Dr. KARL LEDERSTEGER, Wien

PRILOG TEORIJI NORMALNOG SFEROIDA ZEMLJE*

Moderna se geodezija srećom već mnogo puta istakla nastojanjem, da posve geometrijsko stanovište nadomjesti fizikalnim i relativne veličine po mogućnosti nadomjesti nehipotetskim i apsolutnim. Nažalost se ta tendenca nije općenito afirmirala, a to nas upozorava na činjenicu, da je viša geodezija važna grana geofizike i prema tome posve prirodna nauka, i da se od nje još mnogo očekuje. Naravno treba odmah dodati, da kod toga snose glavnu krivicu velike poteškoće, koje se suprotstavljaju nehipotetskom ispitivanju Zemljinog polja sile teže. Ali ja ipak vjerujem, da se geodetske stručnjake ne smije posve osloboditi izvjesne konzervativne tromosti, koja ih potiče, da se pridržavaju nedovoljnih predodžbi modelima, čak šta više fikcija, koje su se doduše u praksi pokazale veoma dobre, ali ipak nisu mogle izdržati strogu kritiku. Međutim gigantski napredak modernih prirodnih nauka povlači i geodetskog stručnjaka u svoj krug i prisiljava ga da se u povećanom opsegu upozna s njihovim prirodoslovnim poslanjem.

Nevjerojatna kompliciranost fizičke površine Zemlje zahtijeva, opisivanje-predodžbu-točkama i ima za pretpostavku jednu referentnu plohu, koja je moguće ispravna, kod jednostavnog matematskog preslikavanja istinitog oblika Zemlje. Tako je 1924 godine preporučen tada najbolji gradusni elipsoid, poznat otada kao internacionalni elipsoid, za općenitu referentnu plohu zemaljskih triangulacija. Tome se ne bi imalo što primjetiti tako dugo, dok se ograničavamo na posve geometrijske zadatke više geodezije. Šest godina kasnije je internacionalni elipsoid deklariran kao nivo elipsoid i povezan s internacionalnom formulom za normalnu vrijednost sile teže, da se dobije jedna zajednička referentna ploha za zemaljski premjer i Zemljino polje sile teže. Osnovna je misao bila dobra, izvođenje je bilo prožeto hipotetskim elementima, posve neovisno od toga što heterogeni nivo elipsoid, usprkos tako točnog rješenja Stokes-ovog problema prema Pizzeti-ju i Somiglian-u, može biti u najpovoljnijem slučaju iskorišten kao geodetska fikcija. Može se strogo dokazati, da nije moguće zamisliti nehomogenu figuru u ravnoteži oblika rotacionog oblika. Pobornici nivo elipsoida misle naprotiv 1., da razlika između normalnog sferoida Zemlje i nivo elipsoida može iznositi maksimalno samo par metara i da je zbog toga praktički beznačajna i 2., da je u izvjesnim granicama

* Predavanje održano 20. X. 1959. u München-u pred Njemačkom geodetskom komisijom. Preveo dozvolom autora: Dr. Ing. Stjepan Klak, Zagreb

bez utjecaja koju referentnu plohu usvojimo kao osnov za određivanje geoidnih undulacija, jer se to ne odnosi na nju (posljednju), već na polarne koordinate geoida ili čak fizičke površine Zemlje. Ti se argumenti, međutim, mogu lako pobiti.

Ponajprije nije vidljivo zašto se zadržava nivo elipsoid, ako se normalni sferoid može ispravnije i k tome još jednostavnije postići. Osim toga se u tom slučaju spljoštenost Zemlje dobiva strogo fizikalno i zbog toga bolje nego običnim astronomsko-geodetskim putem. Konačno, iz opažanih vrijednosti sile teže može se točno izračunati samo raspodjela sile teže na normalnom sferoidu, ali nikada na fiktivnom nivo elipsoidu. To se već vidi iz poznatog sastava internacionalne formule za normalnu vrijednost sile teže, kod koje je razlika sile teže na polu i ekvatoru jednostavno podešena pomoću Clairaut-ovog teorema geometrijskoj spljoštenosti Hayfordovog elipsoida, dok je parametar 4. reda već bio zadan pretpostavkom nivo elipsoida tako, da je iz opažanja određena jedino i samo vrijednost sile teže na ekvatoru γ_0.

