Inž. ABDULAH MUMINAGIĆ — Beograd

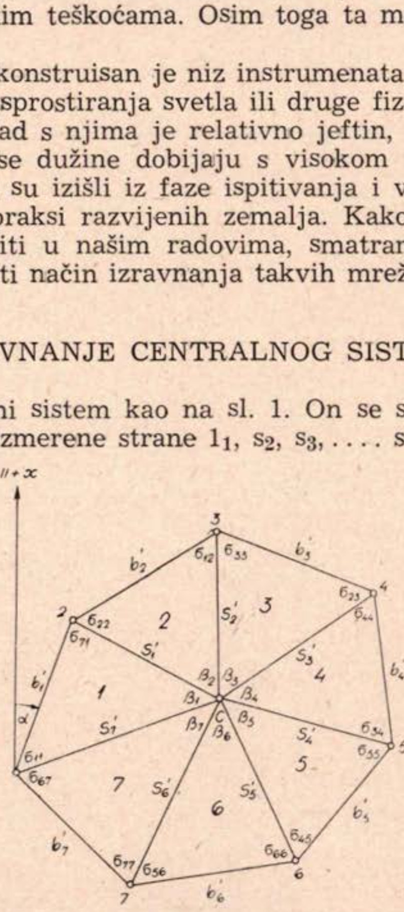
IZRAVNANJE MREŽE TROUGLOVA SA IZMERENIM STRANAMA (TRILATERACIJA)

Triangulacija, tj. mreža trouglova sa izmerenim uglovima, bila je osnovna metoda za postavljanje geodetske osnove u klasičnoj geodeziji. Merenja dužina su što je moguće više izbegavana, jer su nesavršeni instrumenti i pribori obezbeđivali malu tačnost, ili je merenje s njima bilo skopčano s velikim teškoćama. Osim toga ta merenja su bila skupa i dugotrajna.

U novije vreme konstruisan je niz instrumenata koji za merenje dužina koristi brzinu rasprostiranja svetla ili druge fizičke osobine elektromagnetskih talasa. Rad s njima je relativno jeftin, udoban i brz. Što je najvažnije, s njima se dužine dobijaju s visokom relativnom tačnošću. Zbog tih osobina oni su izišli iz faze ispitivanja i već se široko primjenjuju u geodetskoj praksi razvijenih zemalja. Kako smo na putu da ih i mi počnemo koristiti u našim radovima, smatramo d aje neophodno bar ukratko razmotriti način izravnanja takvih mreža.

IZRAVNANJE CENTRALNOG SISTEMA

Uzmimo centralni sistem kao na sl. 1. On se sastoji od sedam trouglova u kojima su izmerene strane l_1, s_2, s_3, ... s_7, b_1, b_2, ..., b_7. Na



Sl. 1. — Metoda posrednih mjerenja

neki način su poznate koordinate jedne tačke, na pr. 1, i azimut sa te tačke na 2 —α. Traži se da se sračunaju izravnate vrednosti koordinata tačaka 2, 3, 4, 5, 6, 7 i C. Ovaj zadatak može se rešiti i po metodi posrednih i po metodi uslovnih merenja. Kada će se koja metoda primeniti zavisi od količine računskog posla koju svaka od tih metoda iziskuje.

Ukupan broj jednačina odstupanja koji se u ovoj mreži može postaviti je

$$N = n - d \tag{1}$$

gde je: n — broj svih strana trilateracije
d — broj strana između datih tačaka.

U našem slučaju na slici d = 0, pa je

$$N = n = 14.$$

Po formuli

$$\cos\sigma_i = \frac{-s'^2_i + b'^2_i + s'^2_{i}}{2\, b'_i\, s'_{i-1}} \quad ^{1)} \tag{2}$$

mogu se sračunati svi uglovi β i σ, pa po poznatoj metodi poligona, počev od tačke 1, sračunati približne koordinate svih tačaka 2 — 7 i C. Obeležimo sa:

s'_i i b'_i — izmerene strane u trouglovima.
s_i i b_i — rastojanja između susednih tačaka, sračunata iz približnih koordinata.
v_i — popravka izmerene dužine, dobijena iz izravnanja.

Između strana i koordinata postoji poznati odnos

$$s_i^2 = (x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2, \tag{3}$$

gde su k i k+1 brojevi tačaka između kojih se nalazi strana s_i.

