

GRAFIČKA AFINA TRANSFORMACIJA

Ing. ANA BRUKNER — ZAGREB

Zavod za fotogeometriju AGG Fakulteta

Kada se u geodeziji govori o transformaciji, Helmertovoj ili afinnoj, ima se u vidu samo njen numerički oblik. To dolazi od toga što se odnosi transformacije mogu numeričkim postupkom ostvariti ne samo najtočnije, već i sa poželjnom odnosno potrebnom točnošću za dani slučaj. Na taj način nije uočeno da se transformacija daje predočiti i u jednostavnijem obliku, a to je grafički sa fiktivnim rotacijama. Taj je oblik zorniji, prema tome i za stanovita razmatranja prikladniji, te daje katkada zadovoljavajuću točnost.

Prof. Braum je u svojoj disertaciji [1] izveo formulu interpolacione pogreške za svoje postupke kojima određuje visinske deformacije fotogrametrijskog modela. On je konstatirao da ista struktura vrijedi i za grafički oblik (afine) transformacije. Međutim upravo koristeći poznate odnose pri horizontaciji fotogrametrijskog modela daje se ovaj oblik još znatno pojednostaviti, što je u ovoj radnji i učinjeno. Opširan resumé radnje dan je na koncu.

1. TEORETSKA RAZLAGANJA

1.1 Afina transformacija kao rezultat fiktivnih rotacija

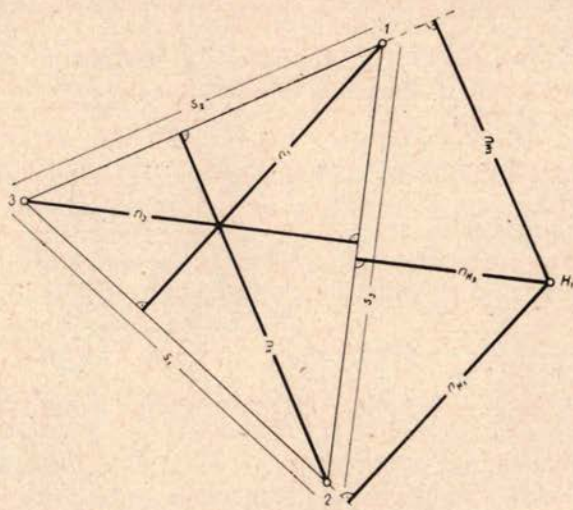
Iz disertacije prof. Dr. Ing. F. Brauma formula za visinsku interpolacionu pogrešku u tački H_i kod horizontacije modela pomoću orijentacionih tačaka 1, 2 i 3 glasi:

$$\delta h_{H_i} = \frac{n_{H_1}}{n_1} \delta h_1 + \frac{n_{H_2}}{n_2} \delta h_2 + \frac{n_{H_3}}{n_3} \delta h_3 \quad (213) [1] = (1)$$

gdje su δh_1 , δh_2 i δh_3 visinske pogreške orijentacionih tačaka 1, 2, 3. Geometrijsko značenje veličina n_{H_1} , n_{H_2} , n_{H_3} , n_1 , n_2 , n_3 vidljivo je iz sl. 24 [1] = sl. 1. To su udaljenosti tačke H_i odn. 1, 2 i 3 od stranice s_1 odn. s_2 i s_3 . Veličine n_1 , n_2 , n_3 kao i δh_1 , δh_2 i δh_3 su konstante za dani model.

Usljed visinskih pogrešaka δh_1 , δh_2 i δh_3 model je nagnut, pa svaka tačka modela H_i ima izvjesnu visinsku pogrešku δh_{H_i} . Ukupni nagib modela možemo zamisliti da se sastoji iz triju komponentata, tj. nagiba nastalog rotacijom oko pravaca s_1 , s_2 i s_3 . Ovi pojedinačni nagibi definirani su omjerima $\delta h_1:n_1$, $\delta h_2:n_2$, $\delta h_3:n_3$. Visinsku pogrešku δh_{H_i} tačke H_i mo-

žemo zamisliti sastavljenu iz triju komponenata, dobivenih iz pojedinačnih nagiba. Pojedine komponente visinske pogreške $\delta_{h_{H_1}}$ dobit ćemo prema formuli (1) množenjem nagiba $\delta_{h_1:n_1}$, $\delta_{h_2:n_2}$ i $\delta_{h_3:n_3}$ sa odgovarajućim udaljenostima od osi rotacije s , tj. sa n_{H_1} , n_{H_2} i n_{H_3} .



Sl. 1.

Prof. Braum je bio izveo u [1] najprije formulu za pogrešku u tački H koja rezultira iz linearne interpolacije oslanjanjem na četiri orijentacione tačke opterećene pogreškama δ_{h_1} , δ_{h_2} , δ_{h_3} , δ_{h_4} . Prelazeći na tri orijentacione tačke on je koristio neovisnost linearne interpolirane pogreške u proizvoljnoj tački H od puta interpolacije, te je bez posebnog izvoda idejnom redukcijom izveo formulu (1). F. Braum je nadalje upozorio da zamjenom veličina δh u formuli (1) jedamput sa odgovarajućim veličinama δx , a drugi put sa δy , tj. zamjenom visinskih pogrešaka u danim tačkama s nesuglasicama u x -u i y -u, dobivamo formule za grafičku afinu transformaciju.

Da bude stvar zornija izvest će formulu (1) direktno iz trokuta zamjenivši pri tom oznake H sa P, n sa d i n_H sa d_P .

Prema sl. 1a interpoliramo linearno iz vrijednosti δ_1 i δ_2 za tačke 1 i 2 nesuglasticu $\delta_{(1)}$ za tačku (1) (presjecište pravaca 1—2 i 3—P), a potom nesuglasticu δ_P za proizvoljnu tačku P iz vrijednosti $\delta_{(1)}$ i δ_3 za tačke (1) i 3:

$$\begin{aligned} \delta_{(1)} &= \delta_1 + \frac{1-(1)}{1-2} (\delta_3 - \delta_1) = (1 - \frac{1-(1)}{1-2}) \delta_1 + \frac{1-(1)}{1-2} \delta_3 = \\ &= \frac{(1)-2}{1-2} \delta_1 + \frac{1-(1)}{1-2} \delta_3 \end{aligned}$$

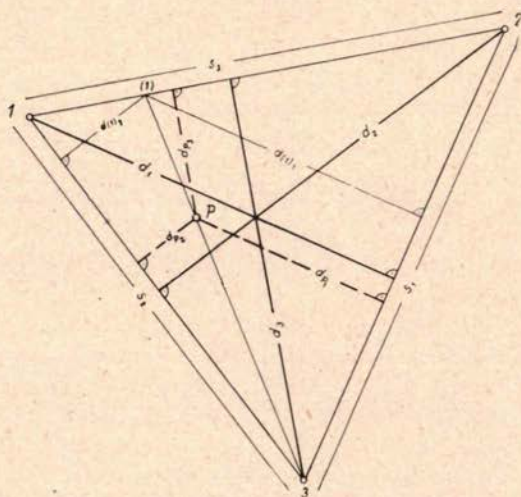
Analogno vrijedi:

$$\delta_P = \frac{P-3}{(1)-3} \delta_{(1)} + \frac{(1)-P}{(1)-3} \delta_2 = \frac{P-3}{(1)-3} \frac{(1)-2}{1-2} \delta_1 + \frac{P-3}{(1)-3} \frac{1-(1)}{1-2} \delta_2 + \frac{(1)-P}{(1)-3} \delta_3$$

Koeficiente od $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ zamijenimo proporcionalnim dužinama okomitim na stranice s_1, s_2, s_3 , pa dobivamo

$$\begin{aligned} \delta_P &= \frac{d_{P1}}{d_{(1)1}} \frac{d_{(1)1}}{d_1} \delta_1 + \frac{d_{P2}}{d_{(1)2}} \frac{d_{(1)2}}{d_2} \delta_2 + \frac{d_{P3}}{d_3} \delta_3 = \\ &= \frac{d_{P1}}{d_1} \delta_1 + \frac{d_{P2}}{d_2} \delta_2 + \frac{d_{P3}}{d_3} \delta_3 \end{aligned} \quad (1a)$$

što odgovara formuli (1).



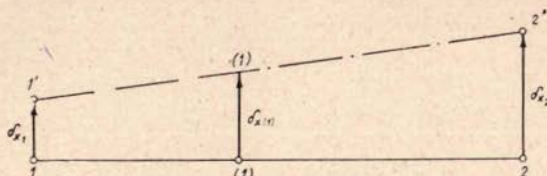
Sl. 1a

Ako nesuglasice između transformiranog i polaznog sistema slijede zakon linearne interpolacije, kao što je pretpostavljeno kod formula (1) i (1a), to će između oba sistema vrijediti afini odnos. Promotrimo to za x -nesuglasice na sl. 2.

Između polaznih i transformiranih dužina vrijedi za odgovarajuće pravce odnos

$$\frac{1-(1)}{(1)-2} = \frac{1'-(1)'}{(1)'-2'}$$

a to je karakteristika afinog odnosa. Analogno vrijedi ako pridodamo δy -nesuglasice sa linearnom interpolacijom. Prema tome će jednačba (1a) vrijediti za afinu transformaciju.



Sl. 2.

Na osnovu tog zaključka i formule (1a) vrijedi za nesuglasice između afino transformiranog sistema ξ, η , i polaznog sistema x, y odnos

$$\delta_{xP} = \frac{\delta x_1}{d_1} d_{P1} + \frac{\delta x_2}{d_2} d_{P2} + \frac{\delta x_3}{d_3} d_{P3}$$

$$\delta_{yP} = \frac{\delta y_1}{d_1} d_{P1} + \frac{\delta y_2}{d_2} d_{P2} + \frac{\delta y_3}{d_3} d_{P3} \quad (1b)$$

pri čem su nesuglasice δ definirane sa

$$\delta_x = \xi - x$$

$$\delta_y = \eta - y \quad (2)$$

Za specijalan slučaj $\delta x_1 = \delta x_2 = \delta x_3 = \text{const.}$ bit će prema afinog To znači da obzirom na (1b) postoji odnos: transformaciji, koja je s tri tačke jednoznačno određena, i $\delta_{xP} = \text{const}$

$$\frac{d_{P1}}{d_1} y + \frac{d_{P2}}{d_2} + \frac{d_{P3}}{d_3} = 1 \quad (3)$$

Prema tome jednačbu (1b) možemo nadopuniti na:

$$\delta_{xP} - \delta_{x_3} = \frac{d_{P1}}{d_1} (\delta_{x_1} - \delta_{x_3}) + \frac{d_{P2}}{d_2} (\delta_{x_2} - \delta_{x_3}) + \frac{d_{P3}}{d_3} (\delta_{x_3} - \delta_{x_3})$$

Time smo sistem koji treba transformirati paralelno pomakli za iznos δ_{x_3} , koji možemo smatrati adicijom konstantom između pomaknutog i nepomaknutog sistema. Pri tom afini transformacioni odnos ostaje sačuvan. Označimo reducirano odstupanje sa

$$\delta_{xP} - \delta_{x_3} = \bar{\delta}_{xP} \quad \delta_{yP} - \delta_{y_3} = \bar{\delta}_{yP} \quad (4)$$

nadalje

$$\frac{\bar{\delta}_x}{d} = v \quad (5)$$

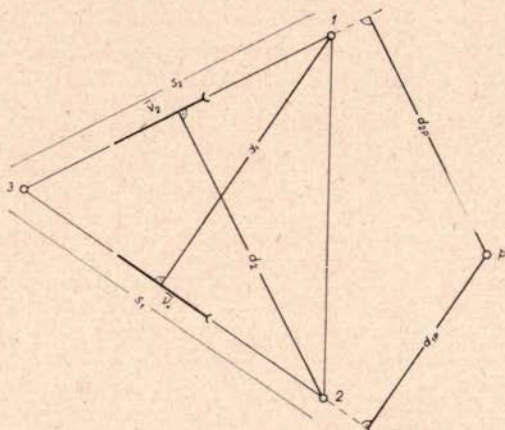
da dobijemo:

$$\bar{\delta}_{xP} = \bar{v}_{x1} d_{P1} + \bar{v}_{x2} d_{P2} \quad (6)$$

i analogno

$$\bar{\delta}_{yP} = \bar{v}_{y1} d_{P1} + \bar{v}_{y2} d_{P2} \quad (7)$$

U formulama (1b) i (6—7) koeficiente $\delta_{x:d}$ i $\delta_{y:d}$, odnosno v_x i v_y možemo zamisliti kao rotacije oko osi pravca s , a koje djeluju na poluzi d_p (sl. 3).



Sl. 3.