Drugi je prigovor opasno vraćanje na ranije posve geometrijski način razmatranja. Naročito se u posljednjim godinama naglašavala, u toku ponovnog isticanja (izgrađivanja) astronomske geodezije, prednost gravimetrijskih otklona težišnice pred relativnim otklonima težišnice kod čega se još uvijek na žalost zamjenjuju gravimetrijski otkloni težišnice s apsolutnim otklonom težišnice. Što vrijedi za otklone težišnice vrijedi u najmanju ruku i za undulacije. Mi ne trebamo bilo kakove relativne undulacije za određivanje radija vektora točaka na geoidu, nego u prvom redu apsolutne undulacije, koje omogućuju strogo fizikalni studij Zemljinog polja sile teže i izgradnju Zemljine kore. Geometrijsko shvaćanje problema, kako je on posljednjih godina opetovano propagiran, da se izbjegnu hipoteze o raspodjeli gustoće u Zemljinoj kori, ne pretstavlja po mojem mišljenju stvarni napredak, usprkos zadivljujućeg smisla u matematskom razvoju, već umanjivanje značaja geodezije kao prirodne nauke.

Ali takova kritika obavezuje na to, da se ukaže na fizikalno opravdaniji, ako ne posve nehipotetski put za rješenje problema oblika Zemlje. Može se pokazati, da se mogu riješiti oba velika pojedinačna zadatka ovog problema, naime određivanje normalnog sferoida s jedne strane i određivanje undulacija aktuelnog geoida u odnosu na normalni sferoid samo u naizmjeničnom dopunjavanju, pače s jednim opsežnim obratom. Ipak će se u slijedećem, problem normalnog sferoida posebno diskutirati, jer se već time dobiva važna podloga za rješenje cijelog problema.

U načelu je veoma vjerojatno da se definira normalni sferoid Zemlje kao heterogena, sferoidna figura u ravnoteži i da se zato usvoji izraz za potencijal Helmertovog rotacionog nivo sferoida 4. reda. Naravno, da je rastavljanje razvoja kuglinih funkcija za potencijal sile teže W u sumu $(U + T)$ posve formalne naravi. Može se zamisliti, da su mase u Zemljinoj kori tako »regularizirane«, da funkcija T nestane. Na taj način nastaju umjetni geoidi, koji se poklapaju sa svojim vlastitim nivo sferoidima U_4.

$$U_4 = \frac{k^2 E}{l} / 1 + \frac{K}{2 l^2}\left(1 - 3\sin^2\varphi'\right) + \frac{\omega^2 l^3}{2 k^2 E}\cos^2\varphi' + \\ + D\left(\sin^4\varphi' - \frac{6}{7}\sin^2\varphi' + \frac{3}{35}\right) / \tag{1}$$

Ako je takav umjetni geoid slobodna površina regularizirane Zemljine mase, time je već ispunjen nuždan, ali ne i dovoljan uvjet za hidrostatsku ravnotežu. Nadalje se odmah vidi da je ispunjeno jedno vrlo važno svojstvo svih figura u ravnoteži: ravnina ekvatora je ravnina simetrije figura. koje imaju za potencijal izraz (1). Ta postavka ispunjava konačno još jednu dalju veoma važnu pretpostavku, naime, rotacionu simetriju, koja je karakteritična za sferoidne figure u ravnoteži. U ovoj radnji će se ukratko zauzeti stanovište o mnogo diskutiranom pitanju troosnog oblika Zemlje. Savremeni geoid nije figura hidrostatske ravnoteže; prema tome se može zamisliti, da ga se aproksimira posve geometrijski osjetljivo bolje troosnim elipoidom nego rotacionim elipsoidom. Kao jedno takovo približenje je na pr. zamišljen elipsoid Krassovski-Isotow. Ako se pak želi za fizikalno definirani oblik Zemlje upotrebiti tri osi, tada to stoji u grubom protivrječju s teorijom ravnoteže figura.

