ODREĐIVANJE LAPLASOVIH TAČAKA[1]

Ing. RADOVAN VOJČIĆ — puk GIJNA — Beograd

ZNAČAJ ASTRONOMSKIH RADOVA I IZBOR FUNDAMENTALNE TAČKE

Uviđajući značaj i potrebu kako određivanja oblika i dimenzija Zemlje tako i pravilne orijentacije naše državne mreže, — triangulacije I reda — pristupili smo izvođenju astronomskih radova (određivanju geografske širine, dužine i azimuta neke strane triagulacije I reda) u cilju određivanja Laplasovih tačaka.

Jasno je, da su gornji zadaci osnovni problemi više geodezije pa prema tome i astronomija, odnosno astrogeodezija spada u okvir više geodezije kada je reč o tim zadacima. Poznato je, da su naročito velike zemlje zainteresovane za izučavanje oblika i dimenzija Zemlje s jedne strane i s druge, ostvarenja geodetsko-kartografskog kontinuiteta za velika područja. Pored čisto naučnog aspekta, to im je potrebno i zbog tačnih rastojanja tačaka na Zemlji udaljenih na hiljade kilometara jednih od drugih kao i za sračunavanje putanja za razne projektile. Astronomska merenja u mreži, neophodna su isto tako da bismo jednu triangulacionu mrežu postavili geografski na odgovarajuće mesto na zemljinoj površini. Tek posle geodetsko-astronomskih i gravimetrijskih merenja visoke tačnosti na širem području, može se pristupiti izradi jedinstvenog sistema na jednom kontinentu, a ako takva merenja postoje i na ostalim kontinentima, — kao što jednim delom postoje — može se pristupiti geodetskom povezivanju kontinenata i stvaranju jedinstvenog svetskog geodetskog sistema. Time će se omogućiti i izrada karata u jedinstvenom sistemu za svrhe navigacije, lansiranje raketa. Ovo je važno i za proučavanje kretanja kontinenata, neravnomernosti u rotaciji Zemlje itd. Izvesna povezivanja kontinenata i stvaranje svetskog geodetskog sistema već su realizovana sa izvesnom aproksimacijom.

Da bismo mogli vršiti geodetska računanja potrebno je složenu i nepravilnu površinu Zemlje zameniti prostijom i matematički određenom tj. referenc-elipsoidom na kojem možemo računati triangulaciju. Daleko smo od toga da tvrdimo, da je Beselov elipsoid, koji smo do sada koristili i još koristimo, najbolji tj. elipsoid najbliži geoidu za našu teritoriju. Isto tako, svesni smo činjenice da su geodetske osnovice do sada

---

[1] Referat održan na III kongresu matematičara, fizičara i astronoma Jugoslavije, Beograd 19—24 septembra 1960. g.

svođene umesto na elipsoid (po svojim apsolutnim visinama) na geoid, — nultu nivosku površinu koja nema veze sa površinom računanja. Sve je to rađeno iz nužde, jer nije bilo potrebnih astronomskih i gravimetrijskih podataka iz kojih bi se mogle sračunati vrednosti za pravilnu redukciju na odgovarajući elipsoid. Ovo nije samo slučaj kod nas. U većini zemalja, geodetska merenja na površini zemlje redukuju se samo na morski nivo tj. na površinu geoida. Znači, da se prilikom računanja triangulacija ne uzimaju u obzir odstupanja geoida od usvojenog referenc-elipsoida. Vrlo često ova odstupanja nemoguće je odrediti zbog nemanja potrebnih podataka, jer nije retko da program astronomskih, geodetskih i gravimetrijskih radova ne odgovara zahtevima određivanja oblika Zemlje. Postojalo je i mišljenje da odstupanja geoida od najprikladnijeg elipsoida nisu velika, pa samim tim da i njihov uticaj na geodetska merenja, odnosno računanja nema velikih posledica.

Ispitivanja sovjetskih geodeta a posebno Krasovskog, dovode do zaključka da su ovakva mišljenja neosnovana. Njihova ispitivanja pokazala su, da se uticaj odstupanja geoida od referenc-elipsoida na precizna geodetska merenja ne bi smeo zanemariti. Iz radova Vening-Majnesa vidi se, da odstupanja površine geoida od površine zemljinog elipsoida mogu biti i do 200 m, ali da ne prelaze ovu veličinu.