Kad ovaj izraz diferenciramo, dobićemo

$$ds_i = \frac{(x_{k+1} - x_k)}{s_i} dx_{k+1} - \frac{(x_{k+1} - x_k)}{s_i} dx_k + \frac{(y_{k+1} - y_k)}{s_i} dy_{k+1} - \frac{(y_{k+1} - y_k)}{s_i} dy_k$$

ili

$$ds_i = \cos \alpha_k^{k+1}\, dx_{k+1} - \cos \alpha_k^{k+1}\, dx_k + \sin \alpha_k^{k+1}\, dy_{k+1} - \sin \alpha_k^{k+1}\, dy_k \tag{4}$$

S druge strane, na osnovu gornjih oznaka, imaćemo:

$$ds_i = s'_i + v_i - s_i\,. \tag{5}$$

---

[1] Na sl. 1 uglovi σ imaju dve cifre u indeksu. Prva od njih označava stranu prema kojoj se ugao nalazi (to odgovara broju i u (2), a druga — broj trougla.

Kad izjednačimo formule (4) i (5) biće:

$$v_i = \cos\alpha_k^{k+1}\, dx_{k+1} - \cos\alpha_k^{k+1}\, dx_k + \sin\alpha_k^{k+1}\, dy_{k+1} -$$

$$- \sin\alpha_k^{k+1}\, dy_k + l, \tag{6}$$

gde je

$$l = s_i - s'_i. \tag{7}$$

Sastavićemo n ovakvih jednačina i rešiti pod uslovom [vv] = min. U rezultatu se dobiju popravke dx i dy koordinata svake tačke. Kad se ove popravke dodaju ranije sračunatim približnim vrednostima, dobiju se **izravnate koordinate svake tačke.**

Napomena 1

Ako je u mreži dato više tačaka, onda se dužine između susednih datih tačaka neće menjati, pa za njih otpadaju jednačine (6); te jednačine pak za stranu između date i tražene tačke izgledaće ovako (smatrajući da je tačka k + 1 tražena, a k — data):

$$v_i = \cos\alpha_k^{k+1}\, dx_{k+1} + \sin\alpha_k^{k+1}\, dy_{k+1} + l. \tag{8}$$

Postupak je dakle ovakav:

1. Pomoću mašine i tablica sračunavaju se uglovi.
2. U trig. obrascu br. 19 sračunaju se približne koordinate tačaka.
3. Koristeći i podatke iz obrasca br. 19, nađu se potrebne veličine sin α i cos α i formiraju jednačine odstupanja (6),
4. Formiraju se normalne jednačine.
5. Reše se normalne jednačine.
6. Odrede definitivne koordinate tačaka.

Ocena tačnosti vrši se koristeći ista rasuđivanja kao i kod triangulacije.

Napomena 2

Razumljivo je da će l za one strane po kojima su računate približne koordinate biti jednako nuli.

Napomena 3

Ova metoda može se koristiti za strogo izravnanje koordinata čvornih tačaka u poligonometriji. U tom slučaju je:

s' — dužina strane između susednih tačaka sračunata iz koordinatnih razlika:

$$s' = \sqrt{(\sum_1^n \Delta y')^2 + (\sum_1^n \Delta x')^2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\Sigma \Delta y'}{\Sigma \Delta x'}, \tag{9}$$

$$s' = \frac{\Sigma \Delta x'}{\cos \alpha'} = \frac{\Sigma \Delta y'}{\sin \alpha'},$$

s — strana sračunata iz približnih koordinata po (3).

U gornjim formulama $\Delta y'$ i $\Delta x'$ su koordinatne razlike **pojedinih strana** u vlaku sračunate do izravnanja, a x i y u (3) su približne koordinate čvornih tačaka.

$$1 = s' - s.$$

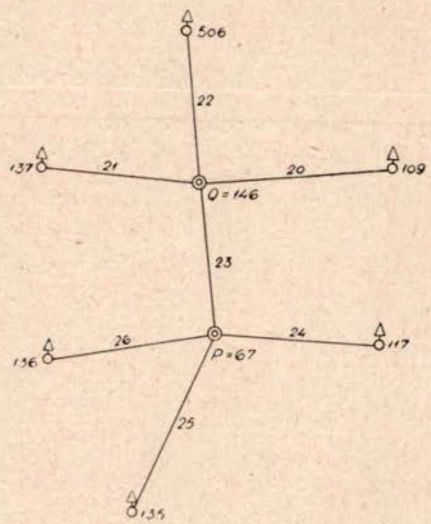
Brojni primer. Nažalost nemamo primera sa izmerenim stranama triangulacije. Zbog toga ćemo uzeti izravnanje dve čvorne tačke iz Pravilnika za državni premer II i III deo, str. 259.