U (1) označuje E masu Zemlje, l radius vektor nivo sferoida, φ' geocentričnu širinu, K kvocijent razlike glavnih momenata tromosti i mase Zemlje

$$K = (C - A) : E, \tag{2}$$

dakle, funkciju mase 2. reda i konačno D funkciju mase 4. reda.

$$D = \left(\frac{35}{8}\right)^2 \frac{1}{E} \int l^4 \left(\sin^4\varphi' - \frac{6}{7}\sin^2\varphi' + \frac{3}{35}\right) dm \tag{3}$$

K potencijalnoj funkciji dolazi još formula za normalnu vrijednost sile teže na nivo sferoidu

$$\gamma = \gamma_0 \left(1 + \beta \sin^2 2\varphi - \frac{\beta_4}{4} \sin^2 2\varphi\right) \tag{4}$$

i razmak nivo sferoida od rotacionog elipsoida jednakih osi (radius vektor s), za koji se dobiva jednostavan izraz uvođenjem tako zvanog parametra f.

$$(l - s) = \frac{a}{4} f \sin^2 2\varphi + \ldots \tag{5}$$

Maksimalno nadvišenje nivo sferoida nad elipsoidom nastupa na geografskoj širini 45^0

$$h_m = \frac{a}{4} f \tag{5a}$$

Cijeli problem obuhvaća tada 13 parametara i to osim mase Zemlje tri geometrijska parametra (a, μ, h_m), tri parametra normalne vrijednosti sile teže (γ, β, β_4), tri veličine β — ovisne s masi, srednju gustoću ϱ_m, statičku splоštenost $\frac{K}{a^2}$ i parametar $\delta = \frac{D}{a^4}$ i konačno još dalje tri fizikalne veličine: brzinu rotacije ω, vrijednost potencijala W_0 i omjer E centrifugalne sile i sile teže na ekvatoru.

Za tih je 13 veličina koje treba odrediti, Helmert postavio slijedećih 8 jednadžbi, kod razvoja do zaključno 4. reda uz ograničenje, da se radi o sferoidnim figurama male spljoštenosti.

$$
\begin{aligned}
&1.\quad \mu+\beta=\tfrac{5}{2}\varepsilon-\mu^2-\tfrac{1}{2}\mu\varepsilon-\tfrac{2}{7}\delta \qquad \text{TEOREM CLAIRAUT}\\
&2.\quad \gamma_0=\frac{k^2E}{a^2}\left[1+\mu-\tfrac{3}{2}\varepsilon-\mu^2-\frac{\mu\varepsilon}{2}+\tfrac{4}{7}\delta+\tfrac{9}{4}\varepsilon^2\right]\\
&3.\quad \frac{K}{a^2}=\frac{1}{3}\left[2\mu-\varepsilon-2\mu^2+\varepsilon\mu+\tfrac{3}{2}\varepsilon^2+\tfrac{2}{7}\delta\right]\\
&4.\quad W_0=\frac{k^2E}{a}\left[1+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\mu}{3}-\frac{\mu^2}{3}-\frac{\varepsilon^2}{2}+\tfrac{2}{3}\mu\varepsilon+\tfrac{2}{15}\delta\right] \qquad \ldots\ldots(6)\\
&5.\quad \beta_4=3\delta-11\mu^2+10\mu\varepsilon\\
&6.\quad \varepsilon=\frac{\omega^2a}{\gamma_0} \ \text{ ili } \ \frac{\omega^2a^3}{k^2E}=\varepsilon\left[1+\mu-\tfrac{3}{2}\varepsilon\right]\\
&7.\quad h_m=\frac{a}{4}f=\frac{a}{4}\left[\tfrac{7}{2}\mu^2-\tfrac{5}{2}\mu\varepsilon-\delta\right]\\
&8.\quad \rho_m\sim\frac{3E}{4\pi}\,\frac{1}{a^3(1-\mu)}
\end{aligned}
$$

To su μ, β, ε i $\frac{K}{a^2}$ veličine 2. reda, δ i β_4 veličine 4 reda $\frac{h_m}{a}$ veličina 5—4 reda, dok su veličine 6. reda to jest veličine reda μ^3 zanemarene. Sistem ima 5 »uvjetno slobodnih« parametara, i na taj je način zamišljenö, da parametri nisu slobodni ni u svojoj kombinaciji ni u svojim brojnim vrijednostima.