Odstupanje geoida od referenc-elipsoida i njihov uticaj na rezultate geodetskih merenja tj. računanja, posebno su važna kada dimenzije i orijentacija referenc-elipsoida sadrže velike greške. Znači, da za izravnanje triangulacije treba uzeti onaj elipsoid koji je vrlo blizak geoidu u granicama površine na kojoj se triangulacija razvija. Čak i kada smo izabrali takav elipsoid, koji je vrlo blizak geoidu, nije uvek moguće zanemariti uticaj odstupanja geoida od referenc-elipsoida kod geodetskih merenja visoke tačnosti. Zato bi bio pravilan put, da se radovi na triangulaciji i geodetskim osnovicama redukuju na površinu referenc-elipsoida, zašta je potrebno prethodno poznavati kako visinu zemaljske tačke iznad geoida i skretanja vertikala u istoj tački. Znači, najprostiji matemtaički metod redukcije geodetskih osnovica i uglova triangulacije je, da se oni projektuju na površinu usvojenog referenc-elipsoida normalama u odgovarajućim tačkama zemljine površine. Ovaj metod je primenjen kod izvođenja triangulacije u SSSR-u i poznat je pod imenom »Metod projektovanja«.

Iako se metod projektovanja može primeniti na svaki referenc-elipsoid, važno je pri tome, da to bude upravo onaj elipsoid koji se, na prostoru koji obuhvata triangulacija, najbolje podudara sa geoidom, kako po dimenzijama tako i po orijentaciji. Postići ovo nije lako ni jednostavno. Teško je unapred reči da se za našu teritoriju i jedan od postojećih elipsoida podudara sa geoidom. Tek posle obavljenih geodetskih, astronomskih i gravimetrijskih merenja kao i njihove obrade, možemo izabrati fundamentalnu tačku, — tačku triangulacije I reda u kojoj će se dodirivati ili biti paralelni geoid i usvojeni referenc-elipsoid. Sva ova merenja moraju zadovoljiti savremenu tačnost za ispitivanje oblika i dimenzije Zemlje i mogu korisno poslužiti, kao vrlo solidna osnova i za ostale geodetsko-topografske radove neophodne privredi i narodnoj odbrani. U svakom slučaju, ovim radovima zadovoljavaju se tako potrebe stvaranja solidne nacionalne geodetske osnove.

Za određivanje nadvišavanja geoida nad elipsoidom može se primeniti površinska metoda ili i neka druga. Za površinsku metodu imamo materijala obzirom da na prostoru velikog radiusa oko Laplasovih tačaka vršimo gravimetrijska merenja.

Danas su već poznate dimenzije kako dvoosnog, tako i troosnog elipsoida. Po mišljenju Krasovskog, troosni elipsoid nebi se mogao usvojiti za izvođenje triangulacije jer bi komplikovao izvršenje geodetskih radova odnosno računanja. Iz tih razloga u SSSR-u je usvojen dvoosni elipsoid Krasovskog, čija je velika poluosa (6,378 245 m) određena sa tačnošću $\pm$ 15 m, a spljoštenost (1:298,3) sa tačnošću $\pm$ 0,4.

Ova greška od 15 m, s obzirom na tačnost ranijih određivanja, više je nego mala ali ona, po Izotovu, ima samo formalan značaj i ne karakteriše stvarnu tačnost. Kasnija ispitivanja, koja su izvršili različiti autori, dovode do zaključka, da greška dimenzija elipsoida Krasovskog, teško prelazi 80 m za veliku poluosu i jednu jedinicu u imenitelju za polarnu spljoštenost. Po mišljenju Izotova, a na osnovu izvršenih računanja dimenzije elipsoida Krasovskog, greške veličine ovog reda, potpuno zadovoljavaju izvođenje triangulacije kako u SSSR-u tako i u drugim zemljama.

Kao što smo napomenuli, treba nastojati da fundamentalna tačka naše mreže bude tako izabrana da skretanja vertikala u njoj budu jednaka nuli tj. $\xi = \eta = 0$, gde su ξ i η komponente skretanja vertikala i iznose $\xi = \varphi_a - \varphi_g$, $\eta = (\lambda_a - \lambda_g) \cos \varphi$ ili $\eta = (A_a - A_g) \operatorname{cotg} \varphi$.

Ako se takva tačka ne može naći u triangulaciji I reda, onda treba odrediti onu tačku za koju će komponente skretanja vertikala zadovoljiti uslov minimuma sume kvadrata skretanja vertikala za usvojen referenc-elipsoid.

Kao što je poznato u SSSR-u je za fundamentalnu tačku uzeta Pulkovska opservatorija, čije su vrednosti skretanja vertikala sledeće:

ξ — (po meridijanu) $+ 0,''16 \pm 0,''12$

η — (po prvom vertikalu) $- 0'',78 \pm 0,''10$

Kao što se iz gornjih podataka vidi uslov $\xi = \eta = 0$ nije u potpunosti ispunjen, ali su odstupanja neznatna. Iz dosada obrađenog materijala se vidi, da kod nas možemo lako naći tačku koja će odgovarati gornjim zahtevima. Izbor fundamentalne tačke kod nas, treba da usledi posle svestrane analize postojećih podataka merenja i da zadovolji gore navedene uslove. Kada odredimo i usvojimo kordinate fundamentalne tačke i osnovni pravac — azimut, ostaje da se odredi visina geoida u fundamentalnoj tački kao i profil geoida u odnosu na referenc-elipsoid na čitavoj državnoj teritoriji pomoću astro-gravimetrijskog nivelmana.

