Dr. inž. STJEPAN KLAK — Zagreb

FORMULE ZA RAČUNANJE UTJECAJA VISINA STAJALIŠTA NA MJERENE VRIJEDNOSTI UBRZANJA SILE TEŽE

Mjerenjem ubrzanja sile teže na fizičkoj površini Zemlje dobivamo vrijednosti koje moramo korigirati — već prema svrsi — određenim popravkama da dobijemo vrijednosti neovisne o stanovitim utjecajima, kao na primjer: utjecaju reljefa, ploče itd. Jedna od takovih je popravka uslijed nadmorske visine, odnosno popravka slobodnog zraka. Prema tome zadatak se sastoji u tome što treba korigirati mjerenu vrijednost ubrzanja sile teže na nadmorskoj visini H tako, da se dobije njena vrijednost na nivo plohi mora. Formule za te popravke ćemo izvesti na približan i točan način.

a) Približnu formulu za vrijednost redukcije ćemo dobiti jednostavnim geometrijskim razmatranjem, aproksimirajući Zemlju kuglom, zanemarujući utjecaj centrifugalne sile i masa između točke opažanja i nulte nivo plohe mora.

Vrijednost ubrzanja sile teže na nivo plohi mora računamo po poznatoj forumli:

$$g_o = k \cdot \frac{M}{R^2} \quad ,$$

a vrijednost ubrzanja sile teže na nekoj točki visine H:

$$g = k \cdot \frac{M}{/R + H/^2}$$

U tim formulama označuje k . . . konstantu gravitacije, M . . . masu Zemlje, R . . . polumjer Zemlje i H . . . nadmorsku visinu tačke opažanja. Razlikom tih dviju formula dobit ćemo:

$$\Delta g = g_o - g = \frac{k \cdot M}{R^2} \left[1 - \left(1 + \frac{H}{R} \right)^{-2} \right]$$

$$\Delta g = \frac{kM}{R^2} \left[2\frac{H}{R} - 3\left(\frac{H}{R}\right)^2 \right] = g_o \left[2\frac{H}{R} - 3\left(\frac{H}{R}\right)^2 \right] \tag{1}$$

Vrijednost g_0 ćemo izračunati po internacionalnoj formuli za ubrzavanje sile teže, [3] str. 394.

$$g_{\circ} = 978.049\ (1 + 0.0052884\ \sin^2\varphi - 0.0000059\ \sin^2 2\varphi) \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (2)$$

Za geografsku širinu $\varphi = 43^0 45'$ izračunamo g_0, srednji polumjer Zemlje R i uvrstimo u formulu (1), koja će tada glasiti:

$$\Delta g = 0{,}000\,3075\,H - 0{,}000\,072 \left(\frac{H}{1000}\right)^2 \qquad (3)$$

(U toj formuli je H izraženo u metrima, a Δg u galima).

Kao što se vidi iz formule (3) drugi član je veoma malen, pa se može gotovo uvijek zanemariti, a prvi član nam tada daje promjenu ubrzanja sile teže s visinom.

b) Točnu formulu za redukciju ćemo izvesti pomoću teorije potencijala. Iz Poissonove jednadžbe, [1] str. 40,

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 2\omega^2$$

slijedi:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 2\omega^2 - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) \qquad (4)$$

U toj formuli označuje: W ... potencijal sile privlačenja i centrifugalne sile, ω ... brzinu rotacije Zemlje x, y, z ... koordinatne osi i tsg .. ubrzanje sile teže. Budući da je $\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \frac{\partial g}{\partial z}$ to je za poznavanje tog diferencijalnog kvocijenta, potrebno u formuli (4) izračunati:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \ \text{i} \ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$$

Iz poznate definicije potencijala

$$W\ (x, y, z) = C$$

dobivamo, derivirajući ga kao implicitnu funkciju:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial W}{\partial x}}{\frac{\partial W}{\partial z}} \quad \text{i} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial W}{\partial y}}{\frac{\partial W}{\partial z}} \qquad (5)$$

Pretpostavljajući da se os z poklapa sa smjerom ubrzanja sile teže g, u povoljnoj tački T, dobivamo po pravilima o rastavljanju sila na komponente u smjeru koordinatnih osi:

$$g = \frac{\partial W}{\partial z} \qquad g_x = \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \qquad g_y = \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \qquad (6)$$

Uspoređujući formule (5) i (6) vidimo da je i:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = o \quad i \quad \frac{\partial z}{\partial y} = o$$

Dakle, druge derivacije izraza (5) će prema tome biti:

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad i \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \tag{7}$$

Druge parcijalne derivacije r i t ćemo izraziti pomoću formula diferencijalne geometrije, [1] str. 44, kao funkcije zakrivljenosti glavnih normalnih presjeka.

