

MOGUĆNOST PRIMENE TRIGONOMETRISKOG NIVELMANA KOD TREĆEG POPUNJUJUĆEG REDA TRIANGULACIJE.

Na teritoriji naše države prvi put je primenjen trigonometrički nivelman u mreži četvrtog i petog reda u godinama 1938. i 1939. Sva ranija merenja koja su izvođena za potrebe trigonometričkog nivelmana upotrebljavana su u topografske svrhe za razne razmere.

Trigonometrički nivelman pre drugog svetskog rata izvršen je samo u nekoliko srezova Srbije i Hrvatske. I ako je triangulacija četvrtog i petog reda bila postavljena na celoj skoro teritoriji Srbije, Makedonije kao i na malom delu Hrvatske i Slovenije vertikalni uglovi odnosno zenitna rastojanja nisu se merila na tačkama četvrtog i petog reda. Odmah posle Drugog svetskog rata pristupilo se merenjima u cilju određivanja nadmorskih visina trigonometričkih tačaka četvrtog reda putem trigonometričkog nivelmana. Geodetske uprave izvode triangulaciju i trigonometrički nivelman na onim terenima gde im je momentano triangulacija najpotrebnija.

Triangulacija četvrtog i petog reda koja je postavljena pre drugog svetskog rata na nekim područjima je suviše gusta t. j. rastojanja su čak ispod jednog kilometra. Za terene iznad 1000 metara nadmorske visine mogu se odrediti oslone-vezne tačke sa 50% manje trigonometričkih tačaka četvrtog i petog reda koje su već bile postavljene. Pravilnik za triangulaciju I. deo predviđa da se na onim terenima gde se izvodi detaljni premer u krupnim razmerama 1 : 2.000, 1 : 2.500 može pogustiti sa tačkama ukoliko bude potrebno. Ovo isto može da se kaže i za treći popunjujući red triangulacije. Ako se na nekom terenu raznih kategorija izvrši triangulacija sa trećim popunjujućim redom onda može da se razvije četvrti red kome i kada bude potreban.

Imajući u vidu još i ekonomski momenat u pogledu određivanja četvrtog i trećeg popunjavajućeg reda na svim terenima odnosno kategorijama onda bi došli do zaključka da treba dobro razmisliti i planirati gde i kada ova dva reda triangulacije treba postaviti. Poznato je da četvrti i peti red triangulacije postavljen pre rata na terenima kako ravničastom tako isto postavljen je i na brdovitom i planinskom zemljištu ne vodi naročito ničemu, već su samo utrošeni veliki materijalni izdaci. Kod

nas se fotogrametrijska metoda snimanja, a naročito poslednjih godina u dovoljnoj meri razvila. Snimanjem terena iz vazduha mi danas radimo karte krupne i sitne razmere. Postavlja se onda odmah i način razvijanja triangulacije koga reda i za koje potrebe i na kome terenu. Gustina mreže odnosno broj tačaka kod trećeg popunjujućeg i četvrtog reda kreće se približno u odnosu 1 : 3 do 1 : 4.

Ako tome dodamo da je naša država prilično planinska zemlja i da u planinskim terenima nije potrebno razvijati četvrti red triangulacije izuzev nekih specifičnih područja. Cena koštanja trigonometrijske tačke četvrtog i trećeg popunjavajućeg reda kao i odnos između broja tačaka je prilično veliki.

Za izradu karte 1 : 25 000 kao i za izradu karte 1 : 10.000 dovoljno je potrebno na terenu razviti mrežu trećeg popunjujućeg reda sa manjim brojem pomoćnih tačaka da bi se odredile oslone i vezne tačke na fotografijama, a napred smo naveli da će se ove karte isključivo raditi metodom fotogrametrije na onim terenima gde ne postoje planovi krupnije razmere.

Na osnovu fotograma razmere 1 : 30.000 mogu se raditi karte 1 : 25.000 ili iz fotograma u razmeri oko 1 : 15.000 do 1 : 20.000 mogu se raditi karte 1 : 10.000 sa dovoljnom tačnošću njihove izrade. Fotogrami u razmeri 1 : 30.000 obuhvataju površinu oko 10 km² dok fotogrami oko 1 : 15—20.000 obuhvataju površinu (korisnu) oko 5 km². Na ovakvoj korisnoj površini dovoljno je da imamo 3—4 tačke (vezne) radi restitucije. Sa trećim popunjujućim redom mogu da se odrede dovoljan broj veznih (oslonih) tačaka na fotografijama za ove dve razmere.