Hermertov sistem jednadžbi se može primjeniti na homogene Mac Laurinove elipsoide i sadrži u svojim rješenjima sve sferoidne figure u ravnoteži. Budući da su svi rotacioni elipsoidi moguće figure u ravnoteži neke određene mase i jer se na njih neposredno priključuju sferoidne figure u ravnoteži, mora postojati za unapred zamišljenu masu Zemlje n a j m a n j e ∞^3 heterogenih figura u ravnoteži. Helmertov sistem ima s druge strane za masu Zemlje ∞^4 rješenja, kod čega pripada svakoj mogućoj konfiguraciji mase beskonačno mnogo nivo sferoida kao vanjskih nivo ploha. Na taj se način može dobiti također n a j v i š e ∞^3 heterogenih sferoidnih figura u ravnoteži. Rješenja Helmertovog sistema obuhvaćaju uslijed toga ∞^3 mogućih figura u ravnoteži zajedno sa svojim vanjskim nivo plohama. Ako bi se moglo formulirati uvjet ravnoteže kao novu 9. jednadžbu među parametrima sistema, da su u svakoj figuri u ravnoteži nužno i dovoljno nivo plohe, plohe iste gustoće, tada bi se iz rješenja moglo izvući jednoznačno sve figure u ravnoteži.

Zaista najvažniji sistem 5 slobodnih parametara su tako zvani Stokes-ovi elementi, naime masa E, brzina rotacije ω, i jedna vanjska obuhvatna nivo ploha za masu S = (a, μ, h_m). Prema Stokes-ovom teoremu za to postoji beskonačno mnogo rasporeda masa, koji ne mijenja Stokes-ove elemente. Tada je preostalih 8 parametara Helmertovog sistema Stokes-ove konstante«, to znači integralne nepromjenljive kod istih Stokes-ovih elemenata, za sve moguće rasporede masa. Rasporedi masa su već kod rotirajućih figura veoma ograničeni time, što os rotacije i težište moraju ostati nepromjenjeni; ipak općenito ima još uvijek beskonačno mnogo rasporeda masa za jedan sistem Stokes-ovih elemenata. Upiše li se jednom homogenom Mac Laurinovom elipsoidu kugla s malom osi i grupira u njoj mase tako, da nastaju koncentrične kugline ljuske povoljne gustoće, tada se ne mijenja ne samo potencijal na površini i u čitavom vanjskom prostoru nego i težište. Ali tada nisu više mase u elipsoidu u hidrostatskoj ravnoteži.

Zbog toga se potavlja pitanje, da li za jedan sistem Stokes-ovih elemenata mora postojati uvijek jedan ili čak više rasporeda masa u ravnoteži. To pitanje može biti odmah negirano. Jer tu postoji ∞^3 sferoidnih figura u ravnoteži, to je svaka od njih već jednoznačno određena s E i S. Brzina rotacije ne može biti unapred zadana čak ni proizvoljno. Ali jer s druge strane ∞^4 rješenja Hermertovog sistema jednadžbi stoji nasuprot samo ∞^3 geometrijski mogućih figura, mora svaka od tih ploha općenito biti vanjska nivo ploha beskonačno mnogo figura u ravnoteži. Da je to zaista tako, može se pokazati na slijedeći način. Kombiniramo li povoljnu plohu $S = (a, \mu, h_m)$ s bilo kojom brzinom rotacije, tada se dobiva zajedno s E jedan sistem Stokes-ovih elemenata i jednadžbe daju jednoznačna rješenja za svih ostalih 8 parametara, među kojima i za veličine ovisne o masi K i D. Ove su kao, Stokes-ove konstante integralne nepromjenjive za sve moguće rasporede masa među kojima se također mora nalaziti figura u ravnoteži, koja je jednoznačno određena s E, a, K i D. Točnija analiza nas uči, da niz figura u ravnoteži, koje imaju neku određenu plohu S kao zajedničku vanjsku nivo plohu, počinje s jednim homogenim elipsoidom maksimalne rotacione brzine i konačno završava za neku određenu minimalnu vrijednost ω s onom figurom u ravnoteži, za koju zadana ploha S postaje slobodnom plohom.

