

PRILOG PITANJU ODREĐIVANJA DOZVOLJENIH ODSTUPANJA U POLIGONOMETRIJSKIM MREŽAMA

Ovaj članak nema za cilj da da neka pravila i formule za određivanje dozvoljenih odstupanja u vlakovima poligonometrijske mreže, nego da ukaže da u oblasti uglovnih i linearnih merenja, koja se vrše u svrhu određivanja koordinata tačaka pomenutih mreža, postoje nerešena pitanja.

1. UGLOVNA MERENJA

Prvo ćemo razmotriti uglovna merenja. Poznato je da se uglovno odstupanje u poligonometrijskim vlakovima određuje po formuli:

$$f_{\beta} = (v_z - v_p) - [\beta] + n \cdot 180^{\circ} \quad (1)$$

gde su:

$v_z - v_p$ — razlika direkcionih uglova završne i početne strane;
 $[\beta]$ — zbir prelomnih i veznih uglova.

Po teoriji grešaka imamo:

$$m^2_{f_{\beta}} = m^2_{(v_z - v_p)} + m^2_{[\beta]} \quad (2)$$

Smatralo se da je u običnoj poligonometrijskoj mreži, koja je služila kao osnova za razvijanje linijske mreže ili za tahimetrijsko snimanje, tačnost merenja prelomnih i veznih uglova mnogo manja od tačnosti sa kojom se određuju direkcionni uglovi strane bilo trigonometrijske, bilo poligonometrijske mreže, te je greška $m(v_z - v_p)$ zanemarevana. U ovom slučaju može se staviti:

$$m_{f_{\beta}} = m_{[\beta]} \quad (3)$$

Pod pretpostavkom da su svi prelomni i vezni uglovi u vlaklu izmereni sa istom tačnošću i da su greške u merenju uglova čisto slučajne greške i kao takve sleduju zakonu slučajnih grešaka odnosno drugog korena, može se napisati:

$$m_{[\beta]} = m_0 \sqrt{n} \quad (4)$$

Ovde su:

m_0 — srednja greška prelomnog odnosno veznog ugla;
 n — broj veznih i prelomnih uglova u vlaku.

Bilo je uobičajeno da se kod tzv. masovnih merenja, kao što su merenja na državnom premeru, dozvoljena odstupanja (maksimalne dozvoljene greške) određuju kao trostruke srednje greške. Prema ovoj postavci dobijamo:

$$f_{\beta \max} = 3m_{[\beta]} = \pm 3m_0 \sqrt{n} \quad (5)$$

Po ovom obrascu su i određivana dozvoljena uglovna odstupanja po pruskom katastarskom pravilniku (Aenweisung IX) od 1881 godine, a i po pravilniku o katastarskom premeravanju (II deo) od 1930 godine. Prema ovim pravilnicima

$$f_{\beta \max} = \pm 1,5 \sqrt{n} \quad (6)$$

i to bez razlike da li se radi o glavnim vlakovima tj. o vlakovima umetnutim između trigonometrijskih tačaka ili o sporednim vlakovima umetnutim između poligonometrijskih tačaka.

Tačno kroz 50 godina, naime 1931 godine, izdate su »Dopunske odredbe« za napred citirani pruski pravilnik (Ergänzungsbestimmungen I Teil vom 1 Juni 1931 zu den Anweisungen VIII, IX, und X für das Verfahren bei den Katasterneumessungen). Prema ovim odredbama dopuštena uglovna odstupanja su:

$$\text{za glavne vlakove} \quad f_{\beta \max} = \pm 1,5 \sqrt{n} \quad (7)$$

$$\text{za sporedne vlakove} \quad f_{\beta \max} = \pm (1,0 + 1,0 \sqrt{n}) \quad (8)$$

Kao što se vidi obrazac za određivanje dozvoljenih odstupanja za sporedne vlakove ima drugu strukturu. U vezi sa ovim obrascem treba napomenuti da je donošenju »Dopunskih odredaba« prethodila jedna konferencija nemačkih geodetskih stručnjaka. Na ovoj konferenciji, prilikom predlaganja drugog obrasca tj. obrasca za sporedne vlakove, bilo je rečeno da se on ne može teoretski obrazložiti, ali vrlo dobro odgovara rezultatima stvarnih merenja.

Da obrazac (7) po svojoj strukturi ne odgovara vlakovima sa malim brojem uglova, a to su uglavnom sporedni vlakovi, to je poznato, Uostalom, to se jasno vidi iz podataka obrade merenja u poligometrijskim mrežama triju katastarskih opština u okolini Beograda. U svim opštinama postoje 307 sporednih vlakova. Svi ovi vlakovi podeljeni su u 7 grupa, a po broju uglova u vlaku; u prvu grupu uvršćeni su vlakovi sa 3ugla, u drugu — sa 4 ugla itd. Posle toga sračunata je, za svaku

grupu posebno, srednja greška prelomnog odnosno veznog ugla. Greške su računane iz uglovnih odstupanja f_{β} po obrascu:

$$m_{\beta} = \pm \sqrt{\frac{[pf_{\beta}^2]}{N}} \quad (9)$$

gde su:

p — težina jednaka recipročnom broju uglova u vlaku tj. $p = 1/n$;

kako su u datoj grupi sve težine iste, to za pojedinačne grupe važe jednakosti

$$[pf_{\beta}^2] = p [f_{\beta}^2];$$

N — broj vlakova u grupi.

Podaci iz kojih su odnosne greške sračunate kao i same greške upisani su u tablicu 1.

Tablica 1

Broj uglova u vlaku	3	4	5	6	7	8	9
$[f_{\beta}^2]$	347747	324515	222898	141288	108721	13651	12009
N	87	97	57	34	24	3	5
$\frac{p \cdot [f_{\beta}^2]}{N}$	1332	833	782	693	647	569	269
m_{β}	$\pm 36''$	29''	28''	26''	25''	24''	16''

Iz tablice se vidi da greške prelomnih i veznih uglova, kada se ove računaju iz odstupanja f_{β} zavise od broja uglova u vlaku. One se smanjuju kada se broj uglova povećava.

Od interesa je ustanoviti stepen konstatovane zavisnosti odnosno potražiti matematički izraz kojim bi se ova zavisnost definisala. Poznato je da kada imamo dva niza pojava i kada je potrebno ustanoviti da li su pojave jednog i drugog niza u međusobnoj vezi, onda se to može ustanoviti pomoću korelacije.