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{2(rt - s^2)}{r + t - \sqrt{(r-t)^2 + 4s^2}}; \quad \frac{1}{\varrho_2} = \frac{2(rt - s^2)}{r + t + \sqrt{(r-t)^2 + 4s^2}}$$

a kut što ga zatvara jedna od glavnih normalnih ravnina s ravninom $\times 2$ je izražen formulom:

$$\mathrm{tg}\ 2\lambda = \frac{2s}{r - t}$$

Ukoliko se ravnina xz poklapa s ravninom meridijana, $\lambda = 0^0$, druga će se normalna ravnina poklapati s ravninom prvog vertikala, pa ćemo iz gornjih formula dobiti:

$$s = o, \qquad \frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{M} = r, \qquad \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{N} = t,$$

gdje su M i N polumjeri zakrivljenosti u meridijanu odnosno prvom vertikalu. Uvrštavajući dobivene vrijednosti u jednadžbu (7) odnosno (4) dobivamo:

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 2\omega^2 + g\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right) \tag{8}$$

Koristeći poznate formule za M i N, prema [2] strana 247, dobit ćemo za:

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{N} + \frac{\sqrt{1 + e'^2 \cos^2\varphi}}{c}(2 + e'^2 \cos^2\varphi) \tag{9}$$

gdje je: e' ... drugi ekscentricitet, a c ... polumjer zakrivljenosti meridijana na polovima.

Zanemarujući članove s četvrtom i višim potencijama ekscentriciteta e′ dobivamo iz formule (9):

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{N} = \frac{2}{c}(1 + e'^2 \cos^2\varphi) \tag{10}$$

Usvajajući za ubrzanje sile teže g vrijednost iz formule (2), a za $\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{N}\right)$ formulu (10) naša će formula (8) dobiti slijedeći oblik:

$$\frac{\partial g}{\partial z}=\frac{1956 \cdot 098}{c}\left[1+e'^2+\sin^2\varphi\,(0{,}0052884-e'^2+0{,}0052884\,e'^2)\right]+2\,\omega^2 \tag{11}$$

Kod toga su zanemareni članovi u koje ulaze faktor $\sin^2 2\omega$ radi malene vrijednosti. Koristeći numeričke podatke za elemente Hayfordovog elipsoida, prema [2] str. 243 odnosno [3] str. 302 za brzinu rotacije Zemlje, definitivno dobivamo:

$$\frac{\partial g}{\partial z}=0{,}00030878-0{,}00000043\sin^2\varphi$$

odnosno:

$$\frac{\partial g}{\partial z}=+0{,}00030857+0{,}00000021\cdot\cos(2\varphi)$$

Prema tome označivši s g_0... ubrzanje sile teže na nivo plohi mora, a s g... mjereno ubrzanje sile teže na tački s nadmorskom visinom H, definitivno dobivamo:

$$g_0=g+[0{,}00030857+0{,}00000021\cos(2\varphi)]\,H. \tag{12}$$

U ovoj formuli nedostaje član s H^2, drugi član iz formule (3), koji je ionako veoma malen.

c) Međutim, uz malo ograničenje možemo dobiti novu formulu sličnu formuli (11) na mnogo jednostavniji način. Ako u formuli (1) uvrstimo za polumjer Zemlje R poznati izraz:

$$R=\sqrt{MN}=\frac{1}{c}(1+e'^2\cos^2\varphi) \tag{13}$$

a za ubrzanje sile teže g_0 internacionalnu formulu (2) to ćemo dobiti, uz zanemarivanje člana s H^2:

$$\Delta g=\frac{1956 \cdot 098}{c}\left[1+e'^2+\sin^2\varphi\,(0{,}0052884-e'^2+0{,}0052884\,e'^2)\right]H \tag{14}$$

Dakle, razlika između formule (14) i (11) je jedino u tome što je u formuli (14) zanemarena brzina rotacije Zemlje, pa i definitivna formula, analogno formuli (12) glasi:

$$g_0=g+[0{,}00030772+0{,}000\,00021\cos(2\varphi)]\,H \tag{15}$$

Iz formule (15) vidimo da se ona razlikuje od tačne formule (12) za veoma mali iznos u drugom članu.

Analizirajući treći član formule (12) vidimo, da maksimalnu pozitivnu vrijednost poprima na ekvatoru, nula postaje na geografskoj širini

$\varphi = 45^0$, a maksimalnu negativnu vrijednost poprima na polu. Interpretirajući ukupnu popravku odnosno vertikalni gradijent ubrzanja sil teže na drugi način vidimo, da je kod iste nadmorske visine veći na ekvatoru (veće opadanje ubrzanja sile teže), a manji na polu (manje opadanje ubrzanja sile teže) makar i unutar veoma malih granica.

LITERATURA:

(1) Dr Ing. Boris Apsen: Geodetski priručnik II
(2) Dr phil. h. c. W. Jordan: Handbuch der Vermessungskunde III/1
(3) Dr phil. h. c. W. Jordan: Handbuch der Vermessungskunde III/2