U SSSR-u dobijene su za početnu visinu geoida u fundamentalnoj tački različite vrednosti ali u granicama jednog metra tako da je usvojeno da ta visina bude jednaka nuli.

Metodom astro-gravimetrijskog nivelmana odredili su visine profila geoida sa srednjom greškom koja ne prelazi 4—5 m. Ovi radovi na tzv. geoidalnim tačkama kod nas su u početnoj fazi i mogu se završiti u relativno kratkom vremenu.

Definicija i gustina Laplasovih tačaka

Uopšte uzevši pod Laplasovom tačkom podrazumevamo samo onu astronomsku tačku na kojoj smo odredili astronomskim putem širinu (φ_a), dužinu (λ_a) i azimut (A_a) koji služi za popravljanje geodetski izmerenih uglova. Znači ako se na jednoj astronomskoj tačci može odrediti Laplasov azimut (A) u cilju pojačanja kontrole uglova izmerenih geodetskim putem onda takvu tačku nazitvamo Laplasovom tačkom.

Ako pored astronomskih merenja raspolažemo i geodetskim merenjima odnosno podacima za širinu, dužinu i azimut možemo pored pomenutog Laplasovog azimuta izračunati Laplasov ostatak, skretanje vertikala i pravac skretanja vertikale. Tako se meridionalna komponenta određuje iz razlike astronomske i geodetske širine.

$$\xi = \varphi_a - \varphi_g \tag{1}$$

Longitudinalna komponenta je jednaka proizvodu iz razlike astronomske (λ_a) i geodetske (λ_g) longitude neke tačke i kosinusa astronomske širine (φ_a) te tačke

$$\eta = (\lambda_a - \lambda_g) \times \cos \varphi_a \tag{2}$$

Ako smo odredili i azimute onda smo u mogućnosti da longitudinalnu komponentu η odredimo kao proizvod iz razlike astronomskog i geodetskog azimuta i kotangensa astronomske širine (φ_a)

$$\eta = (A_a - A_g) \cdot \operatorname{ctg} \varphi_a \tag{3}$$

Iz dvostrukog određivanja longitudinalne komponente u pravcu istok-zapad dolazimo do Laplasove jednačine

$$(A_a - A_g)'' - (\lambda_a - \lambda_g)''. \sin \varphi_a = 0 \tag{4}$$

Ukupno astrogeodetsko Θ_{ag} skretanje vertikale biće:

$$\Theta_{ag} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \tag{5}$$

a pravac skretanja vertikale ε

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\Delta\lambda \cos \varphi_a}{\Delta \varphi} = \frac{\eta}{\xi} \tag{6}$$

Pod Laplasovim azimutom podrazumevamo azimut određen astronomskim putem popravljen za uticaj skretanja vertikala $(\lambda_a - \lambda g).\sin \varphi$ u tačci opažanja tj.

$$A_L = A_a - (\lambda_a - \lambda_g) \cdot \sin \varphi \tag{7}$$

Pod Laplasovim ostatkom $R = A_L - A_g$ podrazumevamo razliku između Laplasovog i geodetskog azimuta. U principu Laplasov ostatak treba da je jednak nuli, a ukoliko postoji treba da se rasporedi između astronomskih i geodetskih elemenata prema uticaju koji mogu imati na njega. Da bi se ovo postiglo najbolji je način da se u izravnanju mreže uvrste i astronomski elementi sa odgovarajućim težinama.

Po pitanju izbora i gustine Laplasovih tačaka postoje različita mišljenja iz čega i rezultira činjenica, da pojedine zemlje imaju vrlo mnogo takvih tačaka, dok ih druge imaju vrlo malo, ali postoji zajedničko mišljenje da su Laplasove tačke neophodne kod izravnavanja trigonometrijskih mreža i pravilne orjentacije istih.