To nas već vodi na 2 veoma važna specijalna slučaja. Ako je površina S rotacioni elipsoid: $S = (a, \mu, h_m = 0)$, tada se poklapa polazni elipsoid netom opisanog niza s konačnom figurom, to jest maksimum i minimum rotacione brzine su identični, a to daje samo jedan jedini raspored masa u ravnoteži, upravo pomoću S određen Mac Laurinov elipsoid. Time se po prvi puta, a priori utvrđuje, da to ne može biti jedna heterogena figura u ravnoteži rotaciono elipsoidnog oblika. Tako teoretski prividno, solidno obrazložen nivo elipsoid je fizikalno nemoguć i može vrijediti jedino kao fikcija. Drugi specijalni slučaj pretstavljaju tako zvani sferoidi najveće koncentracije masa, kojih ima ∞^2, jer su oni zamišljeni kao vanjske nivo plohe rotirajuće materijalne točke, koja je sama, posve razumljivo, fikcija. Ovdje nastupa materijalna točka umjesto jednog konačnog, homogenog polaznog elipsoida, to znači, niz figura u ravnoteži, koje imaju zadani sferoid najveće koncentracije mase kao zajedničku nivo plohu, počinje ovdje s jednom figurom bez dimenzija i maksimalnim ω, dok za minimalan ω sam sferoid postaje figura u ravnoteži.

Prije nego iz ovih interesantnih nizova figura povučemo odlučujući zaključak, moramo se pozabaviti jednim drugim pitanjem. Ranije je bilo naglašeno, da je 5 slobodnih parametara Helmertovog sistema samo »uvjetno slobodno« i mi moramo stoga prodiskutirati obilježje fizikalno nemogućih rješenja Helmertovog sistema. Ponajprije je jasno, da K ne može nikad biti negativan. Diferencija glavnih momenata tromosti (C — A) je većinom pozitivna; ona poprima vrijednost nula u graničnim slučajevima mirujuće kugle i rotirajuće materijalne točke, kao i u obuhvatnoj plohi heterogenih figura u ravnoteži, kako će se kasnije dokazati. Ali također funkcija D isčezava u oba prvo navedena slučaja odakle slijedi, da je D uvijek ≥ 0. Nadalje je naročito važan parametar f. U jednom geometrijskom koordinatnom sistemu s tri osi, a, μ, h_m ispunjavaju homogeni Mac Laurinovi elipsoidi prugu $0 \leq a < \infty$, $0 \leq \mu \leq 1$ ravnine (a, μ). Svi nehomogeni nizovi figura proizlaze iz bilo kojeg homogenog elipsoida nastavljanom koncentracijom masa, koja može biti naravno na rajrazličitiji način povezana s kontrakcijom i ekspanzijom figure. Odatle već slijedi, da heterogene figure mogu ležati samo na jednoj strani fundamentalne ravnine, to znači da parametar mora imati jedinstven predznak. Za sferoide najveće koncentracije mase dobiva se $f = -3\mu^2/2$, dakle, svakako negativan. Takovi su sferoidi definirani kao vanjske nivo plohe. Ali jer je svaka figura u ravnoteži općenito istovremeno vanjska nivo ploha beskonačno mnogo drugih figura u ravnoteži s drugim brzinama rotacije, može se zaključiti da je uvijek $f \leq 0$. Isto tako malo može biti pozitivna derivacija $\frac{df}{da}$ kod vanjskih nivo ploha neke figure u ravnoteži. Inače bi mogla postojati mogućnost da se među tim vanjskim nivo plohama nalazi i jedan rotacioni elipsoid što je u protivrječju s ranije objašnjenim posebnim položajem rotacionog elipsoida.