Moglo bi se postaviti pitanje da li je rentabilno postavljati posebno treći popunjujući red, a posebno četvrti red. Ako za dotični teren nije planom predviđeno da se radi u datom momentu onda ga ne treba ni postavljati. Naš društveni plan nam nalaže da se po planu ima vršiti svaki posao. Postavljati četvrti red a ako to planom nije predviđeno niti će trebati za dugi niz godina onda ga ne treba ni postavljati već primeniti treći popunjujući red.

Ostojanja između trigonometrijskih tačaka odnosno dužine strana iznose u popunjavajućoj mreži trećeg reda tri do sedam kilometara. Prema terenskim prilikama koje uslovljavaju oblik mreže dužine pojedinih strana (pravaca) mogu biti nešto kraće odnosno duže od navedenih. Da bi mogli primeniti trigonometrijski nivelman kod trećeg popunjavajućeg reda triangulacije potrebno je izneti sa kojom se tačnošću mogu odrediti te visine i za koje se potrebe geodetskih radova one mogu upotrebiti.

Osnovna formula za računanje visinskih razlika na osnovu obostrano merenih zenitnih ostojanja u konačnom obliku je:

$$\Delta H = d \operatorname{tg} \left(\frac{Z_B - Z_A}{2} \right) + \frac{l_A + i_A}{2} - \frac{l_B + i_B}{2} + (K_B - K_A) \frac{d^2}{4R} + K$$

gde je:

d = ostojanje između trigonometrijskih tačaka.
 Z_B i Z_A su zenitna ostojanja na tačkama A i B,

l_A i l_B visina signala na tačkama A i B,
 i_A i i_B visina instrumenata na tačkama A i B,

$$K = \frac{H_m}{R} \Delta H$$

Veličine K_B i K_A smatra se da su jednake kada su zenitna rastojanja istovremeno merena na dvema tačkama te će onda oblik jednačine ΔH biti, jer je ($K_A = K_B$).

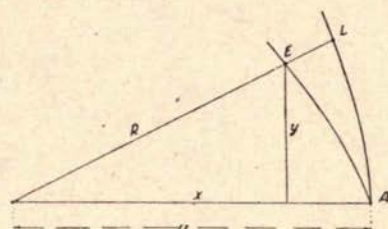
$$\Delta H = d \operatorname{tg} \frac{Z_B - Z_A}{2} + \frac{l_A + i_A}{2} - \frac{l_B + i_B}{2} + K$$

Redovito se visinske razlike radi kontrole merenja i pojedinih rezultata iz merenja napred i natrag računaju napose po jednom i po drugom zenitnom otstojanju i uzima aritmetička sredina. Za ovakvo jednostrano računanje vredi formula:

$$\Delta H = d \cotg Z_A + (1 - k) \frac{S^2}{2R} + i_A - l_B + K$$

Napred navedene formule izvedene su sa pretpostavkom da je zemlja lopta sa poluprečnikom jednakom srednjem poluprečniku krivine zemlje za srednju tačku područja $R = \sqrt{MN}$.

Popravka koja bi se dodavala sračunatim visinskim razlikama može da se sračuna po sledećim formulama: (sl. 1)



Sl. 1

AL = luk lopte

AE = luk elipsoida

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$a - R = a - \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{a^2 - b^2}{b} = e'^2; \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

$$x^2 = a^2 - \frac{a^2 y^2}{b^2} \quad \text{ili} \quad a - R = a - a \left(1 + \frac{b^2 y^2 - a^2 y^2}{a^2 b^2} \right)^{1/2}$$

razvije se u red i dobije se

$$a - R = y^2 \frac{a^2 - b^2}{2ab^2} \qquad a - R = \frac{e'^2 y^2}{2a}$$

Za veličinu strane od 5 km razlika između a i R iznosiće 1 cm. Ovo je maksimalna greška jer je uzet najnepovoljniji slučaj tj. A je na ekvatoru, a tačka B na meridijanu tačke A . Obzirom na ostale pogreške i popravke koje se uzimaju u obzir ova popravka za naše praktične radove ne bi došla u obzir za dužine strana do 5 km. U navedenim formulama dužina d pretstavlja dužinu trigonometrijske strane odnosno dužinu geodetske linije. U našim praktičnim radovima računa se iz ravnih koordinata po formuli:

$$S' = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

» S « nije jednako » d « zbog deformacije usled projekcije. Uticaj ove razlike biće veći na granicama projekcije i proporcionalno raste sa visinom razlikom.

