961.		17. 6. 1961.	
	$T_A = S_5$ $T_B = S_4$	VISOKI SIGNAL	$T_A = S_5$ $T_B = S_4$	VISOKI	$T_A = S_5$ $T_B = S_4$	VISOKI	$T_A = S_5$ $T_B = S_4$	VISOKI
	d = 1008,381		d = 1008,381		d = 1008,381		d = 1008,381	
	$i_a = 0,3456$		$i_a = 0,3451$		$i_a = 0,3448$		$i_a = 0,3447$	
l _b = 3,0305		l _b = 3,0728		l _b = 3,0731		l _b = 3,0730		
	Z _a	K	Z _a	K	Z _a	K	Z _a	K
6 ¹⁵	.	.	89° 47' 19",1	-0,260	89° 47' 24",3	-0,710	89° 47' 25",9	-0,807
6 ⁴⁵	.	.	47' 19",3	-0,395	47' 25",1	-0,758	47' 29",0	-0,997
7 ¹⁵	.	.	47' 21",4	-0,594	47' 28",2	-0,949	47' 30",4	-1,083
7 ⁴⁵	89° 47' 30",0	-0,515	47' 20",3	-0,457	47' 30",6	-1,095	47' 35",4	-1,391
8 ¹⁵	47' 35",2	-0,834	47' 29",6	-0,905	47' 36",0	-1,092	47' 38",7	-1,102
8 ⁴⁵	47' 37",6	-0,982	47' 31",0	-1,114	47' 33",4	-1,257	47' 27",6	-0,913
9 ¹⁵	47' 40",4	-1,152	47' 32",5	-1,205	47' 37",9	-1,544	47' 32",3	-1,201
9 ⁴⁵	47' 41",2	-1,202	.	.	47' 41",4	-1,754	.	.
10 ¹⁵	47' 41",9	-1,245	47' 36",6	-1,457	47' 40",6	-1,832	47' 37",2	-1,501
10 ⁴⁵	47' 45",3	-1,453	47' 39",6	-1,641	.	.	47' 38",2	-1,563
11 ¹⁵	47' 48",0	-1,618	47' 41",6	-1,763	47' 37",0	-1,488	47' 36",1	-1,434
11 ⁴⁵
12 ¹⁵
12 ⁴⁵
13 ¹⁵	47' 47",7	-1,600	47' 42",3	-1,807	47' 43",1	-1,862	.	.
13 ⁴⁵	47' 39",0	-1,066	47' 32",0	-1,174	47' 41",5	-1,765	.	.
14 ¹⁵	47' 35",1	-0,823	47' 28",6	-0,966	47' 39",6	-1,649	.	.
14 ⁴⁵	47' 37",3	-0,963	47' 26",9	-0,862	47' 36",3	-1,446	.	.
15 ¹⁵	47' 33",9	-0,754	47' 20",0	-0,438	47' 30",3	-1,078	.	.
15 ⁴⁵	47' 28",3	-0,411	47' 21",1	-0,505	47' 25",8	-0,801	.	.
16 ¹⁵	47' 29",7	-0,496	47' 18",5	-0,346	47' 23",7	-0,672	.	.
16 ⁴⁵	47' 24",5	-0,177	47' 15",3	-0,162	47' 18",6	-0,360	.	.
17 ¹⁵	47' 19",3	+0,142	47' 05",2	+0,470	47' 15",6	-0,176	.	.
17 ⁴⁵	47' 17",8	+0,234	47' 05",0	+0,736	47' 11",6	+0,069	.	.
18 ¹⁵	47' 15",9	+0,350	46' 58",1	+1,019	47' 09",4	+0,204	.	.
18 ⁴⁵
SREDINE	47' 34",11	-0,843	47' 23",82	-0,870	47' 30",10	-1,075	47' 32",28	-1,144