Svi podaci potrebni za određivanje tražene zavisnosti po metodi korelacije uneti su u tablicu 2; u istoj tablici izvršena su i sva potrebna računanja. Matematička zavisnost između broja uglova u vlaku (n) i veličine srednje greške (m) definisana je formulom koja je u tablici 2 uokvirena. Teoretske vrednosti srednjih grešaka sračunate po ovoj formuli upisane su u 10. stubac. Razlike v između stvarnih i teoretskih

vrednosti srednjih grešaka sračunate su u 11. stupcu. Najveća je razlika 2",9. Srednja μ teoretskih vrednosti je $\pm 2",1$.

U vezi sa primenom metode korelacije treba skrenuti pažnju na brojnu vrednost koeficijenta korelacije r . Veličina ovog koeficijenta karakteriše stepen povezanosti između nizova veličina za čiju se međusobnu zavisnost traži matematički izraz. Ako je r jednak nuli, onda veza uopšte ne postoji. Ukoliko je r , po apsolutnoj veličini, bliži jedinici utoliko su čvršće opažane pojave odnosno nizovi veličina međusobno povezani. U konkretnom slučaju r je 0,94, te prema tome između broja uglova u vlaku (n) i srednje greške (m) postoji čvrsta veza.

Mada su razlike između stvarnih grešaka i njihovih teoretskih vrednosti sračunatih po prednjoj formuli relativno male ipak se ona ne može prihvatiti i to iz više razloga.

1. Pri računanju grešaka, čije su brojne vrednosti navedene u tablici 1, nisu uzimane u obzir greške razlika direkcionih uglova početne i završne strane vlaka tj. razlika $v_z - v_p$. Međutim, ne podleže sumnji, da se procentualni uticaj ovih grešaka povećava kada se broj uglova u vlaku smanjuje. No, kada je reč o ovoj greški, onda treba imati u vidu, da je istraživanje veličine ove greške kao i veličine njenog uticaja na uglovno odstupanje $f\beta$ vrlo komplikovan zadatak. On je komplikovan stoga, što je sama greška razlike $v_z - v_p$ promenljive veličine. Može se opravdano pretpostaviti da ova greška ne samo što se menja po svojoj veličini, nego se menja u dosta širokim granicama. Očigledno je da veličina ove greške zavisi: od reda mreže kojoj odnosni poligonometrijski vlak pripada, od konfiguracije mreže, od načina njenog izravnjanja, od rednog broja strane u vlaku čiji se direkcionni ugao koristi itd.

2. Pomenute greške (reč je o greškama upisanim u tablicu 1) ne mogu se smatrati verodostojnim ne samo zato, što su odstupanja β opterećena greškama razlike $v_z - v_p$ nego još i zato što su sračunate po formuli

$$m_\beta = \pm \sqrt{\frac{[pf_\beta^2]}{N}}$$

koja neposredno proizilazi iz formule

$$f_\beta = m\sqrt{n}$$

i čiju primenu za vlakove sa malim brojem uglova mi osporavamo. Jasno je da je nelogično tvrditi da je neki zakon nepriemenljiv i tu njegovu nepriemenljivost dokazivati primenjujući taj isti zakon odnosno prednju formulu. Zato se ne može smatrati, pa i ne smatramo da su greške upisane u tablicu 1 odnosno 3. stubac tablice 2 pravilno sračunate i da su njihove brojne vrednosti pouzdane.

3. Pored navedenih razloga treba imati u vidu još i to, što su greške sračunate iz malog broja vlakova.

Ali bez obzira što je prednji postupak, po kome su određene brojne vrednosti grešaka, neispravan osnovna činjenica da se greške m kao funkcije uglovnih odstupanja $f\beta$ smanjuju kada se

Tablica 2

Grupa	Broj uglova n	Brednja u vlaknima n	$\frac{\delta n}{n} = \frac{[n]}{7}$	$\frac{\delta m}{m} = \frac{[m]}{7}$	$\delta n \cdot \delta m$	$(\delta n)^2$	$(\delta m)^2$	$6 \cdot \delta n$	$m_{teor.}$	Razlike $v = m - m_{teor.}$	v^2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	3	36"	3,0	9,7	29,10	9,0	94,09	+	34",2	+	3,24
2	4	29	2,0	2,7	5,40	4,0	7,29	+	31,5	+	6,25
3	5	28	1,0	1,7	1,70	1,0	2,89	+	28,9	-	0,81
4	6	26	0,0	0,3	0,00	0,0	0,09	+	26,3	-	0,09
5	7	25	1,0	1,3	1,30	1,0	1,69	-	23,7	+	1,69
6	8	24	2,0	2,3	4,60	4,0	5,29	-	21,1	+	8,41
7	9	16	3,0	10,3	30,90	9,0	106,09	-	18,1	-	5,76
	42	184	0,0	0,1	73,00	28,0	217,43				26,25
	6,0	26,3									

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{[(\delta n)^2]}{G}} = \sqrt{\frac{28 \cdot 0}{7}} = 2,0$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{[(\delta m)^2]}{G}} = \sqrt{\frac{217,43}{7}} = 5,57$$

$$r = \frac{[\delta n \cdot \delta m]}{G \cdot \sigma_n \cdot \sigma_m} = \frac{-73,00}{7 \cdot 2,00 \cdot 5,57} = -0,94$$

G je broj grupa

$$6 = r \frac{\sigma_m}{\sigma_n} = -0,94 \cdot \frac{5,57}{2,00} = -2,26$$

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{G-1}} = \pm \sqrt{\frac{26,25}{7-1}} = \pm 2,1$$

$$m''_{teor} = \frac{[m]}{G} + 6 \left(n - \frac{[n]}{G} \right) = 26,3 - 2,62(n - 6,0)$$

..... (10)

broj uglova u vlaku povećava, ostaje na snazi. Prednja računanja grešaka m^{β} kao i primenu teorije korelacije treba smatrati samo kao ilustraciju pomenutog činjeničnog stanja.

Smatramo da je teško obrazložiti i opravdati postavljanje takvog zadatka koji se obično postavlja pri određivanju dozvoljenih uglovnih odstupanja u poligonometrijskoj mreži i koji se sastoji u istraživanju jedne univerzalne formule po kojoj bi se određivala ova odstupanja u svim vlakovima počev od vlaka sa tri ugla.