Tako prof. Marusi, smatra, da je prihvatljiva granica od 100—200 km za međusobno rastojanje Laplasovih tačaka. Prema Hezfordu, Laplasove tačke treba da budu na rastojanju do 150 km, prema Krasovskom da su na rastojanju od oko 100 km, dok je baltička geodetska komisija preporučila rastojanje od 200 km. U Finskoj imamo slučaj da su od oko 300 tačaka triangulacije I reda njih oko 200 Laplasove, a sve ostale su geoidalne tj. na njima je određena astronomska dužina i širina. Više autora su vršili ispitivanja u tom pravcu, da bi mogli pouzdanije reći kakva je gustina Laplasovih tačaka potrebna. Jedan od njih je i prof. Bešlin, koji je ova ispitivanja vršio na zahtjev Međunarodne asocijacije za geodeziju. Baveći se ovim problemima on je pošao od predpostavaka, da je srednja greška horizontalnih uglova $\pm 0'',5$, srednja greška astronomskog azimuta $\pm 0,''5$ i da je greška razlike dužina $\pm 0,^s02$. Da bi dobio rastojanja između Lapsalovih tačaka, pošao je od uslova da su takve tačke potrebne kad srednja greška prenošenja azimuta preko više trouglova pređe vrednost $\pm 1''$. Ovakvo ispitivanje je dovelo do zaključka da rastojanje između Laplasalovih tačaka treba da iznosi 150 km. Gustina naših Laplasalovih tačaka je znatno manja nego što je na primer gustina sovjetskih, ali je vrlo približna gustini koju predlaže prof. Bešlin, a čiji je predlog usvojila i preporučila Međunarodna asocijacija za geodeziju. Kako smo Laplasove tačke određivali na izlaznim stranama osnovičkih mreža i to na svakoj izlaznoj strani po jedan par, a kako su osnovice na srednjem udaljenju od oko 150 km, to su i naše Laplasove tačke u srednjem rastojanju od 150 km, kako to preporučuje i Međunarodna asocijacija za geodeziju. Sa stanovišta teorije grešaka ova mišljenja i preporuke su pravilne ali ne moraju uzimati u obzir stvarne odnose na fizičkoj površini Zemlje. Teškoća kod postavljanja Laplasove jednačine je u tome što ona s obzirom na njeno izvođenje važi samo kad možemo da pretpostavimo da se opažanja vrše na geoidu koji samo malo odstupa po visini od usvojenog elipsoida. Zbog toga Laplasove tačke vrlo dobro dođu da se popravi orijentacija mreže u niskim predelima. Kako se veći broj naših Laplasovih tačaka nalazi na većim visinama u planinskom pa i visokoplaninskom zemljištu, to ostaje otvoreno pitanje njihovog korišćenja za orjentaciju dok se ne odrede vertikalska skretanja, a posebno krivine vertikala naročito ako hoćemo planinsku mrežu da računamo strogo na elipsoidu. Određivanje krivine vertikale je problem svoje vrste. Ako bi računski određivali tu krivinu na osnovu vidljivih masa, dobili bi neki sud o veličini zakrivljenosti vertikale, ali to je teško prihvatiti zbog nesigurnosti predpostavki koje smo uzeli. Dobijanje krivine vertikale na osnovu merenja teže je za sada još u proučavanju i dosada ispitane tačke nisu na visokim planinama. Na izvesnom broju Laplasovih tačaka kod nas smo obavili potrebna merenja za određivanje zakrivljenosti vertikale i uskoro treba očekivati prve definitivne rezultate i određenije zaključke. Ovdje će naročito biti interesantna razlika između računski određene i merenjem izvedene zakrivljenosti vertikale a samim tim i ocena pretpostavki. Kada govorimo o rasporedu i gustini Laplasovih tačaka i orijentaciji mreže I reda treba napomenuti da kod ispitivanja najpovoljnijeg rasporeda Laplasovih azimuta sa gledišta teorije grešaka dolazimo do zaključka da će do optimalne popravke orijentacije doći onda kada je svaka tačka I reda istovremeno i Laplasova tačka. Ekonomski razlozi s jedne strane i teškoće oko pogodne redukcije Laplasovih azimuta s druge, upućuju nas na racionalnu modifikaciju prednjeg zaključka. Bolje je imati više Laplasovih azimuta srednje tačnosti na kraćem rastojanju nego mali broj azimuta vrlo visoke tačnosti na međusobnom velikom rastojanju.

Ako izraz (7) za Laplasov azimut napišemo u obliku

$$A_L = A_a - \lambda_a \sin\varphi + \lambda_g \sin\varphi \qquad (8)$$

vidimo da tačnost određivanja Laplasovog azimuta zavisi od tačnosti s kojom su određeni astronomski azimut (A_a), astronomska dužina (λ_a) i geodetska dužina (λ_g). Ako obeležimo sa

M_{AL} — srednja greška Laplasovog azimuta
M_{Aa} — srednja greška astronomskog azimuta
$M\lambda_a$ — srednja greška astronomske dužine
$M\lambda_g$ — srednja greška geodetske dužine

onda možemo napisati, da je srednja greška Laplasovog azimuta

$$M_{AL} = \pm\sqrt{M^2_{Aa} + M^2_{\lambda a}\cdot\sin^2\varphi + M^2_{\lambda g}\cdot\sin^2\varphi} \qquad (9)$$