Pojmovno je to najlakše shvatiti kod visinskih pogrešaka modela. Tu analogni koeficienti $\delta_{h:n}$ (sl. 1) predstavljaju komponente nagiba modela oko pravca s (stranice trokuta što ga čine orijentacione tačke 1, 2 i 3). Ti se nagibi mogu prikazati vektorima, koji se poklapaju sa osi rotacije. Iz sva tri nagiba može se naći rezultirajući nagib modela — rezultirajući vektor, što je prikazano na sl. 3a. Kod tog koristimo pravilo da se vektor rotacije smije pomicati po svom pravcu. Rezultirajući nagib predstavljen je vektorom v_{h1-2-3} , pa se tročlana formula $\delta_{h_{Hi}}$ (1) svodi na jednočlanu:

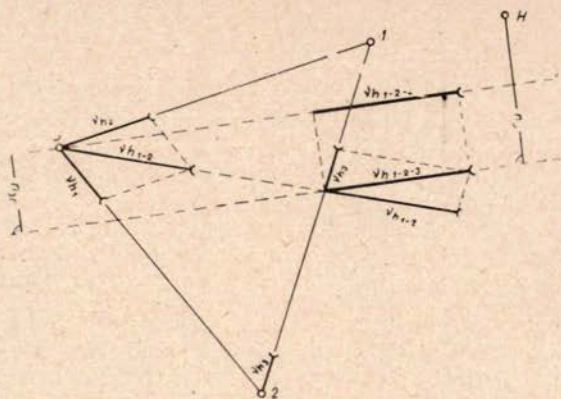
$$\delta_{h_{Hi}} = n_{Hi} v_{1-2-3} \quad (8)$$

Na sl. 3a ujedno je prikazano značenje eliminacije δ_3 redukcijom veličine δ na $\bar{\delta}$, kako je to učinjeno pri prelazu od formule (1b) na (6—7). Vektor rotacije v_{h1-2-3} ostao je po veličini jednak, ali paralelno pomaknut, tako da njegov pravac prolazi tačkom 3. Time se sva visinska odstupanja automatski promjene za adicijonu konstantu:

$$\delta_3 = n_{3r} v_{1-2-3} \quad (9)$$

jer je os rotacije modela paralelno pomaknuta, i time su visinske pogreške promjenjene za konstantan iznos.

Potpuno je irelevantno u koju će se od triju tačaka pomaknuti os rotacije, samo se ovisno od toga mora uzeti odgovarajuća adiciiona konstanta, koja predstavlja visinsku pogrešku u toj tački. Za tačku 3 adiciiona konstanta bila bi $\delta_3 = \delta_{h_3}$ za tačku 2 bila bi $\delta_2 = \delta_{h_2}$ itd.



Sl. 3a

Analogno visinskim pogreškama kod nagnutog modela mogu se tretirati odstupanja δ_x i δ_y između dva sistema kod afine transformacije. Odstupanjima δ_x i δ_y odgovarat će u ovom slučaju fiktivne rotacije. I ove rotacije se mogu grafički prikazati vektorima, i svesti na jednu rezultirajuću rotaciju — rezultirajući vektor.

Horizontacija modela i analitička afina transformacija imaju zajedničku poteškoću. Za horizontaciju modela ne može se koristiti rezultirajuća rotacija, jer se model u stereoinstrumentu ne može nagibati oko proizvoljnog pravca. Nagibanje modela može se tehnički vršiti oko dva pravca, koji su paralelni sa X- i Y-osi. Kod analitičke afine transformacije dužine d nisu izražene direktno, već su također izražene dvima koordinatnim razlikama po x- i y-u.

1.2 Analogija analitičkih izraza afine transformacije s fiktivnim rotacijama

Formule za numeričku transformaciju glase:

$$\begin{aligned}\eta_P &= a_1 y_P + b_1 x_P + c_1 \\ \xi_P &= a_2 y_P + b_2 x_P + c_2\end{aligned}\quad (10)$$

Ove formule možemo preformirati, i računanje koordinata svesti na računanje koordinatnih razlika, odnosno na računanje nesuglasica koordinata između oba sistema:

$$\begin{aligned}\delta y_P &= \eta_P - y_P = (a_1 - 1) y_P + b_1 x_P + c_1 \\ \delta x_P &= \xi_P - x_P = a_2 y_P + (b_2 - 1) x_P + c_2\end{aligned}\quad (11)$$

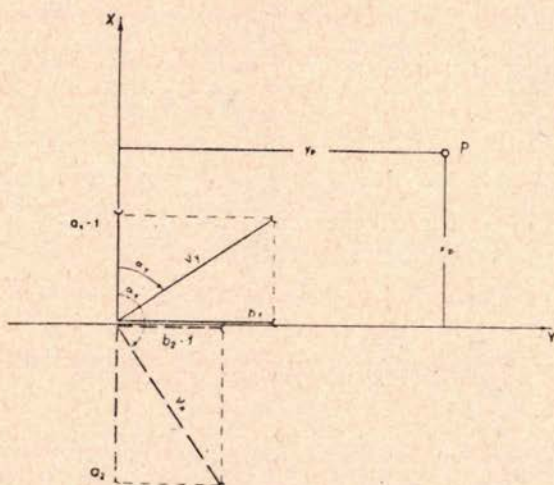
gdje su x, y odnosno ξ , η koordinate u polaznom odnosno u transformiranom sistemu.

Na osnovu izloženog lako je protumačiti geometrijsko značenje formula (11) za afinu transformaciju u smislu fiktivnih rotacija.

Iz formule (11) proizlazi da su c_1 i c_2 adicione konstante za δy_P i δx_P a ujedno predstavljaju nesuglasice za ishodište koordinatnog sistema x y . Koeficienti uz y_P x_P predstavljaju vektore rotacije oko osi x i y za odstupanja δ :

$$\begin{aligned} a_1 - 1 &= \text{X-komponenta od } v_y \\ b_1 &= \text{Y-komponenta od } v_y \\ a_2 &= \text{X-komponenta od } v_x \\ b_2 - 1 &= \text{Y-komponenta od } v_x \end{aligned} \quad (12)$$

Komponente vektora ovih fiktivnih rotacija i njihove rezultante prikazane su na sl. 4.



Sl. 4.

Smjerni kutevi osi rotacija za x - i y -odstupanja jednaki su:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_y &= \frac{b_1}{a_1 - 1} \\ \operatorname{tg} \alpha_x &= \frac{b_2 - 1}{a_2} \end{aligned} \quad (13)$$

Kod malenih iznosa afineteta, kao što je to redoviti slučaj u kartografiji između pojedinih koordinatnih sistema, bit će:

$$\begin{aligned} a_1 &\approx b_2 \\ b_1 &\approx -a_2 \end{aligned} \quad (14)$$

Na temelju formula (13—14) te slike 4 proizlaze dva svojstva vektora rotacije:

$$1/ \quad \operatorname{tg} \alpha_y \operatorname{tg} \alpha_x = \frac{b_1}{a_1 - 1} \frac{b_2 - 1}{a_2} \approx -1 \quad (15)$$

Vektori rotacije, odnosno osi rotacije, približno su okomite.

$$2/ \quad [v_y] = \sqrt{(a_1 - 1)^2 + b_1^2}$$

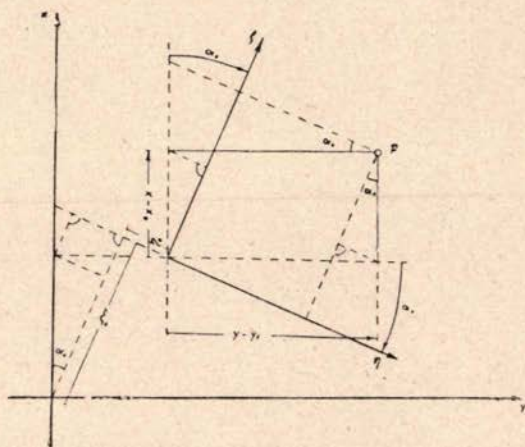
$$[v_x] = \sqrt{(b_2 - 1)^2 + a_2^2}$$

odnosno

$$[v_y] \approx [v_x] \quad (16)$$

Vektori rotacije v_y i v_x , odnosno iznosi rotacije, su po apsolutnoj vrijednosti približno jednaki.

U slučaju klasične slične (Helmertove) transformacije* odnosi u formuli (14) vrijede u potpunosti, a ne samo približno. Formule za sličnu transformaciju glase (sl. 5):



Sl. 5.

$$\eta = k (y - y_0) \cos \alpha_0 - k (x - x_0) \sin \alpha_0 \quad (17)$$

$$\xi = k (y - y_0) \sin \alpha_0 + k (x - x_0) \cos \alpha_0$$

gdje je:

α_0 — zakretaj transformiranog sistema η, ξ u smislu kretanja kazaljke na satu u odnosu na polazni sistem y, x

* Kod kojih je lik u polaznom sistemu geometrijski sličan liku u transformiranom sistemu.

y_0 x_0 — koordinate ishodišta transformiranog sistema

k — multiplikaciona konstanta, tj. odnos mjerila transformiranog sistema prema mjerilu polaznog sistema

Formule (17), možemo analogno prelazu formula (10—11) napisati u ovom obliku:

$$\begin{aligned} \delta y = \eta - y &= (k \cos \alpha_0 - 1) y - k \sin \alpha_0 x + k (-y_0 \cos \alpha_0 + x_0 \sin \alpha_0) \\ &= (k \cos \alpha_0 - 1) y - k \sin \alpha_0 x + \eta_0 \\ \delta x = \xi - x &= k \sin \alpha_0 y + (k \cos \alpha_0 - 1) x + k (-y_0 \sin \alpha_0 - x_0 \cos \alpha_0) \\ &= k \sin \alpha_0 y + (k \cos \alpha_0 - 1) x + \xi_0 \end{aligned} \quad (18)$$

Ako u formulu (11) za afinu transformaciju uvrstimo odnose (14) kao stroge, dobijemo:

$$\begin{aligned} \delta y_P &= (a_1 - 1) y_P + b_1 x_P + c_1 \\ \delta x_P &= (a_2 - 1) x_P - b_2 y_P + c_2 \end{aligned} \quad (19)$$

Usporedimo sada (19) sa (18), pa vidimo da je:

a_1 — x-komponenta zakrenutog vektora k

b_1 — y-komponenta zakrenutog vektora k

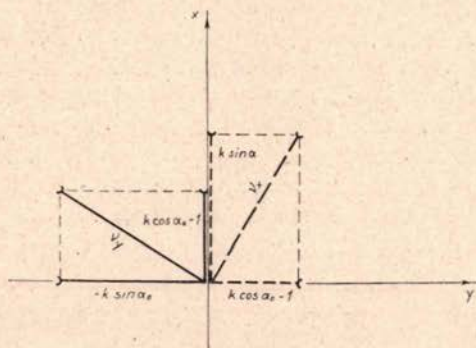
c_1 — ordinata ishodišta polaznog sistema x y u transformiranom sistemu

c_2 — apscisa ishodišta polaznog sistema x y u transformiranom sistemu

c_1 i c_2 su prema tome nesuglasice za ishodište polaznog sistema.

Iz formule (18) i sl. 6 je vidljivo da u slučaju slične transformacije vrijedi:

$$\begin{aligned} a_1 &= b_2 \\ b_1 &= -a_2 \end{aligned} \quad (20)$$



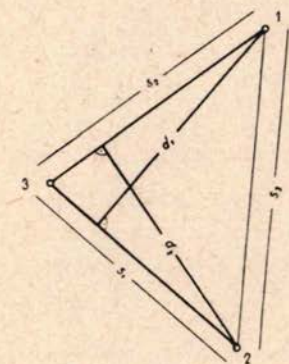
Sl. 6.

Nadalje proizlazi iz formule (15—16) i sl. 6 da su vektori rotacije međusobno okomiti, a po iznosu jednaki. Dok formule (10) i (17) imaju oblik prikladan za numeričku transformaciju formule (11) i (18) pogodne su za grafičku transformaciju.

1.3 Određivanje elemenata grafičke affine transformacije

1.3.1 GRAFIČKO ODREĐIVANJE ELEMENATA TRANSFORMACIJE

Kod grafičkog određivanja komponente fiktivne rotacije ne postavljaju se u osi koordinatnog sistema, već ih je jednostavnije postaviti u stranice zadanog trokuta (sl. 3). Time za svaku koordinatnu razliku (nesuglasicu) dobivamo tri komponente rotacije položene u stranice trokuta. Iz tih triju komponenta dobiva se vektor rezultirajuće rotacije posebno za x i y . Prema tome elementi grafičke affine transformacije su rezultirajući vektori v_x i v_y , tj. njihova veličina i smjer, dok su elementi numeričke affine transformacije koeficijenti $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$.



Sl. 7.

Kod slične transformacije određivanje elemenata grafičke transformacije svodi se samo na određivanje rotacije v_x . Vektor v_y je po veličini jednak, a po smjeru okomit na vektor v_x . Time je postupak još pojednostavljen. Kod grafičke transformacije može se još koristiti pojednostavljenje, da se za jednu tačku, npr. 3, eliminira δ_{x3} i δ_{y3} . Ove veličine će se uzeti u obzir kod računanja nesuglasica za pojedine tačke u obliku adicijonih konstanti. Time je rezultirajući vektor v za svaku koordinatnu nesuglasicu određen iz samo dviju komponenti v_1 i v_2 položenih u dvije stranice zadanog trokuta.