Naše je mišljenje da pri određivanju dozvoljenih uglovnih odstupanja treba poći drugim putem. Treba prikupiti podatke iz merenja u poligonometrijskim mrežama i onda podeliti vlakove u grupe po broju uglova u vlaku. Pri ovom deljenju glavne vlakove treba odvojiti od sporednih, a u gradskim mrežama treba posebno deliti vlakove mreže 1. reda, posebno — 2. reda itd.

Takvim postupkom zadatak se sužava na proučavanje odstupanja f_{β} u granicama samo jedne grupe i na istraživanje dozvoljenog odstupanja za odnosnu grupu. Tako određena odstupanja treba srediti u tablicu iz koji će se ova i uzimati kod praktičnih radova. Mislimo da ima razloga verovati, da će odstupanja nađena po takvom postupku bolje odgovarati rezultatima merenja, nego što je to dosada bio slučaj.

Sličnim putem, primenjujući metode matematičke statistike, pošla je Savezna geodetska uprava pri određivanju dozvoljenih odstupanja u linijskoj mreži Beograda. Odstupanja su određena i prema dosadašnjim rezultatima njihove primene može se smatrati da su realna.

2. LINEARNA MERENJA

Razmotrićemo greške koje se javljaju pri merenju dužine pantljkikom pruženom po terenu.

1. Greška komparisanja pantljike. Dužina pantljike određena komparisanjem nije tačna. Greška ove dužine je posledica: netačnosti dužine samog komparatora i grešaka koje se javljaju pri upoređenju dužine pantljike sa dužinom komparatora. Pošto dužina pantljike nađena komparisanjem može biti i veća i manja od njene stvarne dužine, to i rezultat merenja odnosnom pantljkikom neke strane može biti kako veći tako i manji od stvarne dužine dotične strane. Očigledno je da greška komparisanja prouzrokuje u dužinama merenih strana sistematsku grešku koja može biti ili pozitivna ili negativna. Onačavaćemo ovu grešku sa σ_1 .

2. Greške aliniranja. Uzrok ove greške je netačno polaganje pantljike duž merene strane odnosno odstupanje krajeva pantljike od prave koja spaja krajnje tačke strane. Greška je sistematska i ima određeni predznak. Zbog ove greške uvek se dobija veća dužina. Neka je σ_2 oznaka ove greške.

3. Greška mikroreljefa. Ovu grešku prouzrokuju sitne neravnine (udubljenja i ispupčenja) terena po kome je pantljika pružena. Očigledno

je da je greška sistematska i da je određenog predznaka. Ona, kao i greška aliniranja, uvek povećava merenu dužinu. Označimo je sa σ_3 .

4. Greška savijanja pantljičke. Pod ovom greškom treba razumeti grešku prouzrokovanu odstupanjem, i to u ravni terena, bilo cele pantljičke, bilo njenih delova od prave koja spaja početak i kraj pantljičke. Često na terenu, po kome je pantljička pružena, postoje izvesni objekti koji izazivaju savijanje pantljičke; na primer, ispupčen kamen, kada se meri po kaldrmi; grudve zemlje, kada se meri po oranju; sitno šiblje, kada se meri po zarašćenom terenu itd. Pojmljivo je, da je greška prouzrokovana savijanjem pantljičke sistematska greška određenog predznaka; kao i prethodne dve greške ona uvek povećava rezultat merenja. Ovu grešku označavaćemo sa σ_4 .

5. Greška svodenja na horizontat. Visinske razlike, koje se određuju radi svodenja koso merenih dužina na horizont, sadrže greške. Ove greške treba smatrati slučajnim greškama, jer određena visinska razlika može biti kako veća, tako i manja od njene stvarne vrednosti. Logično je da će i greške popravki, sračunatih za svodenje na horizont, biti slučajne greške. Ove ćemo označavati sa Δ_5 .

6. Greška temperaturne popravke. Postoje dva uzroka pojave ove greške: a) netačna vrednost temperaturnog koeficijenta, prema kome se popravka računa; b) razlika između stvarne temperature pantljičke u vremenu merenja i temperature određene i uzete za računanje popravke.

Postavlja se pitanje: da li su greške temperaturnih popravki slučajne ili sistematske? Jasno je, da prvi uzrok (netačna vrednost temperaturnog koeficijenta) povlači sistematsku grešku; drugi uzrok (pogrešno određena temperatura pantljičke) može prouzrokovati kako sistematsku, tako i slučajnu grešku, što, uglavnom, zavisi od načina određivanja temperature pantljičke. Ako se meri temperatura vazduha ili temperatura zemljišta po kome je pantljička pružena, onda ćemo imati, naročito u sunčane dane, izrazito sistematsku grešku*). Međutim, ako se temperatura pantljičke meri pomoću termometra stavljenog između parčića pantljičke koji čine svoje vrste futrolu**), onda će greška biti pretežno slu-

* U knjizi prof. A. S. Čebotareva »Geodezija« 2. deo (Geodezizdat, Moskva, 1949) čitamo: »U slučaju da je vreme suvo i oblačno, onda su leti temperature vazduha i zemljišta bliske. Međutim u sunčane dane stvar se menja. Temperatura vazduha po danu mnogo je manja od temperature zemljišta, koja opet nije ista sa temperaturom pantljičke. Pored toga suvo i vlažno zemljište različito utiču na temperaturu pantljičke. Oblak koji je naišao, kratkotrajan hladan vetar odmah menjaju temperaturu pantljičke. Ovo nije slučaj sa termometrom koji na takve promene ili uopšte ne reagira ili reagira sa zadocnjenjem od nekoliko minuta.

Najveće razlike između temperature pantljičke i vazduha odnosno zemljišta padaju na period od 8 do 15 časova.

Iz ispitivanja je konstatovano da je u sunčane dane temperatura gornjeg sloja zemljišta bila manja od temperature pantljičke za 2°, pa i za 5°; u slučaju da je zemljište pod travom, razlika se menjala i do 7°. Što se tiče temperature vazduha, to se ona kod istih opažanja, razlikovala od temperature pantljičke za 15°. Najmanja odstupanja bila su onda kada je termometar ležao ili na samoj pantljičici ili ispod pantljičke. Dosta dobre rezultate daje termometar smešten između parčića pantljičke.

** Da bi temperatura, koju pokazuje termometar, bila što bliža stvarnoj temperaturi pantljičke, potrebno je da prostor između donjeg dela termometra, u kome se nalaz živa, i parčića pantljičke bude ispunjen metalnom strugotinom.