Date su koordinate tačaka:

tačka	y	x
109	59 683,13	55 825,22
137	58 686,68	55 269,87
506	58 955,28	56 281,98
117	60 143,69	54 270,01
135	59 208,20	54 733,87
67 (pribl.)	59 704,36	54 948,83
146 (pribl.)	59 345,43	55 560,45

Sume koordinatnih razlika su:

Između tačaka	$\Sigma\Delta y'$	$\Sigma\Delta x'$
109 — 146	— 337,74	— 264,73
137 — 146	+ 658,81	+ 290,53
506 — 146	+ 390,15	— 721,53
117 — 67	— 439,33	+ 1,08
135 — 67	+ 29,31	+ 678,75
136 — 67	+ 496,27	+ 215,07
67 — 146	— 359,05	+ 611,68



Sl. 2

Ovde su koordinatne razlike sračunate po uobičajenom postupku za računanje dve čvorne tačke. Razumljivo je da ceo postupak izravnanja ne zavisi od metode računanja približnih koordinata. Te koordinate bi se npr. mogle sračunati po vlakovima 137 — 109, ili 136 — 117, itd.

Iz ovih podataka, po formuli (9) sračunato je:

Između tačaka	s s'	l	cos α	sin α
109—146	429;12 429,13	—0,01	—0,61 690	—0,78 704
137—146	719,99 720,03	—0.04	+0,40 350	+0,91 498
506—146	820,26 820,26	0,00	—0,87 964	+0.47 564
117 — 67	439,33 439,33	0,00	+ 0,00 246	— 1,00 000
135 — 67	679.45 679,38	+ 0,07	+ 0,99 907	+ 0,04 341
136 — 67	540,72 540,87	— 0,15	+ 0,39 764	+ 0,91 754
67 — 146	709,16 709,27	— 0,11	+ 0,86 240	— 0,50 622

Sa ovim podatcima jednačine popravaka će biti:

$$
\begin{array}{rrrrr}
-0{,}6169\,dx_Q - 0{,}7870\,dy_Q & & & -0{,}01 = & v_{109-Q} \\
+0{,}4035\,dx_Q + 0{,}9150\,dy_Q & & & -0{,}04 = & v_{148-Q} \\
-0{,}8796\,dx_Q + 0{,}4756\,dy_Q & & & 0{,}00 = & v_{506-Q} \\
- \quad - & +0{,}0025\,dx_P & -1{,}0000\,dy_P & +0{,}00 = & v_{117-P} \\
- \quad - & +0{,}9991\,dx_P & +0{,}0431\,dy_P & +0{,}07 = & v_{135-P} \\
- \quad - & +0{,}3976\,dx_P & +0{,}5062\,dy_P & -0{,}15 = & v_{136-P} \\
+0{,}8624\,dx_Q - 0{,}5062\,dy_Q & -0{,}8624\,dx_P & +0{,}5062\,dy_P & -0{,}11 = & v_{P-Q}
\end{array}
$$

Odakle dobijemo sledeće normalne jednačine:

$$
\begin{array}{rrrrr}
2{,}0608\,dx_Q - 0{,}0002\,dy_Q & -0{,}7437\,dx_P & +0{,}4365\,dy_P & -0{,}1048 = 0 \\
1{,}9390\,dy_Q & +0{,}4365\,dx_P & -0{,}2562\,dy_P & +0{,}0270 = 0 \\
 & 1{,}9000\,dx_P & -0{,}0312\,dy_P & +0{,}1052 = 0 \\
 & & 2{,}0999\,dy_P & -0{,}1903 = 0
\end{array}
$$