1.3.1.1 Određivanje smjera rezultirajućeg vektora v

Prema (5) bit će:

$$\begin{aligned} \bar{v}_{x1} &= \frac{\bar{\delta}_{x1}}{d_1} & \bar{v}_{x2} &= \frac{\bar{\delta}_{x2}}{d_2} \\ \bar{v}_{y1} &= \frac{\bar{\delta}_{y1}}{d_1} & \bar{v}_{y2} &= \frac{\bar{\delta}_{y2}}{d_2} \end{aligned}$$

Prema sl. 2 smjer vektora v_{x1} i v_{y1} poklapa se sa stranicom s_1 , a smjer vektora v_{x2} i v_{y2} sa stranicom s_2 . Rezultirajući vektor za obje koordinate nesuglasice v_x i v_y , prolazit će tačkom 3. Smjer rezultirajućeg vektora v ovisit će o odnosu komponenta v_x i v_y , prolazit će tačkom 3. Smjer rezultirajućeg vektora v ovisit će o odnosu komponenta v_1 i v_2 ,

$$\frac{\bar{v}_1}{\bar{v}_2} = \frac{\bar{\delta}_1}{\bar{\delta}_2} \frac{d_2}{d_1} \quad (21)$$

Prema sl. 7 odnos $d_2 : d_1$ u formuli (21) bit će jednak:

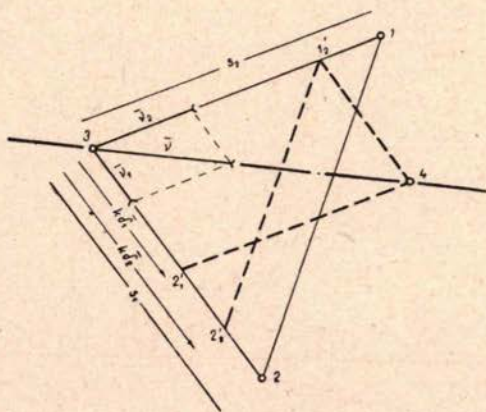
$$d_2 : d_1 = s_1 : s_2$$

Formula (21) prema tome poprima oblik:

$$\begin{aligned} \bar{v}_{x1} : \bar{v}_{x2} &= s_1 \bar{\delta}_{x1} : s_2 \bar{\delta}_{x2} \\ \bar{v}_{y1} : \bar{v}_{y2} &= s_1 \bar{\delta}_{y1} : s_2 \bar{\delta}_{y2} \end{aligned} \quad (22)$$

Grafička konstrukcija smjera rezultirajućeg vektora \bar{v} , prema formulama (22) prikazana je na sl. 8. Prema toj slici smjer rezultirajućeg vektora v je određen pravcem 3—4. Odnos $v_1 : v_2$ je jednak:

$$\bar{v}_1 : \bar{v}_2 = \frac{\bar{\delta}_1}{d_1} : \frac{\bar{\delta}_2}{d_2} = \frac{\bar{\delta}_1}{s_2} : \frac{\bar{\delta}_2}{s_1} = \bar{\delta}_1 : \bar{\delta}_2 \frac{s_2}{s_1} = k \bar{\delta}_1 : k \bar{\delta}_2 \frac{s_1}{s_1} \quad (23)$$



Sl. 8.

Ako na pravcu s_1 (3—2) nanesimo nesuglasice $\bar{\delta}_1$ i $\bar{\delta}_2$ pomnožene proizvoljnim faktorom k dobivamo tačke $2'_1$ i $2'_2$. Kroz tačku $2'_2$ povučemo paralelu s pravcem s_3 (2—1), te na pravcu s_2 (3—1) dobivamo tačku $1'_2$. Iz sl. 8 vidljivo je da je:

$$\frac{3-1_2}{3-2_2} = \frac{s_2}{s_1}$$

$$\overline{3-1_2} = \overline{3-2_2} \frac{s_2}{s_1}$$

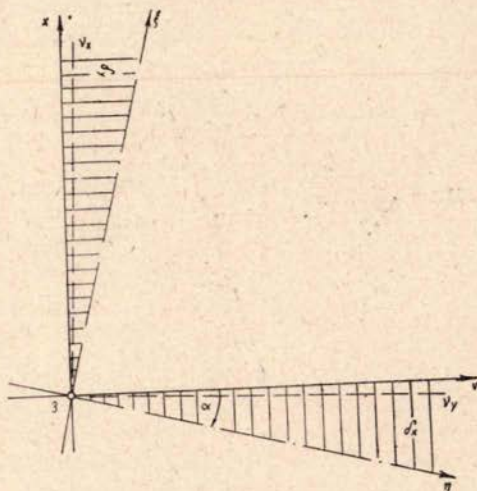
odnosno:

$$\overline{3-1_2} = k \delta_2 \frac{s_2}{s_1}$$

Iz slike je dalje vidljivo da je:

$$\overline{v_1} : \overline{v_2} = \overline{3-2_1} : \overline{3-1_2} = k \delta_1 : k \delta_2 \frac{s_2}{s_1}$$

pa je prema tome gornji uvjet (23) ispunjen. Kod toga je bitno da za dobivanje smjera rezultirajuće rotacije nije potrebno računati veličinu v_1 i v_2 , već se ovaj može dobiti neposredno iz poznatih nesuglasica δ_1 i δ_2 . Pri tome treba napomenuti da se $k\delta_1$ i $k\delta_2$ ne nanose prema predznaku od δ_1 , δ_2 , već obzirom na (5) prema predznacima v_1 i v_2 . Fingirajmo u tu svrhu δ_x , δ_y kao visinska odstupanja, i to za + prema gore, a za —



Sl. 9.

prema dolje, i smatrajmo rotaciju od 1 oko s_1 , odnosno od 2 oko s_2 , u smjeru kazaljke na satu gledajući od 2 na 3, odnosno od 1 na 3, kao pozitivan smjer rotacije. Ako su sada sada obje rotacije v_1 i v_2 istog pred-

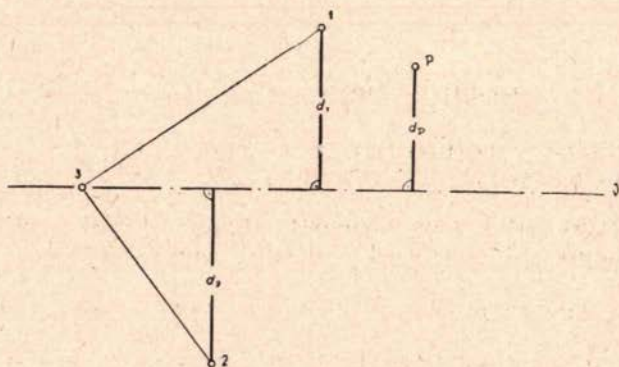
znaka onda se $k\delta_1$ i $k\delta_2$ nanose na pravac s_1 na istu stranu od tačke 3, u protivnom slučaju na protivnu. Potom se tačka 2'2 prenese na pravac s_2 paralelno sa 2—1.

Kod svakog sistema postoji tendencija da linearne deformacije budu minimalne, odnosno da mjerilo numeričkih podataka bude jednako jedinici. Stoga između polaznog i transformiranog sistema neće biti većih razlika u mjerilu, pa će prevladavati razlika u smjeru obih sistema (α , sl. 9). U tom slučaju nesuglasica δ_x raste udaljavanjem od osi x, tj. sa y, a δ_y udaljavanjem od osi y, tj. sa x, pa će os v_x biti približno paralelna sa x, a v_y približno paralelna sa y. Ipak može postojati formalna razlika u mjerilu oba sistema, ako su oni izraženi u različitim mjerama, na pr. jedan u metrima, a drugi u hvatima. U tom slučaju nesuglasica x raste udaljavanjem od osi y, a y udaljavanjem od osi x.

1.3.1.2 Određivanje veličine rezultirajućeg vektora

Iz sl. 3 proizlazi da se redukcijom odstupanja δ na $\bar{\delta}$ rezultirajući vektor $v_{h\ 1-2-3}$ samo paralelno pomakne do smjera kroz tačku 3, dok se njegova veličina ne promjeni. Prema tome su reducirana i nereducirana veličina rezultirajućeg vektora jednake:

$$v = \bar{v} \quad (24)$$



Sl. 10.

Kad je poznat smjer rezultirajućeg vektora v lako je prema sl. 10 grafički odrediti udaljenosti d zadanih tačaka od rezultirajućeg vektora. Veličinu v dobijemo s kontrolom iz obje tačke:

$$v = \bar{\delta}_1 : d_1 = \bar{\delta}_2 : d_2 \quad (7)$$

Očito je da oba rezultata nemaju općenito jednaku težinu. Prema (5) bit će pogrešaka u određivanju v jednaka:

$$m_v = -\frac{\bar{\delta}}{d^2} m_d = -\frac{v}{d} m_d \quad (25)$$

a prema tome je težina

$$p = \frac{1}{m_v^2} = \frac{d^4}{\delta^2} \quad (26)$$

gdje je m_d pogreška odmjeravanja udaljenosti d . Opća aritmetička sredina bit će dakle jednaka:

$$v = \frac{\frac{d_1^4}{\delta_1^2} \bar{v}_1 + \frac{d_2^4}{\delta_2^2} \bar{v}_2}{\frac{d_1^4}{\delta_1^2} + \frac{d_2^4}{\delta_2^2}} \quad (27)$$

Formulu (27) pojednostavnimo time da prema (5) stavimo

$$(\bar{d}_1^2 : \delta_1) \approx (\bar{d}_2^2 : \delta_2^2) \quad (28)$$

$$v = \frac{\bar{d}_1^2 \bar{v}_1 + \bar{d}_2^2 \bar{v}_2}{\bar{d}_1^2 + \bar{d}_2^2} = \frac{d_1 (\text{sgn } \bar{v}_1) \bar{\delta}_1 + d_2 (\text{sgn } \bar{v}_2) \bar{\delta}_2}{\bar{d}_1^2 + \bar{d}_2^2} \quad (28)$$

Predznak za $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2$ određuje se dakle prema predznaku od \bar{v}_1, \bar{v}_2 .

1.3.2 NUMERIČKO ODREĐIVANJE ELEMENATA TRANSFORMACIJE

Kod grafičke affine transformacije mogu se radi postizavanja veće tačnosti elementi transformacije odrediti numerički.

1.3.2.1 Određivanje smjera rezultirajućeg vektora v

Smjer vektora određen je pravcem 3-4, kako je to već ranije izvedeno, a sada prikazano na sl. 11. Prema ranije izvedenom (23) vrijedi:

$$\bar{v}_1 : \bar{v}_2 = k \bar{\delta}_1 s_1 : k \bar{\delta}_2 s_2$$

iz čega slijedi:

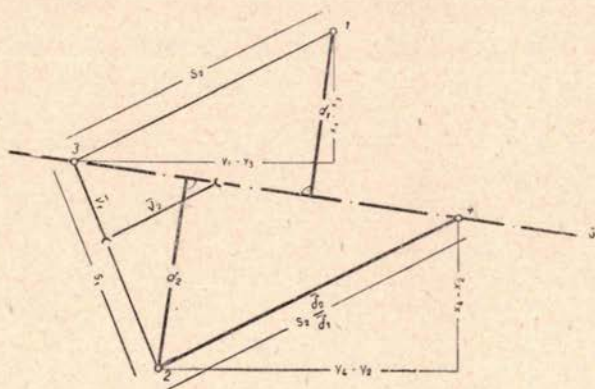
$$\bar{v}_1 : \bar{v}_2 = s_1 : \frac{\bar{\delta}_2}{\bar{\delta}_1} s_2$$

Iz sl. 11 slijedi odnos:

$$\frac{4-2}{1-3} = \frac{\bar{\delta}_2}{\bar{\delta}_1} s_2 : s_2 = \frac{\bar{\delta}_2}{\bar{\delta}_1}$$

Prema tome:

$$\frac{x_4 - x_2}{x_1 - x_3} = \frac{\delta_2}{\delta_1} \quad ; \quad \frac{y_4 - y_2}{y_1 - y_3} = \frac{\delta_2}{\delta_1}$$



Sl. 11.

a iz ovog proizlazi:

$$\begin{aligned} x_4 &= x_2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} (x_1 - x_3) \\ y_4 &= y_2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} (y_1 - y_3) \end{aligned} \quad (29)$$

1.3.2.2 Određivanje smjera rezultirajućeg vektora v

Dužine okomica d određuju se koristeći Hesseov oblik jednadžbe pravca

$$-x_P \sin \alpha + y_P \cos \alpha - b \cos \alpha = d$$

gdje je α koeficijent smjera pravca, b odrezak tog pravca na osi y , x_P i y_P koordinate neke tačke P, a d njena udaljenost od pravca. Kako je poznato, opći oblik pravca

$$Ax + By + C = 0$$

svodi se na Hesseov oblik tako da se čitava jednadžba podijeli sa:

$$\lambda = \frac{\lambda}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \quad A \geq 0$$

Jednadžba pravca 3—4 glasi:

$$y - y_3 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} (x - x_3)$$

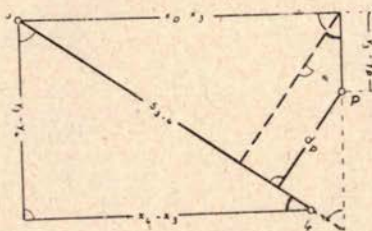
$$- \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} x + y - y_3 + \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} x_3 = 0$$

Da bi ovu jednadžbu sveli na Hesseov oblik treba ju podijeliti sa:

$$\sqrt{1 + [(y_4 - y_3) : (x_4 - x_3)]^2}$$

pa dobijemo:

$$\frac{-(y_4 - y_3)x_P + (x_4 - x_3)y_P + [-y_3(x_4 - x_3) + (y_4 - y_3)x_3]}{\sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2}} = d_P \quad (30)$$



Sl. 12.