Kod lanaca dužine 150—200 km duž paralele 45°, srednja greška $M\lambda_g$ = 0"03, te se može zanemariti u odnosu na srednje greške astronomski određenih azimuta i dužine. Prema tome, gornji izraz možemo napisati u obliku:

$$M_{AL} = \pm\sqrt{M^2_{Aa} + M^2_{\lambda a}\cdot\sin^2\varphi} \qquad (10)$$

Iz izraza (10) sledi zaključak da se Laplasovi azimuti mogu smatrati skoro nezavisni od grešaka neke triangulacije, a kako se pored toga i astronomski azimuti određuju nezavisno jedan od drugog, to praktično znači da se i Laplasovi azimuti određuju nezavisno jedan od drugog. U toj činjenici i leži značaj Laplasovih azimuta za izravnanje mreže.

Kao što se vidi iz izraza (8), i s obzirom na izraz (10), sledi zaključak, da je za određivanje Laplasovog azimuta bitan član $A_a - \lambda_a \sin\varphi$ i da prema tome astronomske elemente (A_a) i (λ_a) treba odrediti sa takvom tačnošću da Laplasov ostatak R ($R = A_L - A_g$) bude jedino posledica geodetskih merenja.

Da bismo došli do nekog pouzdanijeg zaključka o gustini Laplasovih tačaka u jednoj trigonometrijskoj mreži I reda, moramo vršiti prenošenje Laplasovog azimuta od jedne Laplasove tačke na drugu a to geodetsko prenošenje se može izvršiti primenom formule $\mu_g = \mu\sqrt{n}$, gde je μ srednja greška jednog pravca, a »n« broj pravaca koji najkraćim putem povezuju u jednom lancu ove Laplasove tačke pomoću izvesnog broja temenih tačaka mreže. Što se tiče uticaja grešaka astronomskih merenja treba imati u vidu da su te greške u dvema Laplasovim tačkama ušle u Laplasov ostatak Laplasove tačke od koje se polazi i Laplasove tačke za koju se dobija taj ostatak. Prema tome, ako imamo Laplasovu tačku L' ($\varphi'_a, \lambda'_a, A'_a$) od koje polazimo i neku drugu L'' ($\varphi''_a, \gamma''_a, A''_a$) koju treba izabrati onda na osnovu izraza (8) možemo napisati:

$$A''_a - A'_a - (\lambda''_a - \lambda'_a) \sin\varphi \tag{11}$$

jer su za određivanje Laplasovog azimuta važni samo astronomski elementi, pa je srednja kvadratna greška prenošenja Laplasovog azimuta u ovom slučaju

$$\sqrt{M^2_{A''} + M^2_{A'} + M^2_{\lambda} \sin\varphi} \leqq \frac{1}{2} \mu \sqrt{n} \tag{12}$$

Da bi se eliminisale sistematske greške broj pravaca između dveju Laplasovih tačaka treba da se kreće u granicama 10 n 30 tj. između dveju Laplasovih tačaka treba da se nađe 5—15 temenih tačaka triangulacije I reda. Ovde pod Laplasovom tačkom podrazumevamo par Laplasovih tačaka radi obezbeđenja kontrole azimuta, a po preporuci MAG (Bil. geod. No 13 1949, str. 263).

Većina zemalja uključujući i našu, a posebno Međunarodna asocijacija za geodeziju već duže vremena je zauzeta diskusijama o osnovnim naučnim problemima više geodezije, uključujući jasno, astronomska i gravimetrijska merenja koja su od velike praktične važnosti, kao što su problemi o metodama svođenja geodetskih merenja na referonc-elipsoid problemi o metodama izravnanja astrogeodetskih mreža, o usvajanju jedinstvenog sistema geodetskih koordinata na velikim površinama, o ispitivanju oblika Zemlje itd. Mnogi od ovih problema će svakako u skorijoj budućnosti biti rešeni.

ODREĐIVANJE ASTRONOMSKE ŠIRINE

Kao što je poznato i već objavljeno u »Rapport National« Laplasove tačke kod nas su određivane na izlaznim stranama osnovičkih mreža tj. na trigonometrijskim tačkama I reda. U prvo vreme u toku radova u 1954., 1955 i 1956. godini, na jednoj od tačaka izlazne strane osnovice određivane su širina, dužina i azimut tj. samo elementi neophodni za Laplasvu jednačinu. U toku kasnijih radova koji čine većinu radova na određivanju Laplasovih tačaka na svakoj tačci su određivana sva tri elementa, širina, dužina i azimut.