čajnog karaktera. Razmotrićemo ovo pitanje detaljnije. Neka su

- l_0 — dužina pantljičke pri temperaturi t_0 ;
 l — dužina pantljičke pri temperaturi t ;
 α_m — srednji temperaturni koeficijent ($\alpha_m = \alpha + \beta t$)

Prema ovim oznakama za temperaturnu popravku Δl_t dobijamo izraz:

$$\Delta l_t = l - l_0 = l_0 \alpha_m (t - t_0) \quad (11)$$

Kada se ovaj izraz diferencira, biće:

$$d\Delta l_t = l_0 (t - t_0) d\alpha_m + l_0 \alpha_m \cdot dt \quad (12)$$

Prvi član desne strane ove jednačine izražava uticaj prvog uzroka (netačne vrednosti temperaturnog koeficijenta), drugi član — drugog uzroka (netačno određene temperature pantljičke).

Pretpostavimo da je:

$$l_0 = 50 \text{ m} = 50\,000 \text{ mm}; d_m = 0,000\,012; d\alpha_m = \pm 0,000\,001; t - t_0 = \pm 10^\circ; dt = \pm 2^\circ$$

Sa ovim brojnim vrednostima imamo:

$$d\Delta l_t = t\,0,50 \pm 1,2 \text{ (u milimetrima)}$$

Kao što se vidi drugi član je dvostruko veći od prvog. Mada su prednje brojne vrednosti donekle proizvoljne, ipak se može smatrati da će pod izvesnim uslovima greške temperaturnih popravki imati karakter slučajnih grešaka. Ovi uslovi su: 1. da greška temperaturnog koeficijenta nije veća od 15% one njegove vrednosti prema kojoj se računaju temperaturne popravke i 2. da se temperatura određuje pomoću termometra smeštenog između parčića pantljičke. Drugi uslov je važan stoga, što se opravdano može pretpostaviti da će u ovom slučaju razlike između stvarne temperature pantljičke i temperature pročitane na termometru biti promenljivog predznaka. Kako drugi član jednačine (12), po svojoj brojnoj vrednosti dominira iznad prvog člana, to je logično zaključiti da će, pod napred navedenim uslovima, greške temperaturnih popravki biti slučajne.

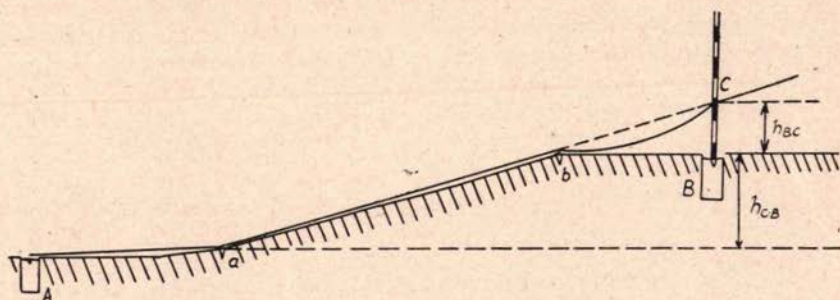
Iz prednjeg proizlazi da način određivanja temperature pantljičke uslovljava karakter greške temperaturne popravke. Neka oznake ovih grešaka, a prema načinu određivanja temperature, budu Δ_6 i σ_6 ; prva za slučajnu, a druga za sistematsku grešku.

7. Greška zatezanja. Pod ovom greškom razumemo onu koja se javlja usled nedovoljnog ili prekomernog zatezanja. Greške zatezanja, kao i greške temperaturnih popravki, mogu biti i sistematske i slučajne. Ako se zatezanje vrši tegovima, što je moguće i za pantljičku pruženu po terenu, onda će greške biti sistematske; pri zatezanju dinamometrima, što je uobičajeno, one će biti slučajne. Pošto se u našim radovima pantljičke, po pravilu zatežu dinamometrima, to ćemo greške zatezanja uvrstiti u slučajne greške i označavati ih sa Δ_7 .

8. Greška trenja o zemljište. Kada pantljiku pruženu po terenu zatežemo, onda nailazimo na otpor trenja pantljike o zemljište. Otpor trenja je različit, uglavnom, on zavisi od vrste zemljišta i njegove vlažnosti. Na peskovitom i suvom zemljištu on je mali; na glinovitom i vlažnom — veliki.

Jasno je da trenje prouzrokuje sistematsku grešku i to određenog predznaka, naime, zatežući pantljiku normalnom silom i ne uzimajući u obzir otpor trenja dobijamo povećanu dužinu merene strane. Neka je σ_8 oznaka greške trenja.

9. Greška izdizanja. Kod nas je uobičajeno da kada se teren lomi na relativno bliskom odstojanju od krajnje tačke strane, onda, da se ne bi uzimao prelom, pantljika se izdiže. Treba da izdignuti deo pantljike ima isti nagib kao i onaj koji neposredno leži na zemljištu, drugim rečima treba da tačke a, b i c (sl. 1) leže na jednoj pravoj. Da su one zaista na



Sl. 1.

pravoj ceni se od oka. Pri takvom načinu ocenjivanja greške su neminovne. Ako je pantljika izdignuta manje nego što treba, onda se čitanje na pantljici smanjuje, a ako je više, — onda se povećava. No treba imati u vidu da smanjeno izdizanje smanjuje i visinsku razliku.

$$h = h_a \cdot B + h_{B \cdot c} \quad (13)$$

Ovo znači, da će biti smanjena i apsolutna vrednost popravke za svodenje na horizontat. Pojmljivo je da smanjenje ove popravke povlači povećanje svedene dužine. Prema tome postoji izvesna kompenzacija grešaka.

Isti je slučaj i onda kada je pantljika izdignuta više nego što treba. Čitanje se, u ovom slučaju povećava, a povećava se i visinska razlika, te se povećava (po apsolutnoj vrednosti) i popravka za svodenje na horizontat, što povlači smanjenje svedene dužine.

Bez obzira na izvesnu kompenzaciju grešaka, o kojima smo govorili, izdizanje pantljike prouzrokuje sistematsku grešku određenog predznaka. Ova se javlja stoga, što deo pantljike između tačaka b i c nije prava,

nego je nesimetrična lančanica. Usled lančanice čitanje se uvek povećava. Ovu grešku označavaćemo sa σ_{10} .