Odnos (30) može se lako direktno izvesti iz sl. 12, imajući u vidu da je nazivnik jednak s_{3-4} i da je d_P prema slici negativan (s desne strane pravca 4-3).

Ako u jednadžbu (30), koja predstavlja Hesseov oblik za pravac osi rotacije v uvrstimo za x_P i y_P jedanput x_1 i y_1 , a drugi puta x_2 i y_2 dobit ćemo udaljenosti d_1 i d_2 od smjera rezultirajućeg vektora rotacije v . Veličina v izračunava se potom prema (5) odnosno (27-28). Kada bi i za ostale točke odredili d prema (30) onda bi to postao numerički postupak. Izraz za odstupanja $\bar{\delta}$ bio bi sljedeći:

$$\bar{\delta} = d_P v = \frac{d_P}{d_1} \bar{\delta}_1 = \frac{d_P}{d_2} \bar{\delta}_2$$

$$\begin{aligned} \delta_{x_P} &= \frac{-(y_4 - y_3)x_P + (x_4 - x_3)y_P + [-y_3(x_4 - x_3) + (y_4 - y_3)x_3]}{-(y_4 - y_3)x_1 + (x_4 - x_3)y_1 + [-y_3(x_4 - x_3) + (y_4 - y_3)x_3]} \bar{\delta}_{x_1} \\ &= \frac{-(y_4 - y_3)x_P + (x_4 - x_3)y_P + [-y_3(x_4 - x_3) + (y_4 - y_3)x_3]}{-(y_4 - y_3)x_2 + (x_4 - x_3)y_2 + [-y_3(x_4 - x_3) + (y_4 - y_3)x_3]} \bar{\delta}_{x_2} \end{aligned} \quad (32)$$

Analogne formule vrijede za y_P , pri čemu mjesto δ_x dolazi δ_y . Koordinate y_4 i x_4 određene su formulom (29)

1.4 TRANSFORMACIJA

Za afinu transformaciju proizvoljne tačke P potrebno je grafički očitati udaljenost d_P od pravca rezultirajućeg vektora, i ovu pomnožiti s veličinom v dobivenom po formuli (7) ili (28), pa se dobije reducirano odstupanje δ_P

$$\begin{aligned}\overline{\delta y_P} &= \overline{v_y d_{yP}} \\ \overline{\delta x_P} &= \overline{v_x d_{xP}}\end{aligned}\quad (32)$$

kojemu prema (4) treba dodati još adicijonu konstantu δ_3 da bi dobili δ_P . Transformirane koordinate dobit će se dakle po formuli:

$$\begin{aligned}\eta_P &= y_P + \delta y_3 + \overline{\delta y_P} \\ \xi_P &= x_P + \delta x_3 + \overline{\delta x_P}\end{aligned}$$

gdje su δy_3 i δx_3 određeni formulom (2), a $\overline{\delta y_P}$ i $\overline{\delta x_P}$ formulom (32)

2 RAZMATRANJE POGREŠAKA

Rezultat grafičke affine transformacije je formula (8), koja u općem obliku, tj. kako za koordinatnu nesuglasicu δ_x , tako i za δ_y , glasi:

$$\delta_P = d_P \cdot v \quad (8)$$

Reducirano odstupanje između oba sistema za proizvoljnu tačku P dobiva se kao produkt udaljenosti d_P od osi rotacije i iznosa fiktivne rotacije v . Točnost koordinata dobivenih grafičkom afinom transformacijom jednaka je tačnosti kojom je određena nesuglasica δ_P , a ova ovisi o tačnosti kojom su dane veličine d_P i v .

2.1 NUMERIČKO ODREĐIVANJE ELEMENATA TRANSFORMACIJE

Kod numeričkog određivanja elemenata grafičke affine transformacije određuje se veličina vektora v , a isto tako i smjer pomoću pomoćne tačke 4 bez pogreške. Prema tome će obzirom na (8) pogreška u određivanju δ ovisiti samo o pogreški d_P , tj. o tačnosti grafičkog očitavanja veličine d_P :

$$m_\delta = m_d \cdot v \quad (34)$$

Iz formule (34) proizlazi da je m_δ malen za malene v . Iznos v će biti relativno veći kod većih zakretaja i različitih mjera za dimenzije, na pr. metar-hvat. Ako prevlada utjecaj formalne razlike u mjerilu onda će os v_x biti približno paralelna sa y , a os v_y približno paralelna sa x , pa će vrijediti odnos:

$$\begin{aligned}\bar{\delta}_x &\approx (\text{metar-hvat}) \Delta x \\ \bar{\delta}_y &\approx (\text{metar-hvat}) \Delta y \\ v_x = \frac{\bar{\delta}}{d} &\approx \frac{(\text{metar-hvat}) \Delta_x}{\Delta_x} \approx 0,89 \approx v, \end{aligned} \quad (35)$$

Iz (35) proizlazi da je kod grafičke transformacije poželjan numerički prelaz na isti sustav mjera, da bi smanjili utjecaj pogreške m_d u formuli (34).

Srednja pogreška grafičkog očitavanja udaljenosti d_k na planu može se uzeti $\pm 0,2$ mm. Kako grafičku veličinu d_k treba još množiti s brojem mjerila karte to vrijedi:

$$m_d = \pm 0,2 \text{ mm } m_k \quad (36)$$

gdje je m_k mjerilo kartiranja. Ako se uzme da je $v = 0,05$ dobit će se:

$$m_\delta [m] = \pm 0,05 \cdot 0,0002 m_k = \pm 0,00001 m_k$$

što za mjerilo $m_k = 10\,000$ iznosi $\pm 0,10$ m. Općenito slijedi iz (36) da je tačnost proporcionalna s mjerilom plana (ili karte) sa kojeg se odmjereavaju udaljenosti d_k .

2.2 GRAFIČKO ODREĐIVANJE ELEMENATA TRANSFORMACIJE

Na sl. 8 prikazan je grafički postupak određivanja smjera rezultirajućeg vektora 3-4 iz zadanih veličina $\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2, s_1, s_2$. Ovaj se smjer može praktički odrediti tačno na način opisan u poglavlju 3.1. Pogreška grafičkog određivanja odstupanja δ ovisi u tom slučaju o slučajnoj pogreški odmjerenja d i o pogreški određivanja veličine rotacije v , koja dalje djeluje sistematski.

Prema formuli (8) bilo bi:

$$m_\delta = \pm v m_d \pm d m_v = \pm \sqrt{v^2 m_d^2 + d^2 m_v^2} \quad (37)$$

Od ranije imamo da je:

$$\begin{aligned}m_{v1} &= -\frac{\bar{\delta}_1}{d_1^2} m_{d1} \\ m_{v2} &= -\frac{\bar{\delta}_2}{d_2^2} m_{d2} \end{aligned} \quad (25)$$

Ako uzmemo da je $m_{d1} = m_{d2}$ i $v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ imat ćemo:

$$m_v^2 = \frac{1}{4} (m_{v1}^2 + m_{v2}^2) = \frac{1}{4} \frac{\bar{\delta}_1^2}{d_1^4} m_d^2 + \frac{1}{4} \frac{\bar{\delta}_2^2}{d_2^4} m_d^2 = \frac{1}{4} m_d^2 \left(\frac{\bar{\delta}_1^2}{d_1^4} + \frac{\bar{\delta}_2^2}{d_2^4} \right)$$

odnosno obzirom na (5):

$$m_v \approx \pm \frac{1}{2} v m_d \sqrt{\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2}} \quad (38)$$

Ako se vrijednost za m_v iz (38) uvrsti u formulu (37) dobije se:

$$\begin{aligned} m_\delta &= \pm \sqrt{v^2 m_d^2 + \frac{1}{4} v^2 m_d^2 \left(\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} \right) d_P^2} \\ &= \pm v m_d \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{d_P}{d_1} \right)^2 + \left(\frac{d_P}{d_2} \right)^2 \right]} \end{aligned} \quad (39)$$

Pretpostavimo da je $v = 0,05$, $m_d = 0,2 \text{ mm} \cdot m_k$, te da je

$$d_P = \frac{2}{3} d_1 = \frac{2}{3} d_2, \text{ pa izlazi da je:}$$

$$m_{\delta [m]} = \pm 0,05 \cdot 0,0002 m_k \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{4}{9} + \frac{4}{9} \right)} \approx \pm 0,00001 m_k$$

Prema tome je srednja pogreška transformiranih koordinata približno jednaka kod oba postupka, tj. grafičko i numeričko određivanje elemenata grafičke affine transformacije daje približno istu tačnost.

2.3 UTJECAJ POGREŠKE REZULTIRAJUĆEG VEKTORA

Pogreška u određivanju rezultirajućeg vektora uzrokuje sistemat-ske pogreške u određivanju odstupanja δ traženih tačaka. Rezultirajući vektor može imati pogrešku u smjeru i veličini, te je potrebno ustanoviti utjecaj ovih dviju pogrešaka rezultirajućeg vektora na određivanje nesuglasica, odnosno koordinata.

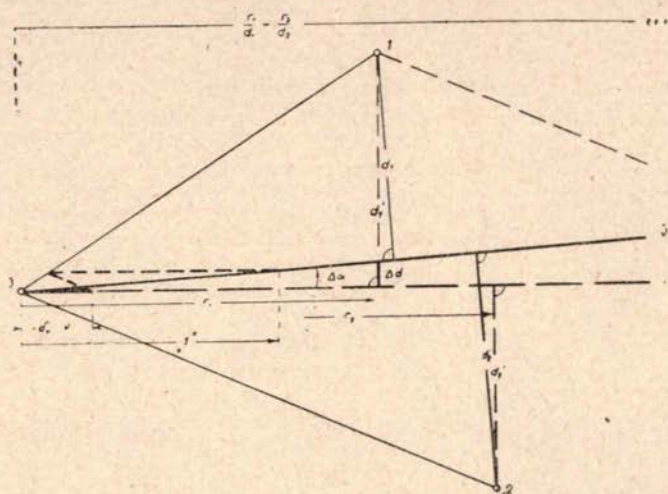
2.3.1 UTJECAJ POGREŠKE SMJERA

Pogreška u smjeru $\Delta\alpha$ rezultirajućeg vektora prouzrokuje pogreške u udaljenostima d . Uslijed pogreške smjera ove su dužine s jedne strane rotacione osi duže, a s druge strane kraće. Pogreške u dužini rastu udaljavanjem od tačke 3, za koju je izvršena redukcija odstupanja δ , jer kroz tu tačku vektor mora prolaziti (sl. 13).

Uslijed zakretaja smjera za kut $\Delta\alpha$ bit će pogrešno određene (gra-fički očitane) i udaljenosti d od zadanih tačaka 1 i 2, pa će prema tome i veličina rezultirajućeg vektora v biti pogrešna. Veličina zakretaja $\Delta\alpha$ može se prema tome odrediti iz nesuglasice $\delta_v = v_1 - v_2$. Ovo ima smisla samo u slučaju kada je nesuglasica δ_v u određivanju veličine rotacije veća nego što to može biti prouzrokovano slučajnim pogreškama odmjeravanja udaljenosti d .

Sistematska pogreška udaljenosti d uslijed zakretaja $\Delta\alpha$ iznosi prema sl. 13:

$$\Delta d = r \Delta\alpha \quad (40)$$



Sl. 13.

Suglasno formuli (25) bit će:

$$\Delta v = -\frac{\delta}{d} \Delta d = -\frac{v}{d} \Delta d = -\frac{v}{d} r \Delta\alpha$$

Prema tome će nesuglasica δ_v dobivena određivanjem v iz zadanih tačaka 1 i 2 iznositi:

$$\delta v = \Delta v_1 - \Delta v_2 = -\frac{v_1}{d_1} r_1 \Delta\alpha + \frac{v_2}{d_2} r_2 \Delta\alpha \approx -v \Delta\alpha \left(\frac{r_1}{d_1} - \frac{r_2}{d_2} \right)$$

pri čemu je uzeto u obzir da su udaljenosti d na sl. 13 suprotnog predznaka, jer su sa protivnih strana osi rotacije.