U rezultatu njihova rešenja dobije se:

$$
\begin{aligned}
dx_{146} &= +\,0{,}01 \text{ cm} \\
dy_{146} &= +\,0{,}01 \text{ cm} \\
dx_{67} &= -\,0{,}05 \text{ cm} \\
dx_{67} &= +\,0{,}09 \text{ cm}
\end{aligned}
$$

Ili izravnate koordinate:

	Po ovom izravnanju I	Po Pravilniku II	I—II
y_{146}	= 59 345,43 + 0,01 = 59 345,44	59 345,42	+0,02
x_{146}	= 55 560,45 + 0,01 = 55 560,46	55 560,46	0,00
y_{67}	= 59 704,36 — 0,05 = 59 704,31	59 704,41	—0,10
x_{67}	= 54 948,83 + 0,08 = 54 948,91	54 948,84	+0,07

Kod ovog računanja trebalo je uzeti u obzir i težine strana, koje su iste kao težine vlakova kod uobičajenog izravnanja. To nije urađeno jer je cilj jedino pokazati metodu rada. Kod računanja prave trilateracije težine se općenito ne uzimaju, ako su merenja izvršena sa istom tačnošću, što je najčešći slučaj.

Na ovaj način se osobito vrši izravnanje više čvornih tačaka odjednom.

Metoda uslovnih opažanja.

Ako u mreži ima više datih tačaka, onda se kod trilateracije broj uslovnih jednačina određuje po formuli:

$$U = n - 2P \tag{10}$$

gde je: n — ukupan broj izmerenih linija,
P — broj tačaka koje treba odrediti.

U slobodnoj mreži međusobni položaj prve dve tačke dat jednoznačno izmerenom dužinom između njih, pa je broj tačaka koje treba odrediti

$$P' = P - 2,$$
$$n' = n - 1$$

pa će se broj uslova računati po formuli:

$$U' = (n - 1) - 2 (P - 2). \tag{10'}$$

Napr. na sl. 1 imamo vid slobodne mreže. Broj uslova je:

$$n = 14,\ P = 8$$
$$U' = (14-1) - 2 (8-2) = 1$$

To proizlazi iz opšte poznatog pravila da svako »suvišno« merenje daje jedan uslov. Uzmimo da je polazna strana b'_1 između tačaka 1 i 2. Tačka C određuje se jednoznačno stranama s'_1 i s'_7; tačka 3 stranama b'_2 i s'_2; tačka 4 — sa b'_3 i s'_3; 5 — sa b'_4 i s'_4; 6 — sa b'_5 i s'_5; 7 — sa b'_6 i s'_6. Ostaje kao suvišno merenje jedino strana b'_7. Znači, u figuri na sl. 1 može se sastaviti samo jedan uslov.

Ima više načina za sastavljanje ovog uslova. Koristi se uslov jednakih površina-, ili njegova modifikacija — uslov dijagonala. Nama je, kao analogija triangulaciji najbliži tzv. uslov horizonta, pa ćemo njega i izložiti. Sastoji se u sledećem:

Iz svakog trougla po nekoj od formula računaju se uglovi. Neka to bude po kosinusnoj formuli.

$$\cos \beta_1 = \frac{-b'^2_1 + s'^2_7 + s'^2_1}{2s'_7\, s'_1}, \tag{11}$$

ili općenito

$$\cos \beta_i = \frac{-b'^2_i + s'^2_{i+1} + s'^2_i}{2s'_{i-1}\, s'_i}. \tag{12}$$

Zatim se postavi uslov horizonta:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + {}_6 + \beta_7 - 2\pi = 0. \tag{13}$$

Ovaj uslov, razumljivo, neće biti zadovoljen, nego će se pojaviti odstupanje:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \beta_i - 2\pi = w \tag{14}$$

Ako uglovima β_i dodamo popravke $d\beta_i$, i to takve da uslov (13) bude zadovoljen, dobiće se popravljeni uglovi $\beta'_i = \beta_i + d\beta_i$, pa ćemo imati:

$$\sum_1^n \left(\beta_i + d\beta_i \right) - 2\pi = 0. \tag{15}$$

Kada se (14) oduzme od (15), dobiće se uslovna jednačina ovog centralnog sistema:

$$d\beta_1 + d\beta_2 + d\beta_3 + d\beta_4 + d\beta_5 + d\beta_6 + d\beta_7 + w = 0 \tag{16}$$