10. Greška fiksacije tj. greška obeležavanja krajeva pantljičke. Pri merenju po takvom postupku kada se početak pantljičke ne obeležava, nego se obeležava samo kraj pantljičke, a početak naredne pantljičke doводи do podudaranja sa obeleženim krajem prethodne, onda se kao greška fiksacije smatra nepodudaranje početka naredne sa krajem prethodne pantljičke, mada ovo i nije sasvim pravilno.

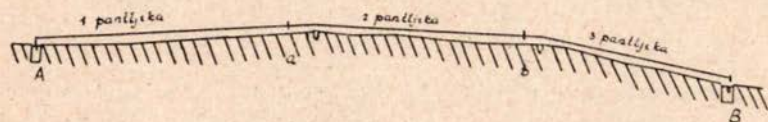
Pojmljivo je da su greške fiksacije čisto slučajne greške, te kao takve trebalo bi da rastu srazmerno drugom korenu iz broja pruženih pantljička. Neka je Δ_{10} oznaka ove greške.

U prethodnom razmatranju izostavljene su dve greške: 1) greška nameštanja nulte crtice pantljičke na početnu tačku strane i 2) greška u čitanju ostatka. Ove dve greške ne zavise od dužine merene strane i, razume se, spadaju u slučajne greške. Logično je usvojiti da su po veličini one identične sa greškama fiksacije, te prema tome možemo smatrati da su jednake Δ_{10} . Iz prednjeg proizlazi da ukupnoj greški merene dužine treba dodati konstantan član

$$c = \Delta_{10} \sqrt{2} \quad (14)$$

čija veličina zavisi od metode merenja, pribora za merenje i postupka pri merenju.

11. Greška zanemarivanja preloma. Pored navedenih izvora grešaka postoji još jedan i to dosta ozbiljan. To je zanemarivanje preloma. Zanemarivanje preloma povlači sistematsku grešku određenog predznaka koja je po svojoj prirodi, slična greški mikroreljefa. Međutim, ovu grešku treba razlikovati od greške mikroreljefa, jer se ovde ne radi o sitnim neravninama terena, nego o slabo uočljivom menjanju njegovog nagiba tj. o slučaju prikazanom na slici 2. Ako merena strana ima po-



Sl. 2.

dužni profil prema slici, onda je česta pojava da se blago menjanje nagiba terena u tačkama a i b zanemaruje. Usled zanemarivanja odnosno neuzimanja preloma dobija se povećana dužina strane. Neka je σ_{11} oznaka ove greške.

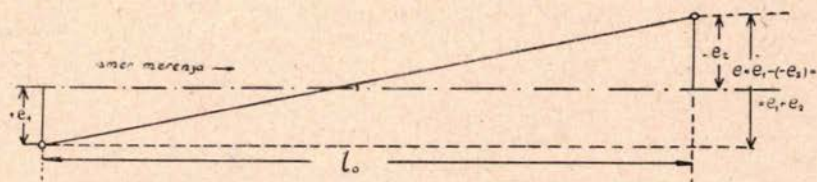
Razmotrićemo sada uticaj navedenih grešaka na rezultate merenja napred i nazad. Prema veličini njihovog uticaja na razlike »napred — nazad« možemo ih podeliti u četiri grupe.

U prvu grupu svrstaćemo one greške čiji je uticaj na rezultat merenja napred potpuno isti kao i na rezultat merenja nazad, te one u razlikama »napred-nazad« uopšte ne dolaze do svog izražaja. To su greške: 1) komparisanja pantljkice (σ_1); 2) svođenja na horizonat (Δ_5), jer jednom određena visinska razlika važi i za merenje napred i za merenje nazad; 3) zanemarivanja preloma (σ_{11}).

U drugu grupu uvrstimo one greške čiji je uticaj na rezultate merenja u jednom i drugom smeru skoro isti, te se one u razlikama »napred-nazad« gotovo i ne odražavaju. U ove greške spadaju: 1) greška aliniranja (σ_2) i 2) greška savijanja pantljkice (σ_4).

U vezi sa ovim greškama treba napomenuti da i jedna i druga deluju u istom smislu, naime povećavaju rezultat merenja i to bez obzira u kom je smeru merenje vršeno. Pored toga njihov je uticaj vrlo mali. Sračunaćemo veličine ovih grešaka, a uzimajući takve brojne podatke, da bi se sračunate greške mogle smatrati skoro maksimalnim.

Neka su e_1 i e_2 odstupanja krajeva pantljkice od prave koja se meri (sl. 3). Ako odstupanje desno od merene strane smatramo za pozitivno,



Sl. 3.

a levo za negativno i sa e označimo algebarsku razliku ovih odstupanja, onda neposredno iz slike, a po poznatoj formuli, možemo napisati

$$\Delta l_0 = l_0 - l = -\frac{e^2}{2l} \quad (15)$$

Stavimo:

$$e = 2 \text{ dm} = 0,2 \text{ m}; \quad l = 50 \text{ m}$$

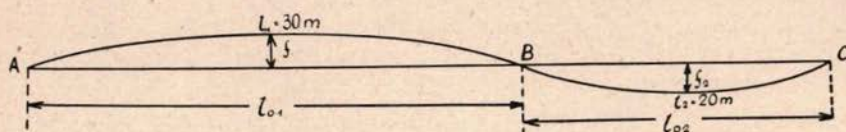
tada je

$$\Delta l_0 = -\frac{0,04}{100} = 0,0004 \text{ m} \approx 0,5 \text{ mm}$$

Što se tiče savijanja, to je njegov uticaj nešto veći, ali je ipak vrlo mali. Zaista, pretpostavimo da zategnuta pantljkica ima oblik prema slici 4 i da njeni savijeni delovi leže po kružnim lukovima. Poznato je da se razlika između dužine kružnog luka i njegove tetive određuje po formuli:

$$\Delta l_s = \text{tetiva} - \text{kružni luk} = l_0 - l = \frac{-8f^2}{3l} \quad (16)$$

gde je f strela kružnog luka tj. odstojanje između sredine tetive i luka.



Sl. 4.