Za određivanje širine primjenjivali smo Horebov-Talkotovu metodu i to naizmeničnim merenjima krug E i krug W opažajući u srednjem 120 parova zvezda na jednoj tačci ili oko 20 parova jedne večeri. Srenja zenitna odstojanja zvezda u paru nisu prelazila 30^{0}, a program Talkotovih parova na tačci je bio takav da suma razlika zenitnih odstojanja južnih i severnih zvezda ne prelazi veličinu $\pm 30'$. Razlika zenitnih odstojanja zvezda u paru nije prelazila 20$'$ a razlika u rektascenziji između 4 i 15 vremenskih minuta. Nastojali smo da ne biramo zvezde manje od 7,5 prividne veličine i koliko je to bilo moguće da zvezde u paru budu približno iste prividne veličine. Prosečna srednja greška za sve tačke za koje je izvršena redukcija iznosi $\pm$ 0",09. Jasno, da ima i tačaka koje imaju znatno manju srednju grešku kao što je Laplasova tačka Sljeme, gde je srednja greška rezultata $\pm$ 0,"04. Razlog ovome je znatno veći broj merenja na pomenutoj tačci, a znatno veći broj merenja je izvršen zato što je bila prva tačka na kojoj smo merili posle drugog svetskog rata i gde su se sticala prva isukstva. Za određivanje širine koristili smo univerzalni instrumenat firme »Askania« sa otvorom objektiva 70 mm, snabdeven okularnim mikrometrom i Talkotovim libelama.

Tačnost naših astronomskih širina je nešto bolja nego prosečna tačnost širina mnogih zemalja.

U Generalnom izvještaju o geodetskoj astronomiji 1951-1954 podnetom X generalnom zasedanju Međunarodne unije za geodeziju i geofiziku R. Roelofs navodi, da tačnost širina dobijenih na stanicama I reda, obično Laplasovim tačkama, je prosečno $\pm$ 0"15. U istom izveštaju se navodi, da se još uvek najviše primenjuje Talkotova metoda. Za ovu metodu smo se i mi odlučili jer su pogodnosti metode ipak veće nego što su njeni nedostaci. Ozbiljan nedostatak ove metode je u tome što često moramo birati sitne zvezde koje su teško vidljive naročito pri lošijim atmosferskim prilikama s jedne strane, i što im je deklinacija poznata samo sa osrednjom tačnošću s druge strane. Zato nesigurnost u krajnjem rezultatu može da bude veća nego što je unutrašnja standardna greška. Iz Nacionalnog izveštaja Švedske, se vidi, da uglovna vrednost parsa Talkotove libele može da varira za 0"2, što zahteva određivanje vrednosti parsa libele na svakoj tačci. No i pored ovih i još nekih sitnih nedostataka, Talkotova metoda je jedna odlična diferencijalna metoda. Zbog svoje jednostavnosti, velike tačnosti, brzine i povoljnosti za izvršenje opažanja, ona se uopšte uzev predpostavlja drugim terenskim metodama. Visok stepen tačnosti koji se postiže Talkovom metodom proizilazi iz činjenice, da metoda potpuno zavisi od diferencijalnih merenja. Merenja okularnim mikrometrom su vrlo precizna a u isti mah razlika u astronomskoj refrakciji dveju zvezda približno iste visine je mala i može se sračunati bez znatne greške. U početku radova izbor Talkotovih parova smo vršili na taj način što smo koordinati nanosili zenitna odstojanja severnih zvezda u jednoj, a južnih u drugoj boji, a na apscisi nanosili zvezde po rektascenziji. Odmah smo uvideli da ovakav način nije dobar i ekonomičan za naše prilike, obzirom da treba odrediti širinu na oko 40 tačaka na celoj teritoriji zemlje i da za svaku tačku treba obnavljati postupak i posebno računati zenitna odstojanja, pa smo ovakav način koji je inače podesan za stalne tačke opservatorijskog tipa odbacili. Još jedan razlog za odbacivanje ovakvog načina izbora parova bio je i taj što se prilikom izbora parova nije moglo uočiti i prividna veličina zvezda u paru, a što je važno s obzirom na želju i potrebu da zvezde u paru budu približno iste prividne veličine. Od ovoga principa je odstupano samo kada nije bilo drugog rešenja. Zato smo izabrali po našem mišljenju jedan bolji odnosno ekonomičniji način za izbor parova koji se sastoji u sledećem: izradili smo zvezdanu kartu na koju smo uneli zvezde sa deklinacijama od $+20^0$ do $+70^0$ i zaključno sa prividnom veličinom 8 i to tako, da su na apscisi nanete zvezde po deklinacijama, a na ordinate po rektascenzijama i to u jednoj boji su nanete zvezde zaključno sa prividnom veličinom 6 u drugoj boji od prividne veličine 6—7, u trećoj od 7—7,5 i u četvrtoj boji od 7,5—8 prividne veličine. Pomoću oleate na kojoj su nanete iste zvezde vidimo odmah, kako se grupišu parovi zvezda, kako po približno istom zenitnom odstojanju, potrebnoj razlici i rektascenziji, tako i po prividnoj veli.čini. Posve ovako izvršenog izbora sračunati su svi podaci potrebni posmatraču za vreme posmatranja kao što su broj para, prividna veličina zvezda, srednja rektascenzija za godinu opažanja, srednje zenitno odstojanje zvezda u paru $Z_0 = {}^1/_2 (Z_s + Z_n)$ i to kako u njegovom istočnom (KE) tako i u njegovom zapadnom položaju (KW), kao i podelu kotura na kojoj treba očekivati zvezdu, bilo da se ona posmatra sa istočne ili sa zapadne strane i to za položaj južne zvezde u mikrometru po obrascu