Iz gornje formule slijedi:

$$\Delta\alpha = -\frac{\frac{\delta v}{v}}{\frac{r_1}{d_1} - \frac{r_2}{d_2}}$$

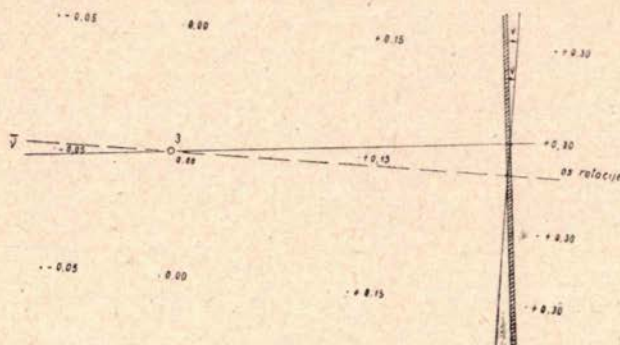
odnosno:

$$\Delta\alpha : \left(-\frac{\delta v}{v} \right) = 1 : \left(\frac{r_1}{d_1} - \frac{r_2}{d_2} \right)$$

ili dalje:

$$\Delta \alpha : \left(-\frac{\delta v}{v} \right) = d_1 : \left(\frac{r_1}{d_1} - \frac{r_2}{d_2} \right) d_1 \quad (41)$$

Razmjer (41) je konstruktivno riješen na sl. 13, gdje je prikazano grafičko dobivanje vrijednosti zakretaja $\Delta \alpha$. Za konstrukciju potrebni dijelovi označeni su na slici debelo. Veličina $\delta v : v$ i »1« (jedinica) moraju se nanijeti u istom, proizvoljnom i dovoljno krupnom mjerilu.

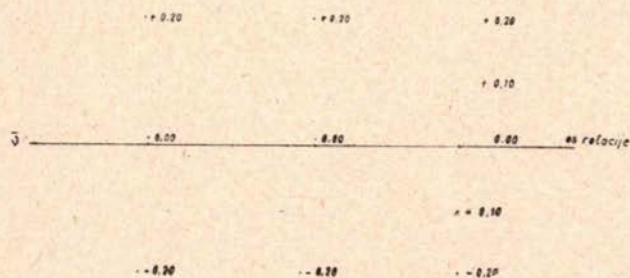


sl. 14

Pri određivanju odstupanja δ između oba koordinatna sistema za tražene tačke pogreška u smjeru vektora izaziva u poprečnom presjeku (obzirom na os fiktivne rotacije) konstantne pogreške. Ta je konstanta proporcionalna sa udaljenosti od tačke 3. Karakteristična slika pogrešaka za taj slučaj prikazana je na sl. 14.

2.3.2 UTJECAJ POGREŠNE VELIČINE ROTACIJE v

Pogreška u veličini rotacije v očituje se u pogreškama odstupanja δ , koje linearno rastu udaljavanjem od osi rotacije, te su suprotnog



sl. 15

predznaka na suprotnim stranama osi rotacije. Gradient poprečnog porasta ostaje duž osi konstantan, pa imamo za odstupanja δ karakterističnu osobinu prikazanu na sl. 15.

2.4 UTJECAJ USUHA

Kod grafičke afine transformacije koordinata zadane i tražene tačke su nanijete na planšeti. Elementi transformacije ovisni su o nesuglasicama i položaju zadanih tačaka, a transformacija traženih tačaka i o njihovom položaju prema osima fiktivnih rotacija. Na planšeti se dakle vrše odmjerenja. Ona mogu biti opterećena usuhom, pa je potrebno ustanoviti njegov utjecaj. Usuh može biti jednoličan i afini.

2.4.1 Jednoličan usuh

Kod jednoličnog usuha u oba ortogonalna smjera planšete usuh je jednak, što u stvari predstavlja pogrešku mjerila. Prešavši na rezultirajuću rotaciju možemo se za razmatranje utjecaja usuha ograničiti samo na prvi član formule (1):

$$\delta h_{Hi} = \frac{n_{Hi}}{n_1} \delta h_1 \quad (1)$$

Sa oznakama upotrebljenim kod grafičke afine transformacije ova formula glasi:

$$\delta = \frac{d_P}{d_1} \delta_1$$

Diferenciranjem ovog izraza dobiva se:

$$\begin{aligned} m\delta &= \delta_1 \frac{d_1 m_{dP} - d_P m_{d1}}{d_1^2} = \delta_1 \frac{d_P}{d_1} \frac{m_{dP}}{d_P} - \delta_1 \frac{d_P}{d_1} \frac{m_{d1}}{d_1} = \\ &= \delta_1 \frac{d_P}{d_1} \left(\frac{m_{dP}}{d_P} - \frac{m_{d1}}{d_1} \right) = \delta_1 \left(\frac{m_{dP}}{d_P} - \frac{m_{d1}}{d_1} \right) \end{aligned} \quad (42)$$

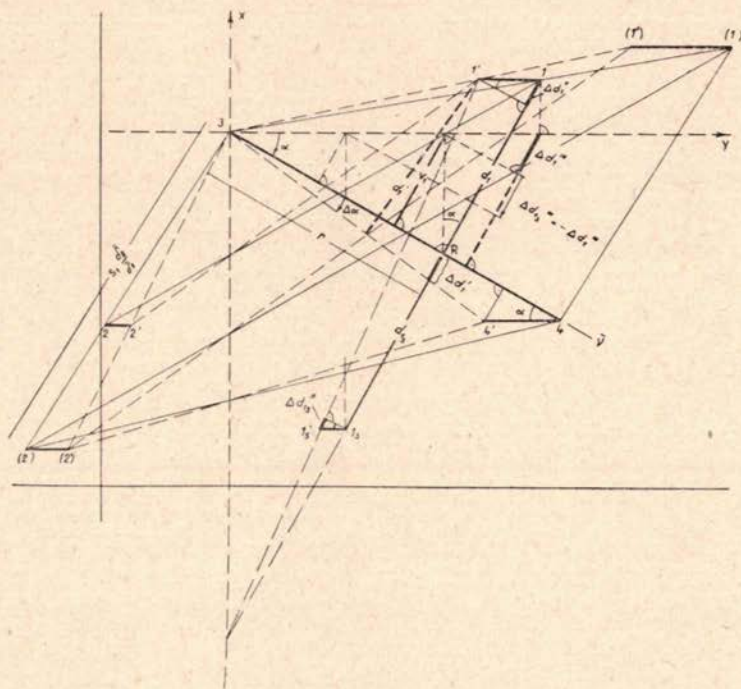
Kako kod jednoličnog usuha vrijedi razmjer da je $m_{dP} : d_P = m_{d1} : d_1$, slijedi da je u formuli (42) izraz u zagradi (za sistematske pogreške) jednak nula. Prema tome slijedi zaključak da jednoličan usuh nema utjecaja na određivanje koordinatnih nesuglasica, pa ne utječe na grafičku afinu transformaciju.

2.4.2 AFINI USUH

Gornji zaključak vrijedio bi bez daljnje i za afini usuh kada bi se os rotacije poklapala bilo sa osi afiniteta, bilo sa smjerom afiniteta, koji su smjerovi kod planšete redovito paralelni s njenim rubovima. Općenito to ne mora biti slučaj, i tada afini usuh prema sl. 16 zakreće konstruiranu os rotacije za kut $\Delta\alpha$, što mijenja udaljenosti d tačaka od osi.

Uzmemo q^0/o kao usuh, odnosno promjenu mjerila u smjeru osi x , a $p^0/o = q^0/o + \delta q^0/o$ usuh u smjeru osi y . Kako jednoličan usuh od q^0/o prema formuli (42) nema utjecaja dovoljno je promatrati diferencijalni usuh y -a prema x -u, što je jednako $\delta q^0/o$. Pretpostavimo da su y -dimenzije prema x -dimenzijama usušene za $(k-1)$ puta, pri čem je

$$k - 1 = \delta q : 100.$$



Sl. 16.

Kako smo odstupanja reducirali za δ_3 , tako da i os rotacije mora prolaziti kroz tačku 3, to za ovu svrhu pomaknemo koordinatni sistem paralelno, da mu ishodište također padne u tačku 3. Prema tome vrijedit će relacije (43):

$$\begin{aligned} 1 - 1' &= (k-1) y_1 \delta_2 \\ (1) - (1') &= (k-1) y_1 \delta_1 \\ 4 - 4' &= (k-1) y_4 \delta_1 \end{aligned} \quad (43)$$

Iz sl. 16 slijedi nadalje da je zakretaj osi rotacije:

$$\Delta \alpha = (4 - 4') \sin \alpha : \frac{y_4}{\cos \alpha} = (k-1) \sin \alpha \cos \alpha \quad (44)$$

Uslijed afinog usuha udaljenost d preći će u d' (sl. 16), pri čemu se uslijed malenog iznosa afiniteta (malenog zakretaja $\Delta\alpha$) može uzeti da je:

$$d'_1 = d_1 + \Delta d'_1 - \Delta d''_1 \quad (45)$$

gdje je:

$$\Delta d'_1 = r \Delta\alpha = (k-1) \cos\alpha \cdot r \sin\alpha = (k-1) v_1$$

$$\Delta d''_1 = (1-1') \sin\alpha = (k-1) y_1 \sin\alpha = (k-1) (v_1 + \Delta d'''_1)$$

Konačno dobivamo pogrešku udaljenosti:

$$\Delta d_1 = d'_1 - d_1 = \Delta d'_1 - \Delta d''_1 = -(k-1) \cdot \Delta d'''_1 \quad (46)$$

Iz sl. 16 slijedi da je veličina

$$\Delta d'''_1 = d_1 \sin^2\alpha \quad (47)$$

Ako se (47) uvrsti u (46) dobije se:

$$\Delta d_1 = d'_1 - d_1 = -(k-1) d_1 \sin^2\alpha \quad (48)$$

Kako je za dani slučaj transformacije u formuli (48) vrijednost $-(k-1)\sin^2\alpha$ konstantna to slijedi:

1. Pogreške Δd u određivanju udaljenosti d kod afinog usuha su linearno proporcionalne sa samim udaljenostima.

2. Pogreške Δd prelazom osi zadržavaju predznak jer $\Delta d'''_{1s}$ (47) za tačku 1_s , simetričnu sa 1 s obzirom na os rotacije 3—4 (sl. 16), promjeni predznak, pa će za tu tačku vrijediti:

$$\begin{aligned} \Delta d''_{1s} &= (k-1) y_{1s} \sin\alpha = (k-1)(v_1 + \Delta d'''_{1s}) = (k-1)(v_1 - \Delta d_1''') \\ \Delta d_{1s} &= -\Delta d'_{1s} + \Delta d''_{1s} = -\Delta d'_1 + (k-1)(v_1 - \Delta d_1''') = -(k-1)\Delta d_1''' \\ &= \Delta d_1 \end{aligned} \quad (46 a)$$

Iz obih pak karakteristika slijedi:

a) Relativna pogreška $\Delta d:d$ uvjetovana afinim usuhom planšete biti će kompenzirana protupogreškom mv prouzrokovanom istim razlogom 1) prilikom određivanja veličine rotacije v iz zadanih tačaka.

Prema (48) izmjerit ćemo na planšeti opterećenoj afinim usuhom umjesto veličine d iznos $d[1 + (\Delta d:d)]$, gdje je $\Delta d:d = -(k-1)\sin^2\alpha$ i jednako kako za zadane tako i za tražene tačke. To izaziva prema (5) pogrešnu veličinu vektora rotacije, pa umjesto v dobijemo

$$(\bar{v}) = \frac{\bar{\delta x}}{d \left(1 + \frac{\Delta d}{d}\right)}$$

Kada za proizvoljnu tačku P izmjerimo $d [1 + (\Delta d:d)]$ rezultat će ispravno reducirano odstupanje:

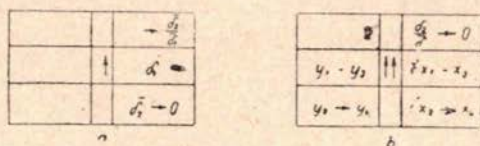
$$\bar{\delta} = (\bar{v}) d_P \left(1 + \frac{\Delta d}{d}\right) = d \frac{\bar{\delta x}}{\left(1 + \frac{\Delta d}{d}\right)} d_P \left(1 + \frac{\Delta d}{d}\right) = \bar{v} d_P$$

3 TEHNIČKA PROVEDBA

Da bismo imali što manja odstupanja δ treba koordinatne osi polaznog sistema x, y i transformiranog ξ, η pridružiti uvijek prema srodnoj azimutalnoj orijentaciji. Iz istih razloga treba za slučaj da je smisao koordinata suprotan umjesto diferencija uzimati kod formiranja nesuglasica δ sume koordinata, npr. $\xi + x$ odnosno $\eta + y$, pri čemu onda kao adiciona konstanta fungira $\xi_3 + x_3$ odnosno $\eta_3 + y_3$.