Za slučaj savijanja prikazan na slici 4 imamo:

$$\Delta l_s = \Delta l_{s1} + \Delta l_{s2} = -\frac{8}{3} \left(\frac{f_1^2}{l_1} - \frac{f_2^2}{l_2} \right) \quad (17)$$

Neka su:

$$f_1 = 0,1\text{ m}; \quad f_2 = 0,05\text{ m}; \quad l_1 = 30\text{ m}; \quad l_2 = 20\text{ m};$$

Za navedene brojne vrednosti dobijamo:

$$\Delta l_{s1} = -\frac{8}{3} \cdot \frac{0,01}{30} = -0,0009\text{ m}; \quad \Delta l_{s2} = -\frac{8}{30} \cdot \frac{0,0025}{20} = -0,0003\text{ m};$$

$$\Delta l_s = -0,0012\text{ m}$$

Kao što se vidi uticaj grešaka aliniranja i savijanja zaista je vrlo mali, skoro beznačajan.

U treću grupu uključićemo greške koje se takođe malo, ali ipak u većem stepenu nego prethodne, odražavaju na razlikama »napred-nazad«. To su greške: 1) mikroreljefa (σ_3) i 2) izdizanja (σ_9). Obe ove greške deluju u istom smislu (povećavaju rezultat merenja) i zavise od terena po kome je pantljkica pružena. Kako se napred i nazad meri po istom terenu, to je i njihov uticaj na jedan i drugi rezultat skoro isti. U razlici dva merenja, s obzirom na identičnost njihovih predznaka, one se javljaju dosta smanjene prema njihovoj stvarnoj veličini.

Za četvrtu grupu preostaju četiri greške: 1) temperaturnih popravki (σ_6, Δ_6); 2) zatezanja (Δ_7); 3) trenja o zemljište (σ_8) i 4) fiksacije (Δ_{10}).

Lako je uvideti da greške pod 1), 2) i 3) dolaze do svog izražaja u razlikama »napred-nazad« onda, kada se meri pod određenim spoljnim prilikama. Zaista, da bi se greške temperaturnih popravki odrazile na pomenutim razlikama potrebno je da se merenja u suprotnim smerovima vrše pri različitim temperaturama, u protivnom one će biti skoro iste veličine i istog znaka, te se neće pojaviti u razlikama.

Greške zatezanja, možda, pod izvesnim okolnostima (što zavisi od načina zatezanja) i mogu doći do svog izražaja u razlikama, o kojima je reč, ali pri merenju na izrazito nagnutim terenima.

Takođe i greške trenja o zemljište odraziće se na razlikama onda kada se »napred« meri po suvom zemljištu a »natrag« po vlažnom ili obrnuto.

Rezimirajući prednje vidimo da se od 11 navedenih grešaka u razlikama »napred-nazad« tri greške uopšte ne dolaze do izražaja, četiri greške utiču na pomenute razlike, ali se njihov uticaj izražava veličinama koje su praktički, skoro zanemarljive, jer su, kao što smo rekli, znatno smanjene prema njihovim stvarnim vrednostima; tri greške se pojavljuju u razlikama samo pod određenim spoljnim prilikama, inače kada se u oba smera meri po ravnom, suvom, odnosno podjednako vlažnom zemljištu i pri skoro istoj temperaturi, onda je njihov uticaj vrlo mali. Ostaju greške fiksiranja odnosno obeležavanja krajeva pantljičke kojima treba pridodati kako grešku nameštenja početka pantljičke, tako i grešku čitanja ostatka (v. jedn. (14). Ove greške dolaze u razlikama, o kojima je reč, do svog izražaja, ali treba imati u vidu da su to slučajne greške, te kao takve sledeju zakonu drugog korena.

Smatramo da ta činjenica, da se većina grešaka u razlikama »napred-nazad« uopšte ne odražava i objašnjava tu veliku unutarnju tačnost koja se postizava pri pažljivom merenju pantljičkom pruženom po terenu.

Kao primer navešćemo merenja koja je vršio na poligonometrijskoj mreži 2. i 3. reda u Beogradu geometar Zoran Popadić. Njegova merenja uzimamo zato što smatramo da je kod njih postignuta skoro najveća tačnost, koja se pri merenju pantljičkom i to pruženoj po terenu može postići. Kod ovih merenja se pazilo na svaku i najmanju promenu nagiba terena; ovde su sitna ulančavanja pantljičke izbegavana podmetanjem parčića dasaka; pri čitanjima na krajevima strane pantljičke se izdizala samo onda kada je izdignuti deo bio mali, inače se uzimao prelom itd. Takav postupak, po pažljivosti izvršenja i zalaganju za postizanje što boljih rezultata nije uobičajen, te izvršiocu ovih merenja treba odati priznanje.

Rezultati merenja obavljenih po prednjem postupku, a koji se odnose na 42 strane mreže 3. reda upisani su u tablicu 3. Razlike

Δ = Merenje napred — Merenje nazad

računate su tek onda kada su dodate temperaturne popravke. Kao karakterističan primer uticaja ovih popravki na veličinu razlika Δ može se navesti strana 30318—30330, koja pripada mreži 2. reda, te u tablicu 3 nije upisana, a za koju ove razlike iznose:

- a) bez temperaturnih popravki $\Delta = + 18 \text{ mm};$
b) sa temperaturnim popravkama $\Delta = + 3 \text{ mm}.$

Srednje greške jedinice težine odnosno strane dužine 100 m sračunate su pri dnu tablice.

Na osnovu prednje analize izvora grešaka, koje se javljaju pri merenju dužina pantljičkom pruženom po terenu, kao i na osnovu rezultata praktičnih radova može se ne samo smatrati nego i tvrditi da se pri pažljivom merenju pantljičkom postiže izuzetno dobro međusobno podudaranje rezultata dvostrukih merenja. Prema tome i unutarnja tačnost, koja se ceni po razlikama »napred-nazad«, vrlo je velika.

Ali je ova visoka tačnost fiktivna. U ovom slučaju imamo tipičan primer velike razlike odnosno nesrazmere između unutarnje tačnosti, koja se ceni po međusobnom podudaranju rezultata merenja, i stvarne tačnosti. Nažalost ne raspoložemo podacima na osnovu kojih bi se stvarna tačnost mogla neposredno i ubedljivo konstatovati, jer bi toga radi trebalo iste strane izmeriti invarskim žicama ili polugama. No, pošto takva merenja nisu vršena i ne pretpostavlja se da će se vršiti, to smo prinuđeni poći, tako reći, indirektnim putem. Smatramo, da se uvid u ovu tačnost može dobiti: 1. iz podataka podužnih odstupanja u vlakovima i 2. iz upoređenja merenja pantljikom sa merenjima tahimetrima sa dvostrukim slikama.