Ova uslovna jednačina izražena je u popravkama uglova, koje nismo merili. Da bismo ih izrazili u popravkama merenih strana, diferenciraćemo jednačinu (12) po izmerenim stranama, vodeći računa da na svaku stranu s_1 naležu dva ugla β_i i β_{i+1}, pa su po (12) oba funkcije ove strane. Ili, svaka strana trpi popravke iz oba trougla koji na nju naležu. Uzevši rečeno u obzir, formula (16) će se pisati:

$$\sum \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial s_i} + \frac{\partial \beta_{i+1}}{\partial s_i} \right) ds_i + \sum \frac{\partial \beta_i}{\partial b_i}\, db_i + w = 0 \tag{17}$$

Parcijalni izvodi formule (12) biće:

$$-\sin \beta_i \frac{\partial \beta_i}{\partial b_i} = - \frac{2 b_i}{2 s_{i-1}\, s_i},$$

odakle:

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial b_i} = \frac{b_i}{s_{i-1}\, s_i \sin\beta_i},$$

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial s_{i-1}} = \frac{-b_i^2 + s_i^2 - s^2_{i-1}}{2s^2_{i-1}\, s_i \sin\beta_i},$$

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial s_i} = \frac{-b^2_i - s^2_i + s^2_{i-1}}{2s_{i-1}\, s^2_i \sin\beta}. \tag{18}$$

Radi kratkoće obeležimo:

$$s_{i-1} s_i \sin\beta = 2p,$$

gde je p površina odgovarajućeg trougla. Onda će se (18) pisati:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \beta_i}{\partial b_i} &= \frac{b_i}{2p_i}, \\ \frac{\partial \beta_i}{\partial s_{i-1}} &= \frac{-b^2{}_i + s^2{}_i + s^2{}_i - 1}{4s_{i-1}\, p_i} \\ \frac{\partial \beta_i}{\partial s_i} &= \frac{-b^2_i - s^2_i + s'_{i-1}}{4s_i\, p_i}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \beta_i}{\partial s_i} + \frac{\partial \beta_{i+1}}{\partial s_i} &= \frac{-b^2_i - s^2_i + s^2_{i-1}}{4s_i\, p_i} + \\ + \frac{-b^2_{i+1} + s^2_{i+1} - s^2_i}{4s_i\, p_{i+1}}; &\qquad \frac{\partial \beta_i}{\partial b_i} = \frac{b_i}{2p_i}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Vrednosti u formulama (20) su koeficijenti uslovne jednačine, koje ćemo obeležiti sa a_i odnosno b_i.

Uslovna jednačina (17) će se onda prepisati:

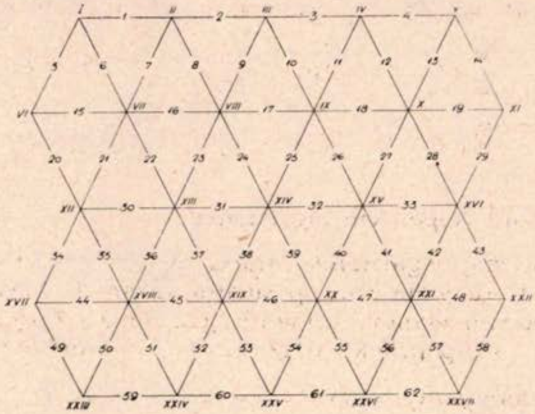
$$\begin{gathered} a_1 ds_1 + a_2 ds_2 + a_3 ds_3 + a_4 ds_4 + a_5 ds_5 + a_6 ds_6 + a_7 ds_7 \\ + b_1 db_1 + b_2 db_2 + b_3 db_3 + b_4 db_4 + b_5 db_5 + b_6 db_6 + b_7 db_7 + w = 0 \end{gathered} \tag{21}$$

Uzmimo veću mrežu (sl. 3):

Ukupan broj uslovnih jednačina tipa (21) u njoj će biti:

$$U = (62 - 1) - 2\ (27 - 2) = 11.$$

To su centralni sistemi u tačkama: VII, VIII, IX, XIII, XIV, XV, XVIII, XIX, XX, XXI. Sve ove jednačine se reše po metodi najmanjih kvadrata i kao rezultat rešenja dobiju se popravke strana.



Sl. 3.