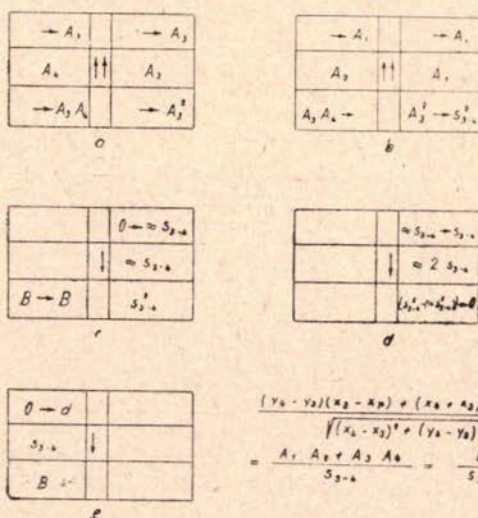
3.1 NUMERIČKO ODREĐIVANJE ELEMENATA TRANSFORMACIJE

Za dobivanje smjera rezultirajućeg vektora v potrebno je sračunati koordinate tačke 4 pomoću formula (29). Računanje se izvodi pomoću dvostrukog računskog stroja po shemi prikazanoj na sl. 17.



Sl. 17.

Padne li tačka 4 izvan formata planšete koristi se za konstrukciju smjera osi rotacije neka druga prikladna tačka na pravcu 3—4, čije se koordinate lako odrede. Na pr. težište dužine 3—4, čije se koordinate dobiju aritmetikom sredinom iz 3 i 4.



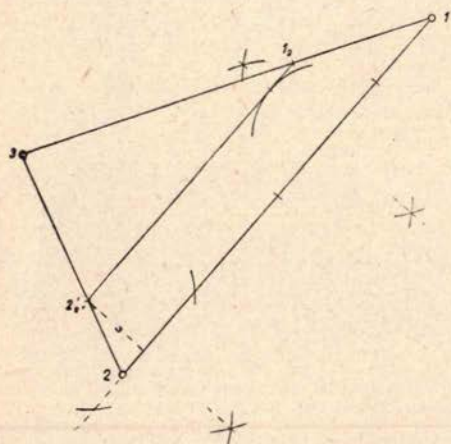
sl. 18

Udaljenost d_P tačke P od pravca 3—4 sračunat ćemo prema formuli (30) također pomoću dvostrukog računskog stroja na način prikazan shematski na sl. 18. Veličina v izračunava se zatim prema formuli (28).

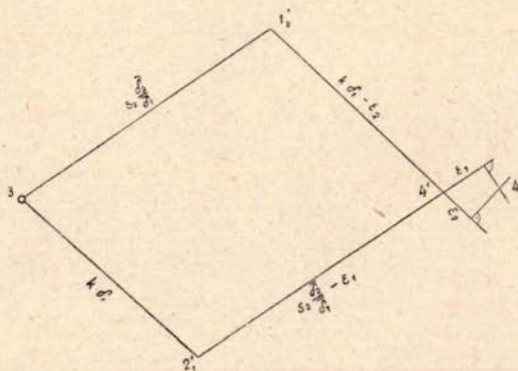
3.2 GRAFIČKO ODREĐIVANJE ELEMENATA TRANSFORMACIJE

Za konstrukciju tačke 4 potrebno je prema sl. 8 nanijeti veličine $k\delta_1$ i $k\delta_2$ na stranicu 3—2. Iz $2'_2$ povučemo paralelu sa 2—1 do stranice 3—1, dobijemo tačku $1'_2$. Kroz nju povučemo paralelu sa 3—2, a kroz $2'_1$ paralelu sa 3—1. Na njihovom presjecištu dobijemo tačku 4.

Da bi što točnije povukli paralelu sa stranicom 2—1 možemo primijeniti konstrukciju prikazanu na sl. 19, kod koje se pri oba kraja dužine $2'_2—1'_2$ konstruira udaljenost od pravca 2—1. Položaj tačke 4 kontrolirat ćemo prema sl. 20, gdje su ϵ_1 i ϵ_2 odstupanja konstruiranih dužina $2'_1—4'$ i $1'_2—4'$ od dužina 3—1'2 i 3—2'1.



sl. 19



Sl. 20.

3.3 TRANSFORMACIJA

Nakon što je određen vektor rotacije treba za tražene tačke odmjeriti njihove udaljenosti od osi rotacije. To se vrši na najlakši, najbrži i relativno tačan način ako stoji na raspolaganju pravokutan trokut iz prozirnog materijala (sl. 21), na kojem je paralelno s rubovima kateta nanesena prikladno odmaknuta po jedna skala na kontaktnoj strani. Pravci tih skala trebaju biti međusobno strogo okomiti. Pravac jedne skale namjesti se na os rotacije tako da bi pravac druge skale prolazio traženom tačkom. Na visini tražene tačke očita se na skali njena udaljenost od osi. Ovakvo pomagalo služilo bi i za druge svrhe, na pr. za brzo i relativno točno odmjerenje koordinata sa plana unutar okna mreže.

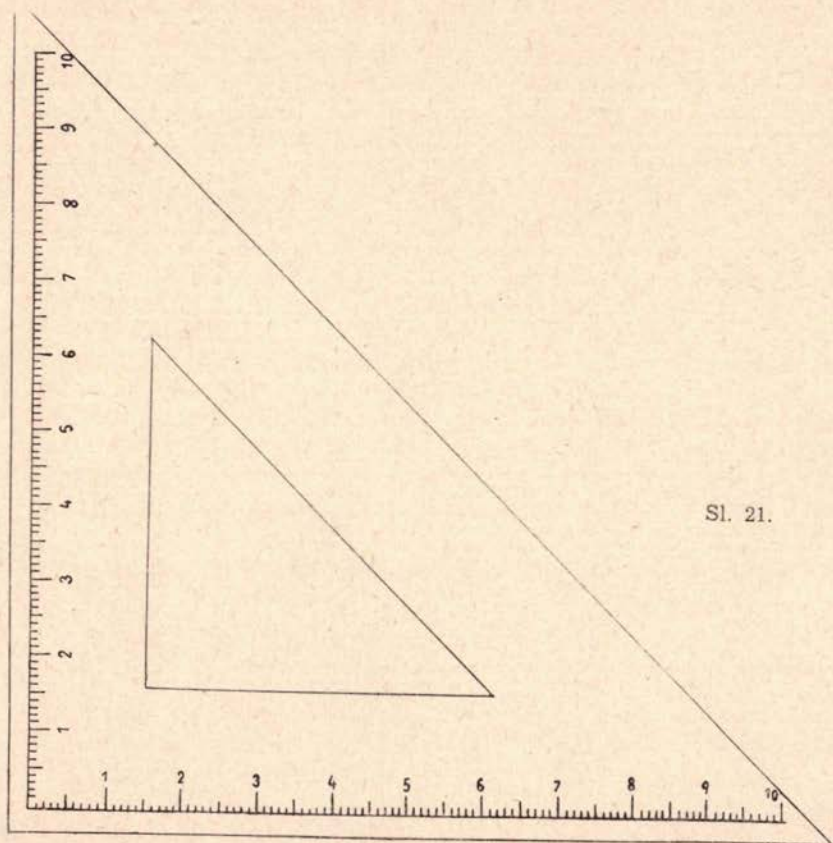
Nesuglasicu δ dobijemo prema formuli (33)

$$\delta_P = \delta_3 + d_k (v \cdot m_k)$$

po shemi prikazanoj na sl. 22.

4 PRAKTIČKA ISPITIVANJA

Da bi se izloženi postupci verificirali i dobila približna slika o tačnosti obrađena su dva primjera, i to jedan sa mjerilom planšete 1:10000 i drugi sa mjerilom 1:1000. U pomanjkanju prikladnog materijala za ispitivanje određene su u prvom slučaju zadane i kontrolne tačke transformacijom po formulama datim u knjizi prof. Borčića [2], a u drugom su primjeru one dobivene kao fiktivne tačke progušćivanjem koordinatne mreže (sl. 23).

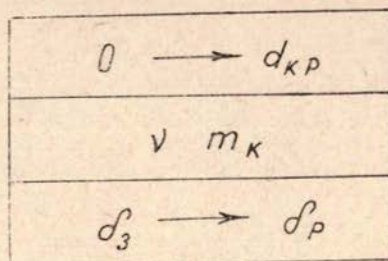


Sl. 21.

4.1 PRIMJER TRANSFORMACIJE KOORDINATA IZMEĐU DVIJU ZONA GAUSS-KRUEGEROVE PROJEKCIJE

Za praktičnu primjenu grafičke affine transformacije uzete su trigonometričke tačke koje padaju na detaljni list Trnovec 4 L 33-69-Bb-4 u mjerilu 1:10 000. Trigonometrijske tačke nanijete su na planšetu i korištene za kartiranje zadatka »Drava« u Zavodu za fotogrametriju AGG-fakulteta. Koordinate trigonometrijskih tačaka dane su u 5. zoni. Za prikaz primjene grafičke transformacije ove su trigonometrijske tačke transformirane u 6. zonu.

Da bi se mogla dati ocjena tačnosti koordinata dobivenih grafičkom afinom transformacijom to su koordinate svih trigonometrijskih tačaka prvo transformirane po formulama koje su date u knjizi prof. Ing. Borčića [2], a isto tako i numeričkom afinom transformacijom. Za



Sl. 22.

grafičku afinu transformaciju tačaka uzete su kao zadate tačke u oba sistema trigonometrijske tačke: $\Delta 31$, $\Delta 17c$, $\Delta 198$ i $\Delta 189$. Sve ostale tačke leže unutar navedenog četverokuta (sl. 23). Tačka $\Delta 31$ uzeta je kao tačka 1, trigonometar $17c$ kao tačka 2, dok je za tačku 3 prema poglavlju 5 uzeta fiktivna tačka, kojoj su koordinate aritmetička sredina iz koordinata tačaka $\Delta 198$ i $\Delta 189$. Iste tačke bile su uzete kao zadane i kod numeričke affine transformacije. Numerički i grafički je transformirano ukupno 16 tačaka, od kojih su 4 korištene kao zadane u oba sistema za određivanje elemenata affine transformacije.

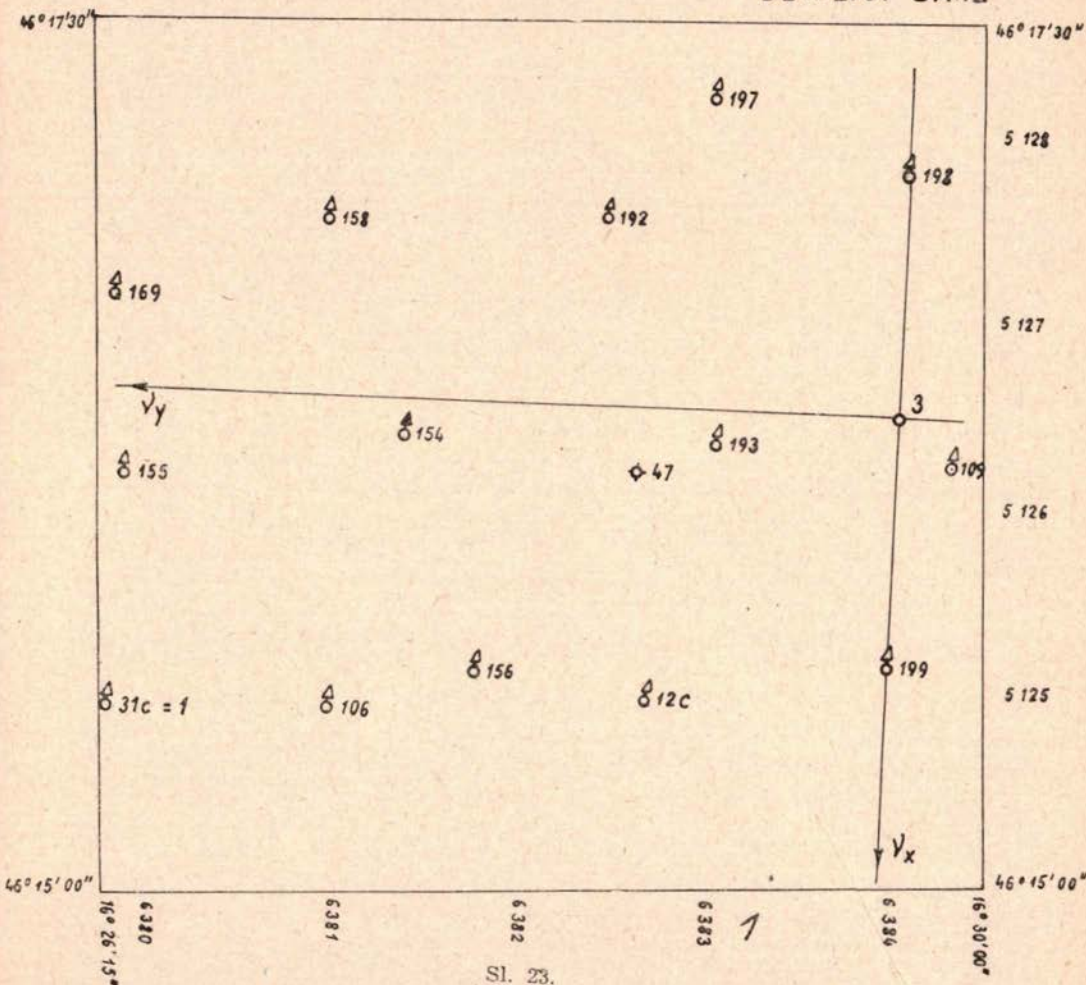
Kod grafičke affine transformacije koordinatne razlike zadanih tačaka reducirane su na tačku 3 = $\frac{1}{2} (\Delta 198 + \Delta 189)$.