U tablicu 4 upisani su podaci za 18 vlakova koji čine mrežu 3. reda u osnovnim poligonima br. 31 i br. 26 poligonometrijske mreže grada Beograda. Strane ovih vlakova, kao što smo videli, merene su sa relativnom greškom 1:71000. Međutim, prosečna relativna greška vlaka, sračunata pri dnu tablice 4, je 1:7267.

Po našem mišljenju sistematske greške pretstavljaju glavni uzrok nesrazmere između relativne greške strane i relativne greške vlaka.

Razmotrićemo razloge koje se u prilog takvom mišljenju mogu navesti.

1. Trigonometrijska mreža Beograda, skoro je u potpunosti oslobođena kako deformacija dužina strana prouzrokovanih projekcijom, tako i netačnosti razmere mreže, jer su koordinate svih tačaka množene modulom u tu svrhu određenim. Radi određivanja ovog modula merena je osnovica i osnovička mreža čija izlazna strana dužine 5,9 km leži u sredini gradske mreže. Množenjem pomenutim modulom svedenon je podužno linearno odstupanje u vlakovima poligonometrijske mreže 1. reda na potpuno beznačajnu veličinu, jer koeficijent λ ovog odstupanja iznosi 0,000 000 006. Pored toga, pri merenjima u poligonometrijskoj mreži, naročita je pažnja obračena na određivanje multiplikacione i adicione konstante Vildovih i Cajsovih letava. Konstante su određivane na prvoj sekciji Beogradske osnovice po postupku detaljno opisanom u doktorskoj disertaciji ing. Činklovića »Paralaktična poligonometrija kao metoda za određivanje tačaka osnovnih poligonometrijskih mreža«. (str. 55—69). Prema tome sistematske greške u poligonometrijskoj mreži Beograda treba da budu vrlo male veličine koje se mogu smatrati skoro zanemarljivim u odnosu na koeficijent $\lambda = -0,000\ 087$ (v. tablicu 4).

2. Tu činjenicu, da je relativna greška vlakova mnogo veća od relativne greške merenja strana treba smatrati potpuno prirodnom, jer sve sistematske greške, koje u razlikama dvostrukih merenja strana ne dolaze do svog izražaja, u vlakovima se pojavljuju u punom iznosu.

3. Analizirajući greške merenja pantljikom videli smo da greške aliniranja, mikroreljefa, savijanja, trenja o zemljište, izdizanje pantljike i zanemarivanja preloma povećavaju merene dužine. Zato treba očekivati da će podužna linearna odstupanja biti negativnog predznaka, jer negativna odstupanja ukazuju na činjenicu da su dužine strana učvršćene u vlakove veće od njihovih stvarnih vrednosti. Ovo se i desilo. Od 18

Broj vlaka	Dužina vlaka [d] u m	Podaci o razvučenosti vlaka		Odstupanja po koord. osovinama		$\frac{x_{i-1} + x_i}{2} + \frac{\lambda}{2}$	Linearna odstupanja		Relativne greške vlakova $\frac{fd}{[d]}$
		L u m	[d] L	fy cm	fx cm		Podužno l mm	Poprečno q mm	
31/1	337	1.00	—	3	1	3	31	—	1:11233
31/2	440	1.05	+	1	5	5	18	—	1:8800
31/2 ^a	157	1.35	—	1	0	1	4	+	1:11600
31/7	136	1.30	—	2	0	2	12	—	1:5250
31/12	317	1.03	—	4	—	4	93	—	1:7700
31/12 ^a	88	1.33	—	1	0	1	5	—	1:6600
31/12 ^b	76	1.43	—	1	0	1	7	0	1:5300
31/31	268	1.09	—	1	4	4	36	+	1:5900
1/1	468	1.01	+	1	3	3	8	+	1:15433
20/1	231	1.00	—	2	1	2	23	+	1:11500
20/2	315	1.03	—	7	3	8	38	+	1:3813
20/3	270	1.02	+	3	2	4	35	+	1:6950
20/4	162	1.01	+	1	1	1	12	+	1:16100
20/14	129	1.00	+	1	0	1	9	—	1:12900
20/11	363	1.00	—	8	2	8	82	—	1:4525
20/16	117	1.00	—	3	0	3	27	—	1:3900
20/12	468	1.00	—	5	1	5	44	25	1:9300
51/1	289	1.00	+	0	2	2	18	—	1:1440
	4653						402		

$$L = \sqrt{[\Delta y]^2 + [\Delta x]^2}$$

Koeficijent sistematske greške: $\lambda = \frac{402}{4653000} = -0,000087$

Prosječna dužina vlaka 258 m

" " strane 97 m

" " relativna greška vlaka 1:7267

0,000089

114

86

190

130

152

189

170

65

87

262

150

62

78

221

256

108

69

0,002478

vlakova upisanih u tablicu 4 samo jedan vlak ima podužno odstupanje sa predznakom +, ostali vlakovi imaju negativna odstupanja.

Sumarni uticaj pomenutih izvora grešaka, koji se odrazio na podužnim odstupanjima, nije mali. Ovo se vidi iz veličine koeficijenta sistematske greške ($\lambda = 0,000\ 087$).

4. Ako u vlakovima, kod kojih su dužine strana merene pantljikom, zaista dominiraju sistematske greške, onda će njihovo preovlađivanje iznad slučajnih imati tu posledicu što će podužne greške rasti linearno. U ovom slučaju je opravdano, da se rezultati merenja obrade po metodi korelacije. Radi ove obrade vlakovi su podeljeni u četiri grupe, a prema njihovim dužinama (v. tablicu 5). Svi potrebni podaci upisani su u pomenutu tablicu. Koeficijent korelacije r , sračunat u donjem delu tablice, skoro je jednak jedinici (0,99). Prema tome između dužine vlaka i podužnog odstupanja postoji čvrsta povezanost. Ovo se potvrđuje i vrlo dobrim slaganjem između teoretskih i stvarnih vrednosti podužnih odstupanja. Zato smatramo da se ova odstupanja, verovatno sa izvesnim uspehom, mogu računati po formulama tipa

$$l = a + \delta (L - K) \quad (18)$$

a pod pretpostavkom da su strane merene pantljikom pruženom po terenu.