PREGLED PODATAKA MJERENJA I KOEFICIJENTI REFRAKCIJE

VRIJEME OPAŽANJA	14. 6. 1961.		15. 6. 1961.		16. 6. 1961.		17. 6. 1961.	
	T _A = S ₅ T _B = S ₄ NISKI SIGNAL		T _A = S ₅ T _B = S ₄ NISKI		T _A = S ₅ T _B = S ₄ NISKI		T _A = S ₅ T _B = S ₄ NISKI	
	d = 1008,381		d = 1008,381		d = 1008,381		d = 1008,381	
	i _d = 0,3456		i _d = 0,3451		i _d = 0,3448		i _d = 0,3447	
l _b = 0,2420		l _b = 0,2577		l _b = 0,2571		l _b = 0,2568		
Z _a	K	Z _a	K	Z _a	K	Z _a	K	
6 ¹⁵	.	.	89° 57' 01,0	-0,750	89° 57' 04,7	-0,978	89° 57' 06,8	-1,105
6 ⁴⁵	.	.	57' 04,0	-0,988	57' 05,4	-1,021	57' 07,9	-1,172
7 ¹⁵	.	.	57' 07,5	-1,154	57' 08,4	-1,205	57' 10,2	-1,314
7 ⁴⁵	.	.	57' 10,6	-1,344	57' 11,3	-1,383	57' 12,4	-1,448
8 ¹⁵	.	.	57' 17,4	-1,754	57' 26,4	-2,309	57' 19,3	-1,878
8 ⁴⁵	89° 57' 06,5	-1,516	57' 22,7	-2,050	57' 24,4	-2,186	57' 26,5	-2,313
9 ¹⁵	57' 09,0	-1,671	57' 24,2	-2,217	57' 25,8	-2,272	57' 27,9	-2,399
9 ⁴⁵	57' 10,1	-1,738	57' 28,7	-2,493	57' 27,1	-2,352	57' 26,3	-2,298
10 ¹⁵	57' 26,5	-2,743	57' 33,5	-2,749	57' 31,4	-2,617	57' 32,7	-2,694
10 ⁴⁵	57' 29,1	-2,900	57' 32,0	-2,652	57' 32,1	-2,660	57' 35,6	-2,872
11 ¹⁵	57' 24,5	-2,928	57' 35,3	-2,859	.	.	57' 34,7	-2,778
11 ⁴⁵
12 ¹⁵
12 ⁴⁵	57' 23,7	-2,571	.	.	57' 34,9	-2,832	.	.
13 ¹⁵	57' 19,3	-2,302	57' 35,9	-2,786	57' 33,7	-2,757	.	.
13 ⁴⁵	57' 10,4	-1,977	57' 36,9	-2,958	57' 29,4	-2,494	.	.
14 ¹⁵	57' 05,0	-1,424	57' 26,2	-2,302	57' 22,5	-2,070	.	.
14 ⁴⁵	57' 04,2	-1,376	.	.	57' 18,6	-1,831	.	.
15 ¹⁵	56' 57,2	-0,946	57' 14,4	-1,577	57' 17,4	-1,758	.	.
15 ⁴⁵	.	.	57' 07,1	-1,128	57' 09,2	-1,254	.	.
16 ¹⁵	.	.	57' 03,6	-0,915	56' 58,5	-0,599	.	.
16 ⁴⁵	56' 49,5	-0,474	.	.	56' 54,8	-0,377	.	.
17 ¹⁵	56' 44,9	-0,008	56' 45,1	+0,220	56' 53,4	-0,286	.	.
17 ⁴⁵	56' 37,1	+0,284	56' 41,0	+0,472	56' 37,4	+0,596	.	.
18 ¹⁵	56' 36,2	+0,341	56' 39,3	+0,575	56' 35,0	+0,842	.	.
18 ⁴⁵	56' 34,1	+0,470	56' 37,6	+0,679	56' 36,4	+0,817	.	.
SREDINA	57' 04,08	-1,510	57' 01,25	-1,649	57' 12,04	-1,630	57' 21,82	-2,025

3. Visinske razlike sračunate iz mjerenja u dva smjera mogu se razlikovati za dvostruke iznose od iznosa navedenih pod 2. No uza sve to, ako su opažanja izvršena pod istim vremenskim prilikama, u isto doba dana, onda se može očekivati da je refrakcija za vrijeme jednog i drugog mjerenja bila približno ista, i da će se utjecaj refrakcije, ma kako velika bila razlika podataka u jednom i drugom smjeru, u aritmetičkoj sredini eliminirati. U posljednjem slučaju nemamo kriterija točnosti mjerenja. Naime rezultati mjerenja tamo i natrag dosta se razlikuju a aritmetička sredina može dati tačan rezultat.

4. Iz čitave ove analize jasno je, da se u ravničastom terenu ne može govoriti o nekom općem, srednjem koeficijentu refrakcije, jer je on jako promjenljiv. Kad bi na terenu i našli dvije vizure nad jednakom konfiguracijom terena i raslinstvom — što je gotovo nemoguće teško bi bilo voditi računa o temperaturnim promjenama.

5. Uticaj temperature i blizine terena na promjenu refrakcije je ogroman. (Iz komparacije vizura na jednako visoke signale S_5 na S_4 i S_5 na S_3 , zbog kraće udaljenosti S_5 na S_4 , ta je vizura na istom terenu postala nešto viša, pa je i kolebanje refrakcionog kuta dvostruko manje od onog na odsjeku S_5 na S_3 . Obzirom na to možemo zaključiti nešto i o ponašanju refrakcije na t. zv. »povoljnim terenima«, u visokim brdima. I tu će doista jedan kratak dio vizure ići u neposrednoj blizini, uz teren, na početku i kraju vizure. Pošto je taj dio u odnosu na cijelu dužinu vizure relativno malen, te promjene toliko ne zapažamo, ali očito je da će one postojati. Za razne vizure biti će i te promjene različite već prema konfiguraciji brda, jedna vizura može prolaziti n. pr. samo na dužini od 2 m a druga na dužini vizure 20 m pored terena, a to pored terena negdje će opet biti bliže negdje dalje.

Već preko stotinu godina nameće se geodeziji zadatak da se odredi što bolji opći koeficijent refrakcije. Mnogi geodetski naučni radnici prihvaćali su se tog zadatka i na temelju raznih mjerenja dali vrijednosti, kojima se redovno služimo. Mi pak, prema iznijetoj ovdje analizi možemo zaključiti, da je svaki daljnji rad na iznalaženju boljeg općeg koeficijenta iluzoran. Može se jedino govoriti o općem koeficijentu refrakcije samo u brdovitom terenu, u terenu povoljnom za trigonometrijsko određivanje visina, ali i tu moramo biti svijesni, da stvarni koeficijent može varirati do 50% od tako sračunate opće vrijednosti.