$$m_s = m_o \pm \frac{1}{\mu_o} (Z_s - Z_o)$$

a za položaj severne zvezde po obrascu

$$m_n = m_o \mp \frac{1}{\mu_o} (Z_n - Z_o)$$

gde gornji znaci važe za posmatranje sa istočne, a donji za posmatranje sa zapadne strane i gde m_0 predstavlja položaj srednjeg idealnog konca u mikrometru, a μ_o vrednost obrta mikrometarskog zavrtnja u lučnim sekundama.

Vrednost obrta mikrometra je određena od strane više posmatrača iz posmatranja polara u najvećoj digresiji. Vrednost parsa libela određivana je na egzaminatoru astronomske opservatorije u Beogradu. Za zvezde koje su uzete iz efemerida »Apparent places of fundamental Stars« računate su Beselove konstante, radi određivanja prividnog položaja za trenutak opažanja, a za ostale i srednje položaje za početak godine. Posle izvršenih priprema i sračunavanja tablica potrebnih za redukciju i pripreme instrumenata odlazilo se na teren.

Kako je najveći broj Laplasovih tačaka na visinama između 1000 i 2000 m, nadmorske visine, to je posebne napore zadavalo iznošenje instrumenata i pribora na tako velike visine, najčešće kroz dosta neprohodne terene. Instrumenti i pribor su transportovani železnicom, pa kamionom, a po lošijim putevima džipom sa prikolicom, a gde vozilo dalje nije moglo prevozilo se tovarnim konjima i na kraju, bilo je terena neprohodnih i za konje, pa se dalje iznosilo na rukama. Posebne napore predstavljalo je iznošenje materijala za betonske stubove. U većini slučajeva za širinu i azimut su se koristili postojeći stubovi triangulacije I reda, samo što su proširivani betonskom »kapom« za potrebne dimenzije instrumenta. Instrumenat je dovođen u meridijan prvo pomoću severnih, zenitnih i najzad, bržih južnih zvezda. Azimut instrumenta i kolimacija su obično bili između dve do tri vremenske sekunde, tako da o ovim konstantama nije vođeno računa kod redukcija, jer su takvog reda da ne utiču na 0"01 u širini.

Najbolji učinak je ostvarivan, kada je ekipa stanovala na samoj tačci, jer se tako nije zamarala izlaženjem na tačku, pa su samim tim bila manja rasipanja kod merenja. Isto tako smo nastojali da opažač — opservator ima pomoćnika. Mada pomoćnik nije apsolutno neophodan, ipak je jasno, da će biti korisno po opažača ako ima zapisničara, jer će on dobar deo posla obavljati, a opservator će moći da posveti svoje celokupno vreme i pažnju na tačno opažanje i poentiranje. Parovi su tako birani da se mogu opažati cele noći. U srednjem $^2/_3$ parova je opažano do pola noći, a $^1/_3$ po ponoći. Bilo je noći kada se radilo od zalaska do izlazska Sunca. Ovo je praktikovano kada su duže padale kiše i druge vremenske neprilike, pa se vedre noći maksimalno koristile. S druge strane bilo je noći kada se od jakog vetra nije moglo opažati iako je bilo vedro, jer se mehur libele šetao po nekoliko parseva. Na nekim tačkama smo podizali zaštitne zidove da bi se zaštitili od jakih vetrova. Možda je učinjen propust što nije bilo specijalne konstrukcije za zaštiu od vetrova na svakoj tačci. Kada nije bilo vetra onda je kao po pravilu bila velika vlažnost, pa smo vrlo često objektiv morali čistiti jelenskom kožicom. Jedna polovina poslova otpadala je na iznošenje instrumenata, zidanje stubova i snošenje instrumenata s planine. Tehnika posmatranja uobičajena za Talkotovu metodu. Instrumenat je napajan iz šestvoltnog akumulatora najčešće od 120 Ah. Akumulatori su punjeni preko ispravljača ili posebno agregata. Obrada posmatranja vršena je po obrascu:

$$\varphi = \frac{1}{2}(\delta_s + \delta_n) + \frac{1}{2}(m_e - m_w)\mu_o + \frac{1}{2}(\Delta m_e - \Delta m_w)\mu_o +$$

$$+ \frac{1}{2}(l_w - l_e) + \frac{1}{2}(\nu_e + \nu_w) + \frac{1}{2}(\varrho_s - \varrho_u)$$