No, pojmljivo je, da se na osnovu rezultata dobijenih iz svega 16 vlakova (dva su vlaka, čije su dužine veće od 450 m, izostavljena) ne mogu donositi zaključci. Ove rezultate treba smatrati samo kao obrazloženje jednog predloga, da se navedeni način određivanja podužnih linearnih odstupanja ispita, jer, po našem mišljenju, zaslužuje pažnju. Drugim rečima zaslužuje pažnju predlog da se pri određivanju normi tačnosti u poligonometrijskim mrežama koristi teorija korelacije, pošto je, kao što je napred rečeno, njeno korišćenje opravdano kada se radi o greškama čiji uticaj raste linearno.

U napred pomenutoj doktorskoj disertaciji ing. Činklovića obrađena su, pored paralaktične poligonometrije i ispitivanja tahimetra sa dvostrukim slikama (Redta-002, Kern DK.RT u Wild-RDH). Ne ulazeći u I deo ovih ispitivanja koja su vršena na specijalno izabranoj osnovici u svrhu određivanja kako grešaka koje potiču od operatora, tako i grešaka koje potiču od instrumenta, zadržaćemo se na II delu ispitivanja koja se odnose na merenja vršena radi ocene tačnosti koja se pri upotrebi ovih pribora može postići. Merenja, o kojima je reč, vršena su: a) na vlakovima poligonometrijske mreže 1. reda br. 26, 39, 40, 48, 51 i 54, čija je ukupna dužina 4388 m, i kod kojih prosečna relativna greška, sračunata iz podataka izravnjanja mreže, iznosi 1:42 000; b) na prvoj sekciji Beogradske osnovice merene invarskim žicama; ovde su mereni otsecci od 48, 72, 96 i 120 m.

Smatrajući greške u dužinama navedenih vlakova i otsečaka osnovice zanemarljivim, po upoređenju sa greškom merenja tahimetrima, sračunate su prosečne greške sa kojima su vlakovi i otsecci izmereni. Ove greške iznose:

Tablica 5

Grupa	Broj vlakova u grupi	Dužine vlakova uvršćenih u grupu	Prosečna dužina vlakova	Prosečno podužno odstupanje	$\delta L = L - \frac{[L]}{4}$	$\delta l = l - \frac{[l]}{4}$	$\delta L \cdot \delta$	$(\delta L)^2$	$(\delta l)^2$	$b \cdot \delta L$	l teor	Razlika $v = l - l_{teor}$	v^2
	n	od do	$L = \frac{[L]}{n}$	$l = \frac{[l]}{n}$	+	+	+			+		+	
1	6	51 — 150	105	11	— 149	— 18	2682	22701	324	— 19	10	1	1
2	3	151 — 250	209	23	— 45	— 6	270	2725	36	— 6	23	0	0
3	5	251 — 350	301	32	+	+	141	2209	8	+	35	3	9
4	2	301 — 450	401	50	+	+	3087	21609	441	+	48	2	4
		$\frac{[L]}{G}$	1015	116	0	0	6180	48044	810			0	14
			254	29			1545						

$$\sigma L = \sqrt{\frac{[(\delta L)^2]}{G}} = \sqrt{\frac{48044}{4}} = 109,6; \quad \sigma l = \sqrt{\frac{[(\delta l)^2]}{G}} = \sqrt{\frac{810}{4}} = 14,2$$

$$r = G \cdot \sigma L \cdot \sigma l = 4 \cdot 1456 = + 0,99; \quad b = r \frac{\sigma l}{\sigma L} = 0,99 \frac{14,2}{109,6} = + 0,128$$

$$\mu = \sqrt{\frac{[v^2]}{G-1}} = \sqrt{\frac{14}{4-1}} = + 2,2 \text{ mm}$$

$$l_{teor} = \frac{[l]}{G} + b \left(L - \frac{[L]}{G} \right) = 29 + 0,128(L - 254) \dots (19)$$

- a) za merenja pod povoljnim prilikama 1:19600
- b) za merenja pod lošim prilikama 1:5100
- c) prosečno za merenja pod povoljnim i lošim prilikama 1:11000.

Pored toga priborom »Redta« izmerene su strane u 19 vlakova mreže 3. reda u jednom poligonu poligonometrijske mreže Beograda. Prosečna relativna greška sračunata za ove vlakove (prosečna dužina vlaka 153 m, a prosečna dužina strane 81 m) iznosi 1:8000.

Iz navedenih brojnih podataka nameće se zaključak da se pri merenju, i to izuzetno pažljivom, pantljikom pruženom po terenu postiže ista tačnost kao i pri merenju tahimetrom tipa »Redta«.

Pretpostavljamo, da će većina izvršioca radova sumnjati u verodostojnost takvog zaključka, jer ta činjenica da se pri merenju pantljikom postiže izuzetno dobra podudarnost dvostrukih merenja (pošto niz grešaka ne dolazi do svog izražaja) utiče na izvršioca i stvara kod njega ubedenje da rezultati direktnih merenja pantljikom moraju biti tačniji od indirektnih merenja tahimetrom.

Istina je da su obrađeni podaci i navedeni rezultati malobrojni i da su potrebna dalja ispitivanja, ali je naše mišljenje da kod premera, kod kojih se od poligonometrijske mreže zahteva veća tačnost, merenje strana pantljikom treba zameniti drugom savršenijom metodom. Paralaktična poligonometrija je jedna od takvih metoda. Pri određivanju dužina strana merenjem paralaktičnih uglova postiže se mnogo manja unutarnja tačnost (1:18 000—1:40 000), ali se ona i vrlo malo smanjuje kada se merene dužine uvršćuju u vlakove. Ovo se objašnjava time, što se sistemske greške u dužinama strana, kada se ove određuju merenjem paralaktičnih uglova, mogu svesti na vrlo male veličine, što nije slučaj sa dužinama merenim pantljikom.

Smatramo da tačnost koja je postignuta pri premeru Pančeva (1:18 600), Sr. Karlovaca (1:12 800), Bečeja (1:14 800), Rume (1:18 200), Sr. Mitrovice (1:17 500), Vršca (1:18 900), Sente (1:15 500), Beograda (1:33 000) i Skoplja (1:26 400)* gde su osnovne mreže merene po metodi paralaktične poligonometrije, ne bi se mogla postići ako bi se strane merile pantljikom pruženom po terenu.

* U zagradama su navedene prosečne relativne greške poligonometrijskih mreža 1. reda u odnosnim gradovima. Greška navedena za Skoplje se odnosi samo na mrežu merenu 1959 godine.