Kod Gaus-Kriggerove projekcije mogu da se uzimaju za tačnija merenja tj. dužine S na projekciji

$$S = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

a ujevši u obzir i deformaciju projekcije imamo:

$$d = S \cdot \left(1 - \frac{y_m^2}{2R^2}\right)$$

Ako bi zenitna otstojanja svodili na površinu sferoida onda bi iz ovoga proizišlo da ih treba redukovati zbog skretanja vertikalala. Određivati skretanje vertikalala na svakoj trigonometrijskoj tački bilo bi preskupo i ne bi za praktične potrebe za trigonometrijski nivelman imalo neke svrhe. Ova skretanja se određuju astronomskim putem. Skretanje vertikalala obično se javljaju u planinskim predelima i to usled velikih nadmorskih visina i usled nepravilnog razmeštaja masa. Skretanja vertikalala mogu da budu i do 10 sekunda. No razlika u skretanju što ovde dolazi u obzir na otstojanju do 5 km biće mnogo manje veličine. U aritmetičkoj sredini merenja tamo i natrag će se njihov uticaj na kratkim vizurama poništavati, odnosno dobićemo visine obzirom na nulti nivo mora.

Pogreške koje dolaze od koeficijenta refrakcije u trigonometrijskom nivelmanu proporcionalne su sa kvadratom dužine strane. Ova pogreška kod kraćih dužina je beznačajana. Iz ispitivanja koja su do sada vršena može se zaključiti da se trigonometrijski nivelman može primeniti i na duže strane veće od 5 km. Za refrakcioni ugao imamo

$$e = K \frac{\gamma}{2} = K \frac{r \cdot d}{2R}$$

Greška u koeficijentu refrakcije u zavisnosti od promene refrakcionog ugla izraziće se:

$$d\varrho = \frac{d}{2R} dK; \text{ odnosno } m_K = \frac{2R}{d} d\varrho$$

Iz ove jednačine vidi se, da će se veličina pogrešaka u refrakcionom uglu povećati sa dužinom rastojanja između trigonometrijskih tačaka u linearnom odnosu. Pored dužine, na pogrešku koeficijenta refrakcije utiče i prolaz vizure blizu terena. Iz ovoga proizlazi da će se u brdovitom terenu tačnije odrediti nadmorske visine trigonometrijskih tačaka putem trigonometrijskog merenja visina nego u ravnom terenu.

Ispitivanjima se ustanovilo da na rezultate merenja zenitnih ostojanja utiče i doba dana. Najmanja kolebanja u refrakciji su od 9—15 časova. Za određivanje tačaka četvrtog i trećeg popunjavajućeg reda odvelo bi nas prilično dugo ako bi merili uglove samo u ovo doba dana. Može se bar nešto učiniti da se ujutro najpre mere horizontalni a zatim vertikalni, a posle podne najpre vertikalni a zatim horizontalni uglovi.

Pri merenju vertikalnih uglova javljaju se pogreške i u samom merenju ugla. Ako merimo vertikalne uglove u doba kada je refrakcija najstabilnija i najmanja tj. oko podne onda nam sa druge strane ispada da signali na koje viziramo nisu stabilni. Srednju grešku merenja visinskog ugla može se odrediti ako se jedan ugao meri u više girusa. Za merenje vertikalnih uglova upotrebljavamo Vildove T2 i Cajsove T2 teodolite koji na vertikalnom krugu imaju podelu kao i na horizontal-

nom. Zenitni ugao dobiva se po formuli $Z = \frac{K_L - K_D}{2}$. Kod Vildova in-

strumenta T3 ugao se dobiva: $\alpha = K_L - K_D$. Ne deli se sa dva jer je podela na njemu dvostruko naneta. Ako uporedimo ove instrumente onda ćemo videti da je tačnost viziranja kod ovih instrumenata ista kao tačnost koincidiranja. Tačnost se povećava kod Cajsovih T2 tim što se rezultat deli sa 2 i time se smanjuje pogreška očitavanja.

Tačnost određivanja visinskih razlika tj. ocena tačnosti trigonometrijskog nivelmana i njegova primena kod triangulacije trećeg popunjavajućeg reda može da se analizira iz sledeće definitivne formule:

$$\Delta H = d \operatorname{tg} \alpha + \frac{d^2}{2R} - k \cdot \frac{d^2}{2R} + i_A - l_B + K$$

Diferencirajući gornji izraz popromenljivim veličinama d , α , k , i i l prešavši na srednje pogreške imamo:

$$m_{\Delta H}^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha m_d^2 + \frac{d^2}{\cos^2 \alpha} m_\alpha^2 + \left(\frac{d^2}{2R}\right)^2 m_k^2 + m_i^2 + m_l^2$$

Ako pretpostavimo da je $m_\alpha = \pm 3''$ $m_k = \pm 0,03$ dolazimo do sledećih zaključaka:

— da greška visinske razlike zavisi uglavnom od greške merenja visinskog ugla za ostojanja do 3 km,

— greška u koeficijentu refrakcije utiče sa povećanjem dužine. Ova će greška biti jednaka sa greškom u merenju ugla kada vizura bude 6 km,

— uticaj greške u visini instrumenta, visini signala i sleganju nadzemne belege utiče kod kratkih strana i to do 2,5 km. Preko ove dužine je uticaj ove greške beznačajan. Visina instrumenta i signala meri se pantljkikom do na 1 cm.