Popravka za pol kod širine obračunavana je po obrascu

$$\Delta\varphi_i = (x\cos\lambda_i + y\sin\lambda_i) \; ; \; \varphi_o = \varphi_i - \Delta\varphi_i \cdot$$

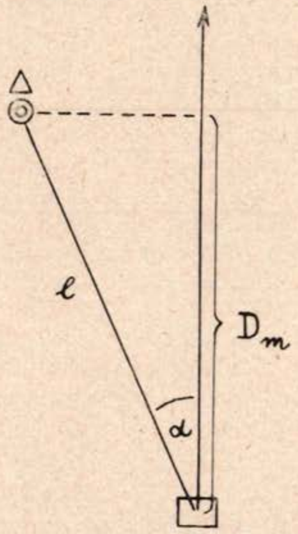
Popravka za apsolutnu visinu tačke radi redukcije na morski nivo vršena je po formuli koja je dosta približna, ali jednostavna za obračunavanje.

$$\Delta\varphi = -0{,}000171\, H_m \sin 2\varphi.$$

gde je $\Delta\varphi$ popravka u lučnim sekundama H_m visina tačke u metrima a φ širina. Ovo je popravka zbog zakrivljenosti vertikala odnosno drugojačije iskazano, zbog činjenice da dve nivoske površine na različitim visinama nisu paralelne nego konvergiraju postepeno ukoliko se približavamo polu. Pošto je ova popravka dosada primenjivana, to radi jednoobraznosti i mi smo je ovakvu primenjivali. Međutim, vrlo je sumnjivo da li ova popravka u datom obliku odgovara svojoj nameni. Ona počiva na dvema predpostavkama; prvo, da je vrednost promene sile teže sa širinom normalna, i drugo, da je prostor između geoida i mesta opažanja prazan. Međutim, nijedna od predpostavki nije uopšte u važnosti.

Pošto smo često morali opažati na ekscentričnoj stanici, to smo po postojećim obrascima niže geodezije vršili redukcije na centar. Imali smo slučajeva, da je trigonometrijska tačka vrh crkve ili vrh gradske kuće, gde se nije mogao ni blizu postaviti instrumenat, pa smo bili prinuđeni da posebnim merenjem (malom triangulacijom) dobijemo podatke radi redukcije na centar podataka određenih na ekscentričnoj stanici.

Često je bilo lakše i brže za redukciju izmeriti podatke kako se sa skice vidi i obračunati ih na sledeći način:



$$D_m = e \cos\alpha$$

$$\Delta\varphi''_e = \frac{D_m''\varrho}{\sqrt{MN}}$$

Pored svih napora oko određivanja Laplasovih tačaka ne može se poreći ni interesantnost određivanja istih jer je svaka tačka u neku ruku predstavljala problem za sebe. Napominjemo, da rezultati merenja još nisu definitivno obrađeni i da dosada nije bilo odbacivanja merenja niti primenjivan neki kriterij za odbacivanje, kao što je kriterij Šovinea ili neki drugi.

Još nije ni obavljena analiza rezultata merenja mada ona postoji. Svakako će se izvesti sistematske razlike između posmatrača, razlike između širine dobivene iz parova pre ponoći i parova po ponoći i razlike u širinama iz istih parova i druge analize. Opažane su i zenitne zvezde, tako da se i tu mogu praviti poređenja između širina određenih pomoću zenitnih zvezda i parova. Tačnost određene širine na primer za Sljeme, je sledeća:

Srednja greška određivanja širine iz jednog para $m = \pm 0''998$. Verovatna greška iz jednog para $m_v = \pm 0''665$.

Maksimalna greška iz jednog para $m_{max} = \pm 2,''994$

Srednja greška rezultata $M_\varphi = \pm 0,''041$

Maksimalna srednja greška rezultata $M_{max} = \pm 0,''123$

Verovatno srednja greška rezultata $M_v = \pm 0,''028$

Srednje greške širine na pojedinim tačkama iz godine u godinu kako se sticalo iskustvo i posmatračka rutina su manje i ako se broj merenja smanjivao.

Za sada još nismo u mogućnosti da damo ocenu spoljne tačnosti Laplasovih tačaka, što ćemo svakako dati posle obavljanja planiranih merenja za tu svrhu.

(Nastaviće se)