Radi upoređenja elementi grafičke transformacije određeni su na dva načina: grafički i numerički. U tu svrhu korišten je trigonometrijski list L 33-69-Bb-4 u mjerilu 1 : 10 000. Tačke su nanijete bez specijalne pažnje na milimetarskom papiru, na kojem je proveden i čitav postupak. Grafičkom metodom dobiveni su smjerovi osi rotacija i njihove veličine $v_x = 0,0379$ i $v_y = 0,0379$. Kod numeričke metode određivanja elemenata transformacije tačke su bile precizno nanijete na planšetu. Koordinate tačke 4 (x_4 i y_4) određene su po formuli (29) i dale su isti smjer osi rotacije kao i grafičko određivanje na planšeti. Numerički određene veličine vektora rotacije iznosile su: $v_x = 0,037850$ i $v_y = 0,037834$. Prema tome elementi određeni numerički i grafički potpuno se slažu po smjeru rotacije, dok se veličine rezultirajuće rotacije neznatno razlikuju. Grafička transformacija koordinata izvršena je jedanput s elementima određenim grafički, a drugi put s elementima određenim numerički. Rezultati transformacije prikazani su u tabeli 1. U istoj tabeli ujedno su prikazane razlike v_y i v_x između koordinata dobivenih numerički po formulama iz knjige prof. Ing. Borčića [2], koje su uzete kao praktički tačne, i koordinata dobivenih numeričkom afinom transformacijom (II-I), te koordinata dobivenih grafičkom afinom transformacijom, jednom s grafički određenim elementima (III-I)

i drugi put s numerički određenim elementima (IV-I). Na temelju tih razlika (pogrešaka) sračunate su srednje pogreške koordinata. Razlika između koordinata dobivenih formulama [2] i numeričkom transformacijom je vrlo malena. Srednja pogreška iznosi $m_1 = \pm 0,05$ m. Za gra-

$$\sigma_{17c} = 2$$

DET. LIST BR.12



fičku afinu transformaciju s grafički određenim elementima dobivena je srednja položajna pogreška za tražene tačke: $m_1 = \pm 0,16$ m. Kod numeričkog određivanja elemenata transformacije dobivena je srednja položajna pogreška $m_1 = \pm 0,21$. Ovi iznosi položajnih pogrešaka u korištenom mjerilu ne dolaze do izražaja. Isti red veličina odgovara iznesenoj teoriji pogrešaka.

Tabela I

I Transformacija Gauss Krugrove projekcije u susjedni sistem po formuli daim u knjizi prof. Borčića
 II Afina transformacija Gauss Krugrove projekcije u susjedni sistem
 III Grafička afina transformacija Gauss Krugrove projekcije u susjedni sistem sa grafičkom orijentacijom
 IV Grafička afina transformacija Gauss Krugrove projekcije u susjedni sistem sa numeričkom orijentacijom

P	I			II			III			IV			V			VI			VII			VIII				
	y	x	[m]	Y	x	[m]	Y	x	[m]	Y	x	[m]	V _y	V _x	V _z	V _y	V _x	V _z	V _y	V _x	V _z	V _y	V _x	V _z		
0	6 379 763.06	5 124 904.16		3 07	6 14		2 89	4 09		2 78	3 88		+0.01	0.0001	0.0000	-0.17	0.0289	0.0025	-0.28	0.0784	-0.26	0.0676	-0.28	0.0784	-0.26	0.0676
1	6 379 955.70	5 128 000.22		5 09	0 22		5 19	0 30		5 03	0 10		-0.01	1 0.00	0	+0.09	81	64	-0.07	49	-0.12	144	-0.07	49	-0.12	144
2	6 384 053.80	5 127 769.30		3 80	0 36		3 89	0 25		3 80	0 25		0.00	0 0.00	36	+0.09	81	25	0.00	0	-0.05	25	0.00	0	-0.05	25
3	6 383 971.52	5 125 170.32		1 52	0 78		1 61	0 67		1 52	0 67		0.00	0 0.00	36	+0.09	81	25	0.00	0	-0.05	25	0.00	0	-0.05	25
4	6 382 835.32	5 124 858.69		5 31	8 64		5 04	8 71		5 04	8 64		-0.01	1 -0.05	25	+0.17	289	4	-0.28	784	-0.05	25	-0.28	784	-0.05	25
5	6 381 671.40	5 125 067.76		1 40	7 23		1 59	7 28		1 50	7 16		0.00	0 -0.03	9	+0.19	361	4	+0.10	100	-0.10	100	+0.10	100	-0.10	100
6	6 380 450.31	5 124 895.67		0 31	5 65		0 24	5 70		0 13	5 55		+0.00	0 -0.02	4	-0.07	49	9	-0.18	324	-0.12	144	-0.18	324	-0.12	144
7	6 379 817.98	5 126 067.37		8 00	7 40		7 87	7 52		7 84	7 31		+0.02	4 +0.03	9	-0.11	121	225	-0.14	196	-0.06	36	-0.14	196	-0.06	36
8	6 382 311.06	5 126 496.92		1 06	6 92		1 05	6 90		1 03	6 42		0.00	0 0.00	0	-0.01	1	4	-0.23	9	-0.10	100	-0.23	9	-0.10	100
9	6 384 275.55	5 126 211.07		5 56	1 05		5 72	0 98		5 70	0 97		+0.01	1 -0.02	4	+0.17	289	4	+0.15	225	-0.10	100	+0.15	225	-0.10	100
10	6 382 598.83	5 126 317.76		8 83	7 77		8 92	7 80		8 91	7 75		0.00	0 +0.01	1	-0.09	81	16	+0.08	64	-0.07	49	+0.08	64	-0.07	49
11	6 382 388.45	5 127 536.32		8 45	6 38		8 33	6 16		8 26	4 06		0.00	0 +0.06	36	-0.12	144	324	-0.19	361	-0.26	676	-0.19	361	-0.26	676
12	6 382 971.82	5 128 178.60		1 79	8 69		1 74	8 31		1 63	8 45		-0.03	9 +0.09	81	-0.08	64	81	-0.09	81	-0.19	361	-0.19	361	-0.19	361
13	6 379 774.29	5 127 086.92		4 30	6 98		4 52	7 08		4 48	6 83		+0.01	1 +0.06	36	+0.23	529	256	+0.19	361	-0.09	81	+0.19	361	-0.09	81
14	6 380 916.03	5 127 517.49		4 04	1 56		4 04	1 52		3 98	1 36		+0.01	1 +0.07	49	+0.01	9	49	-0.05	25	-0.13	169	-0.05	25	-0.13	169
15	6 381 367.11	5 126 370.48		7 11	0 51		7 11	0 67		7 10	0 88		0.00	0 +0.03	9	0.00	0	49	-0.07	49	-0.20	400	-0.07	49	-0.20	400
Σ V ²												0.0017	0.0263	0.2461	0.1082	0.3172	0.2057									
Σ V ² · 70(°12)												0.00161	0.02219	0.16075	0.06896	0.22643	0.07141									
m _y = ∑ m _y · x												± 0.012	± 0.047	± 0.127	± 0.094	± 0.163	± 0.137									
m _x = ∑ m _x · m _x												± 0.049	± 0.157	± 0.157	± 0.208	± 0.208	± 0.208									

4.2 PRIMJER TRANSFORMACIJE IZMEĐU KOSE KONFORMNE CILINDRIČNE PROJEKCIJE I GAUSS-KRUEGEROVOG SISTEMA

Za drugi primjer grafičke afine transformacije uzeti su podaci za 1 trigonometrijski list grada Zagreba u mjerilu 1:1000, na kojem su području sračunate trigonometrijske tačke u kosoj konformnoj cilindričnoj projekciji Južnog Budimpeštanskog sustava i transformirane afino (sa izjednačenim koeficijentima) u Gauss-Krügerov sistem. List je obuhvatio tačke $\Delta 217$, $\Delta 218$, $\Delta 239$ i $\Delta 240$. Progušćen je s tačkama a, b, c, d, e, f, g, h, i, gdje je prema sl. 24

$$a = \frac{1}{2} (\Delta 217 + \Delta 240) = \frac{1}{2} (\Delta 218 + \Delta 239), \quad b = \frac{1}{2} (\Delta 217 + \Delta 239),$$

$c = \frac{1}{2} (\Delta 217 + \Delta 218)$ itd. Tačke su precizno nanijete koordinatografom na kaširanu planšetu. Tačka b uzeta je kao tačka 3, $\Delta 218$ kao 1 i $\Delta 240$ kao 2. Tačka 4 sračunata je numerički i također precizno nanijeta. Rezultati računanja prikazani su u tabeli II. v_x i v_y u ovom slučaju iznose: $v_x = 0,05050$, a $v_y = 0,05047$. Srednja položajna pogreška za tražene tačke iznosi $m_l = \pm 0,068$ m.

5 TRANSFORMACIJA ČETVEROKUTA

Kako planšeta ima oblik pravokutnika, a i traženo se područje općenito daje mnogo bolje aproksimirati četverokutom nego trokutom, to je mnogo poželjniji zadani četverokut od trokuta, da bi izbjegli ekstrapolaciju. Time afinitet postaje preodređen i prelazi u kolineaciju. Postupak sa četiri zadane tačke znatno bi komplicirao rad, pa je uputno da se kao i kod numeričke afine transformacije izvrši stanovito izjednačenje dvostruke mogućnosti: na pr. da se dvije tačke zamjene po položaju njihovim težištem, a njihove nesuglasice arimetskom sredinom, što se opravdava linearnom promjenom nesuglasice (32).

Odstupanja od strogog rješenja bit će to manja što je manja razlika u nesuglasicama dotičnog para zadanih tačaka, pa to može utjecati na izbor sparivanja. Kod tog sparivanja ujedinjena tačka ne smije dakako pasti na ili u blizini pravca koji povezuje ostale dvije tačke [vidi form. (25),] u kojem slučaju afinitet ostaje neodređen.

6 ZAKLJUČCI — RÉSUMÉ

Afina transformacija daje se prikazati i odrediti kao rezultat fiktivne rotacije polja oko horizontalne osi, i to posebno za x i y (32). Vektori v_x i v_y su kod afine transformacije po veličini približno jednaki i međusobno okomiti, dok to kod slične transformacije vrijedi strogo.