Na temelju materijala merenja u cilju određivanja visina trigonometrijskih tačaka vršena su razna ispitivanja u pogledu tačnosti trigonometrijskog nivelmana. Tačnost je određivana iz razlike dvostrukih merenja, grešaka za stvaranje poligona, istinitih grešaka i iz popravki izravnjanja mreža. Ta ispitivanja su dala da srednja greška visinske razlike određena takvim trigonometrijskim nivelmanom u dva pravca — iznosi od $\pm 2,8$ cm do $\pm 3,5$ cm na jedan kilometar dužine.

Prof. Dr. Ing. Čubranić razmatra iz takvih merenja postignutu tačnost na raznim dužinama trigonometrijskih strana pa dobiva srednju grešku jedinice težine odnosno rednju grešku na jedan km. (u jednom smeru): za jedan kilometar 6 cm/km, za 2 km 5 cm/km, za 3 km 4,8 cm/km, za 4 km 4,7 cm/km, za 5 km 4,8 cm/km, za 6 km 4,8 cm/km, za 7 km 4,9 cm/km, za 8 km 4,9 cm/km, za 9 km 5,0 cm/km, za 10 km 5,1 cm/km. Iz ovoga se može zaključiti da je u intervalu 2—10 km srednja greška jedinice težine više-manje konstantna veličina. Veličine 4,5 do 5 cm to je očito stoga što u tom intervalu presudni uticaj na tačnost ima merenje visinkih uglova. Najtačnije podatke odnosno najmanje srednje greške na 1 km dužine dobivamo u intervalu od 3 do 5 km.

Ako teoretski razmatramo tačnost trigonometrijskog nivelmana onda teorija dokazuje da se tačnost povećava sa smanjivanjem otstojanja između tačaka. Iz računanja i primera koja su do sada poznata i koja su iznešena i raznim udžbenicima za otstojanja između tačaka od 0,5 do 3 km ne potvrđuje ovaj teoretski zaključak. Znači da u ovom intervalu od 0,5 do 3 km srednja greška se povećava a da se smanjuje sa povećanjem do izvesnog rastojanja između tačaka tj. 5 do 6 km.

Instrukcija za prvi, drugi, treći i četvrti red koju je izdala Glavna uprava za geodeziju i kartografiju SSSR-a u 1957 godini navodi sledeća pravila »Zenitna rastojanja se mere po pravcima triangulacije I reda u reonima koji nisu ispitani. Zenitna rastojanja se mere po pravcima triangulacije drugog reda samo u brdovitim terenima gde ne postoji treći i četvrti red triangulacije. Zenitna rastojanja se mere po pravcima triangulacije trećeg i četvrtog reda u svim ostalim terenima da bi se dobile nadmorske visine trigonometrijskih tačaka. U ravnim terenima određuju se nadmorske visine geometrijskim nivelmanom«. Ova instrukcija predviđa rastojanja između tačaka četvrtog reda od 1,5 do 6 km. Sa kojom tačnošću na pojedinim radovima triangulacije se postižu rezultati u određivanju nadmorskih visina trigonometrijskih tačaka i u koje svrhe upotrebljavaju rezultate ovde nećemo razmatrati.

Ako izvedemo zaključak iz napred navedenog što smo konstatovali o potrebi primene trigonometrijskog nivelmana kao i njegovu mogućnost kod trećeg popunjavajućeg reda u našim uslovima onda treba da se uzme

u obzir sledeće: Da dužina strana između trigonometrijskih tačaka kod trećeg popunjujućeg reda preko koga će ići trigonometrijski vlak ne prelazi 4 km. Da broj strana kod glavnog vlaka bude maksimum 5, kod sporednog 4, između vlakova glavne mreže 3 i između glavne i sporedne 3 strane.

Pri sastavljanju plana određivanja visina u popunjujućoj mreži trećeg reda treba težiti da vlakovi trigonometrijskog nivelmana idu preko najkraćih strana (vizura) da se zenitna otstojanja odnosno visinski uglovi mere u jednom i u drugom smeru kod svih strana odnosno vlakova u ovom redu i birati one strane čije su vizure što više iznad terena. Pored navedenog treba naročito imati u vidu koji instrumenat upotrebiti i sa kojom tačnošću meriti visine kod trećeg popunjujućeg reda triangulacije.