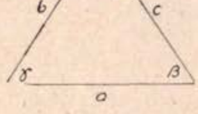
Napomena.

Napravimo upoređenje sa brojem uslovnih jednačina kod triangulacije. U triangulaciji bi ova mrežaž imala 11 samo sinusnih uslova. Tome se doda još 36 figurnih. Ukupno bi bilo 47 normalnih jednačina. Za njihovo rešenje iskusnom kalkulatoru bilo bi potrebno oko 2 meseca, dok bi takav isti stručnjak 11 jednačina rešio za dva dana. Prema tome, sa gledišta ekonomičnosti računanja, možemo tvrditi da je metoda trilateracije povoljnija od triangulacije.

IZRAVNANJE GEODETSKE MREŽE SA IZMERENIM UGLOVIMA I STRANAMA

Međunarodna geodetska i geofizička unija na svom zasedanju u Helsinkiju 1960. preporučila je da se metoda triangulacije i trilateracije kombinuju, što će dati veću elastičnost a i nezavisnu kontrolu kod razvijanja geodetskih mreža. Savetuje se također da se dopunska merenja (ispravljanje slabih mesta) u starim triangulacijama vrše merenjem strana. U tom slučaju, pored običnih uslovnih jednačina svojstvenih triangulaciji, pojavljuje se još i uslov strane u svakom trouglu.

Uzmimo trougao na sl. 4. U njemu su izmereni uglovi α, β, γ i strane a, b, c. Sinusne uslovne jednačine će se pisati:



Sl. 4

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \tag{1}$$

Logaritmirajmo i diferencirajmo ove jednačine i prevedimo ih u Brigove logaritme:

$$\begin{aligned} \lg a - \lg c + \lg \sin\gamma - \lg \sin\alpha &= 0 \\ \lg a - \lg b + \lg \sin\beta - \lg \sin\alpha &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{M}{a}(a) - \frac{M}{b}(b) + \triangle\beta(\beta) - \triangle\alpha(\alpha) + w_1 &= 0 \\ \frac{M}{a}(a) - \frac{M}{c}(c) + \triangle\gamma(\gamma) - \triangle\alpha(\alpha) + w_2 &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

gde je: M — modul Neperovih logaritama

$\Delta\alpha$ — priraštaj logaritama sinusa uglova, kada se ovi promene za 1″ (u jedinicama poslednje decimale logaritma),

w — slobodni članovi uslovnih jednačina (dobiju se po (2)), (a), (b) . . (α)-popravke odgovarajućih strana i uglova.

Obeležimo koeficijente uz popravke strana sa A, B, . . . Jednačina (3) će se onda pisati ovako:

$$\begin{aligned} A(a) - B(b) + \Delta\beta(\beta) - \Delta\alpha(\alpha) + w_1 &= 0 \\ A(a) - C(c) + \Delta\gamma(\gamma) - \Delta\alpha(\alpha) + w_2 &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Ako se popravke strana izraze u centimetrima, dužina strana u kilometrima, a računanje vrši, kao i obično, tablicama sa sedam decimala, koeficijenti A, B, . . . računaće se po formulama:

$$A = \frac{43{,}43}{a_{km}}; \qquad B = \frac{43{,}43}{b_{km}} \ldots\ldots. \tag{5}$$

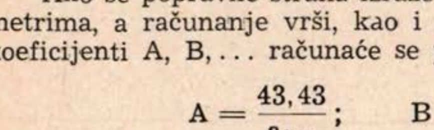
Napomena 1

Izravnanje je udobno vršiti u dve grupe. U prvu grupu se uvrštavaju figurni uslovi trouglova, a sinusni sa svim ostalim — u drugu.

Napomena 2

Ponekad, osobito kod izravnanja po lancima, mere se strane trouglova samo duž jedne strane lanca, npr. na slici levo samo strane: a_1, a_2, a_3, a_4 duž dijagonale A—B. U tom slučaju postavlja se sinusni uslov strana, tipa

$$a'_2 - a_2 = 0, \tag{5}$$



Sl. 5.

gde je

$$a'_2 = a_1 \frac{\sin\beta_1 \sin\beta_2 \sin\beta_3}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3}$$

Prema dosadašnjim ispitivanjima ovaj način je smanjio uzdužno odstupanje u lancu za 2—3 puta.