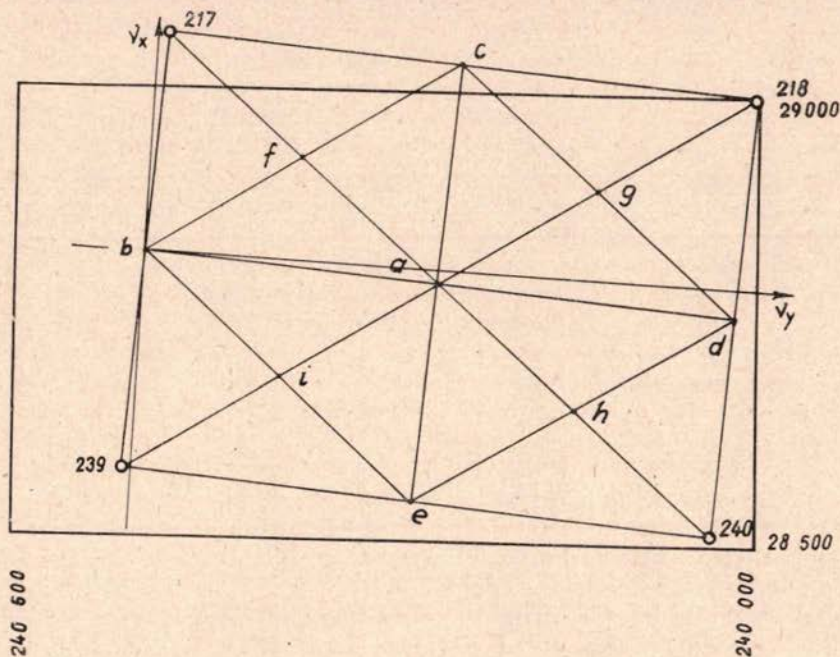
Ovako shvaćena afina transformacija daje se svrsishodno izvesti grafički ukoliko stoji na raspolaganju planšeta s nanesenim zadanim i traženim tačkama. Najprije se iz zadanih triju tačaka odrede elementi

T a b e l a II

Grafická afina transformacija iz kose komformne cilindrične projekcije u Gauss-Krügerovu projekciju

	Koso komf. cil. projekcija		Gauss-Krüger projekcija		G. Kr. - Koso k. c. proj.		G. Kr. - Graf. afina transf.		V _y	V _x	V _y ²	V _x ²
	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X				
	[m]		[m]		[m]		[m]					
d 217	40 489.55	29 012.86	74 500.00	73 000.00	34 010.45	43 987.14	34 010.47	43 987.20	- 0.02	- 0.06	0.0004	0.0036
d 218	39 990.10	28 987.61	74 000.00	73 000.00	34 009.90	44 012.39	34 009.83	44 012.45	+ 0.07	- 0.06	49	36
d 239	40 514.78	28 573.44	74 500.00	72 500.00	33 985.22	43 986.56	33 985.81	43 986.50	+ 0.01	+ 0.06	1	36
d 240	40 015.33	28 488.19	74 000.00	72 500.00	33 984.67	44 011.81	33 984.59	44 011.75	+ 0.08	+ 0.06	64	36
a	40 252.44	28 750.52	74 250.00	72 750.00	33 997.56	43 999.98	33 997.52	43 999.46	+ 0.04	+ 0.02	16	4
b	40 502.16	28 763.15	74 500.00	72 750.00								
c	40 239.82	29 000.23	74 250.00	72 000.00	34 010.18	43 999.77	34 010.14	43 999.83	+ 0.04	- 0.06	16	36
d	40 002.72	28 737.40	74 000.00	72 750.00	33 997.28	44 012.10	33 997.21	44 012.10	+ 0.07	0.00	49	0
e	40 265.06	28 500.82	74 250.00	72 500.00	33 984.94	43 999.18	33 984.89	43 999.12	+ 0.05	+ 0.06	25	36
f	40 370.99	28 884.69	74 375.00	72 500.00	34 004.01	43 993.31	34 004.00	43 993.34	+ 0.01	- 0.03	1	9
g	40 124.27	28 869.06	74 125.00	72 875.00	34 003.73	44 005.94	34 003.67	44 005.96	+ 0.06	- 0.02	36	4
h	40 133.89	28 619.36	74 125.00	72 875.00	33 991.11	44 005.64	33 991.05	44 005.61	+ 0.06	+ 0.03	36	9
i	40 383.61	28 634.98	74 375.00	72 625.00	33 991.39	43 993.02	33 991.37	43 992.99	+ 0.02	+ 0.03	4	9
									Σ V _y ²		0.0183	0.0107
									Σ V _x ² : m (s)		0.002287	0.001337
									m y	m x	± 0.048	± 0.037
									m _t = √(m _y ² + m _x ²)		± 0.060	

transformacije, tj. vektori v_x i v_y (smjer i veličina). I ovo određivanje izvodi se lagano i tačno, uglavnom potpuno grafički (sl. 8 i 10). Da bi se postupak određivanja elemenata pojednostavio, a time i povećala njegova tačnost, eliminira se tačka 3, time da se njeno odstupanje između transformiranog i polaznog sistema tretira kao adiciona konstanta.



Sl. 24.

Iz razloga teorije pogrešaka poželjna su što manja odstupanja između oba sistema, u koju svrhu se koordinatne osi jednog i drugog sistema pridružuju prema azimutalnoj orijentaciji. Time se u većini slučajeva mogu postići malena odstupanja, dok bi slučaj da zaokretaj oba sistema ostaje na svaki način velik bio za ovakovu grafičku afinu transformaciju nepovoljan. Iz istog razloga poželjno je, za razliku od numeričke transformacije, da koordinatne razlike budu izražene u istom sistemu mjera, i da se time ukloni formalna razlika mjerila.

Ako je smisao koordinatnih osi različit nesuglasice se ne dobivaju kao razliku transformiranog i polaznog sistema već kao suma. Kao adiciona konstanta fungira u tom slučaju suma koordinata za tačku 3.

Kako je tendencija svakog sistema da linearne deformacije budu što manje, to će prevladavati nesuglasice uslijed zaokretaja oba sistema, u kojem će slučaju os fiktivne rotacije v_x biti približno paralelna sa x , a v_y sa y (sl. 9).

Transformirane koordinate dobivaju se da se polaznim koordinatama doda adiciona konstanta (nesuglasica za referentnu tačku 3), te produkt $v \cdot d$ (32-33), gdje je d udaljenost tražene tačke od osi rotacije.

(v.d) se dobiva odmjeraivanjem sa planšete (d_k) i množenjem s brojem mjerila planšete (m_k).

Pravilan i afini usuh planšete ostaje teoretski i praktično bez utjecaja.

Ako stoji na raspolaganju zadani četverokut, što je već zbog izbjegavanja ekstrapolacije redovito poželjno, on se reducira na trokut time što se par tačkaka zamjeni njegovom aritmetском sredinom. Takav postupak će to manje odstupati od strogog rješenja što je razlika u nesuglasicama za taj par manja. Taj momenat može utjecati i na izbor dotičnog para, koji u tom smislu može biti i različit za x i y .

Primjena grafičke affine transformacije (ili slične) vezana je principijelno na planšet u nanesenim zadanim i traženim tačkama, a tačnost primjene na dovoljno krupno mjerilo te planšete. Time je primjena te metode praktički ograničena.

Postupak predstavlja međutim transformaciju pod novim aspektom, a broj elemenata, koji određuje grafičku transformaciju, reduciran je na minimum. To omogućuje bolji pregled sistematskih pogrešaka diljem polja, prouzrokovanih fiksnim uvjetima odnosno elementima transformacije. Metoda grafičke transformacije izgleda naročito prikladna ako se nakon izvršene (numeričke) transformacije naknadno konstatiraju pogreške zadanih tačkaka, koje se onda umjesto nesuglasica uvrste u postupak. Time će formalna odstupanja zadanih tačkaka (u ovom slučaju njihove naknadno određene pogreške) biti vrlo malena. Pod takovim okolnostima grafička afina transformacija predstavlja ne samo vrlo jednostavnu i preglednu već i vrlo tačnu metodu (v. formule (5) i (34), za korekciju izvršene transformacije. Nadalje je ta metoda prikladna za (grubu) kontrolu numeričke transformacije.

Promatrajući sistematske pogreške (kod prekobrojnih zadanih tačkaka) u smislu formule (33) i sl. 14 i 15 mogli bi retrogradno zaključivati o pogreškama korištenih zadanih tačkaka.

ZUSAMMENFASSUNG

Die affine Transformation lässt sich als Ergebnis einer fiktiven Drehung (Formel (5)) des (ebenen) Feldes um eine horizontale Achse darstellen bzw. bestimmen, und zwar separat für x und y (32). Die Entfernung von dieser Achse wird mit d und die Abweichung der transformierten Koordinatenwerte ξ , η von den Ausgangswerten x , y mit δ bezeichnet. Die Vektoren v_x und v_y (Abb. 4) stehen bei der affinen Transformation nahezu senkrecht zueinander (15) und sind ungefähr gleich (16). Bei einer Aehnlichkeitstransformation gilt dies streng.

Eine so aufgefasste affine Transformation lässt sich zweckmässig grafisch ausführen, falls eine Unterlage mit aufgetragenen gegebenen und gesuchten Punkten zur Verfügung steht. Zuerst werden aus drei gegebenen Punkten die Elemente der Transformation, d. h. die Vektoren v_x und v_y bestimmt. Auch diese Bestimmung erfolgt einfach und, in der Hauptsache, rein grafisch (Abb. 8) und (23).

Um das Verfahren zu vereinfachen und um gleichzeitig dessen Genauigkeit zu steigern, wird der Punkt 3 eliminiert, indem seine Abweichung δ_3 im transformierten System gegenüber dem Ausgangssystem als eine (wegzuschaffende) Additionskonstante behandelt wird (4).

Aus fehlertheoretischen Gründen sind möglichst kleine Abweichungen zwischen den beiden Systemen erwünscht, zu welchem Zweck die beiden Koordinatenachsen azimutal zugeordnet werden. Dadurch kann man meist sehr kleine Abweichungen

erzielen, während der Fall, dass die Verdrehung der beiden Systeme gross bleibt, für die grafische Transformation fehlertheoretisch ungünstig wäre. Aus demselben Grunde ist es zum Unterschied von der numerischen Transformation erwünscht, dass die Koordinatendifferenzen in demselben Masssystem ausgedrückt werden, und dass auf diese Weise zahlenmässige Abweichungen wegen der verschiedenen Masseinheiten beseitigt werden.

Wenn die Richtungssinn der Koordinatenachsen entgegengesetzt ist, werden die Abweichungen nicht als Differenzen (2) zwischen dem transformierten und dem Ausgangssystem ermittelt, sondern als deren Summe. Als Additionskonstante dient in diesem Falle die Summe der Koordinaten für den Bezugspunkt 3.

Wegen der Tendenz, bei jedem System die linearen Deformationen möglichst klein zu halten, werden die Abweichungen infolge der Verdrehung der beiden Systeme überwiegen. Für diesen Fall gilt, dass die Achse v_x der fiktiven Drehung ungefähr parallel zu x verläuft und v_y zu y (Abb. 9).

Die transformierten Koordinaten ξ, η ermittelt man, indem man den Ausgangskordinaten x, y die Additionskonstante δ_3 , (die Abweichung für den Bezugspunkt 3), und das Produkt $v \cdot d$ (32—33) zuzählt, wobei d die Entfernung des zu bestimmenden Punktes von der Drehachse v bedeutet. Die grafische Grösse d_k wird durch direkte Messung in der Kartierungsunterlage gewonnen. Das Produkt der Masstabszahl m_k der Unterlage und der Drehung v wirkt als konstanter Faktor. Es stellt sich heraus, dass die regelmässige (42) und die affine (48) Schrumpfung der Unterlage wirkungslos bleiben.

Steht ein gegebenes Viereck zur Verfügung, was zur Vermeidung der Extrapolation erwünscht ist, wird es auf ein Dreieck reduziert, indem ein Punktepaar durch sein arithmetisches Mittel ersetzt wird. Dieses Vorgehen wird von dem strengen umso weniger abweichen, je kleiner der Unterschied in den Abweichungen der gepaarten Punkte ist. In diesem Sinne muss die Auswahl des fusionierten Paares für x nicht dieselbe wie für y sein.

Die Anwendung einer grafischen Transformation, (sei es affin oder ähnlich), ist grundsätzlich an die Unterlage mit den aufgetragenen gegebenen und gesuchten Punkten gebunden, während die Genauigkeit von der Masstabszahl der Unterlage abhängt. Dadurch wird die Anwendung dieses Verfahrens praktisch beschränkt.

Das Verfahren stellt aber die Transformation von einem neuen Standpunkt aus gesehen dar, wobei die Anzahl der Bestimmungselemente auf ein Minimum reduziert wird. Das ermöglicht eine bessere Übersicht über die Wirkung der systematischen Fehler im ganzen Feld, die durch fehlerhafte Zwangsbedingungen, bzw. Transformationselemente hervorgerufen werden. Das Verfahren der grafischen Transformation erscheint besonders geeignet, wenn nach der Durchführung einer numerischen Transformation nachträglich Fehler der Fixpunkte festgestellt werden die dann als Abweichungen in das Verfahren einzuführen sind. Damit werden die formellen Abweichungen sehr klein. Unter solchen Umständen stellt die affine graphische Transformation nicht nur ein sehr einfaches und übersichtliches Verfahren dar, sondern auch eine sehr genaue Methode zur Korrektur einer bereits ausgeführten Transformation. Weiterhin dürfte die Methode für eine Grobkontrolle der numerischen Transformation verwendbar sein.

Wenn man die systematischen Fehler (bei überschüssigen gegebenen Punkten) im Sinne der Formel (33) und der Abb. und 15 betrachtet, kann man Rückschlüsse auf die Fehler der eingesetzten Fixpunkte ziehen.

LITERATURA:

- [1] F. Braum: »Die Beseitigung der Modelldeformationen in Senkrechtaufnahmen durch die Aenderung der relativen oder der innern Orientierung«, dis. Zürich—Zagreb 1960.
- [2] B. Borčić: »Tablice za transformaciju koordinata između susjednih koordinatnih sistema kod Gauss-Krügerove projekcije«, Savezna Geodetska Uprava — Beograd 1958.

* Ova radnja štampana je novčanim doprinosom Zavoda za fotogrametriju A G G - fakulteta u Zagrebu.