Nakon ovih primjedbi mi ćemo se ponovo obratiti nizu heterogenih figura u ravnoteži sa zajedničkom vanjskom nivo plohom. Postavlja se pitanje kojoj od tih figura, jer nam stoje na raspoloženju 4 elementa E, K, D i μ koji nisu dovoljni za rješenje Helmertovog sistema. Za ekvidistantne vrijednosti »a« može se naći niz rješenja, koja predočuju sve dalje i dublje ležeće vanjske nivo plohe tražene figure u ravnoteži. One čine jednu krivulju sličnu paraboli, čija najdonja točka reprezentira traženu figuru u ravnoteži. Time je nađen jedan veoma važan kriterij figura u ravnoteži; one su obilježene minimumom apsolutnog iznosa parametra. Dakle, na površini svake figure u ravnoteži mora derivacija $\frac{df}{da}$ nestati:

$$a\frac{df}{da} = 15\mu\varepsilon - \frac{25}{4}\varepsilon^2 - 14\mu^2 + 4\delta = 0 \tag{7}$$

Jednadžba (7) se može shvatiti kao jednadžba za δ i dodati kao 9. jednadžba Helmertovom sistemu. Eliminiramo li time još δ iz ostalih jednadžbi, tada ostaje 9 parametara kao funkcija preostala četiri: E, a, μ i ε.

$$
\begin{aligned}
&1.\ \beta=\tfrac{5}{2}\varepsilon-\mu-\tfrac{11}{7}\mu\varepsilon+\tfrac{25}{56}\varepsilon^2\\
&2.\ \gamma_0=\tfrac{k^2E}{a^2}\left[1+\mu-\tfrac{3}{2}\varepsilon+\mu^2-\tfrac{37}{14}\mu\varepsilon+\tfrac{22}{7}\varepsilon^2\right]\\
&3.\ \tfrac{K}{a^2}=\tfrac{1}{3}\left[2\mu-\varepsilon-\mu^2-\tfrac{1}{14}\mu\varepsilon+\tfrac{109}{56}\varepsilon^2\right]\\
&4.\ W_0=\tfrac{k^2E}{a}\left[1+\tfrac{\varepsilon}{3}+\tfrac{\mu}{3}+\tfrac{2}{15}\mu^2+\tfrac{1}{6}\mu\varepsilon-\tfrac{7}{24}\varepsilon^2\right]\\
&5.\ \beta_4=\tfrac{45}{16}\varepsilon^2-\tfrac{1}{2}\mu^2-\tfrac{5}{4}\mu\varepsilon\\
&6.\ \varepsilon=\tfrac{\omega^2 a}{\gamma_0}\ \text{ ili }\ \tfrac{\omega^2a^3}{k^2E}=\varepsilon\left[1+\mu-\tfrac{3}{2}\varepsilon\right]\\
&7.\ h_m=\tfrac{a}{4}f=\tfrac{a}{4}\left[\tfrac{5}{4}\mu\varepsilon-\tfrac{25}{16}\varepsilon^2\right]=\tfrac{5}{16}a\varepsilon\left[\mu-\tfrac{5}{4}\varepsilon\right]\\
&8.\ \rho_m\doteq\tfrac{3E}{4\pi}\,\tfrac{1}{a^3(1-\mu)}\\
&9.\ \delta=\tfrac{7}{2}\mu^2-\tfrac{15}{4}\mu\varepsilon+\tfrac{25}{16}\varepsilon^2
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots (8)
$$

Ovaj novi sistem ima sada za zadanu masu Zemlje E samo više $\aleph^3$ rješenja i daje sve sferoidne figure u ravnoteži. Uvrsti li se $h_m = 0$, tada moraju rezultirati Mac Laurinovi elipsoidi. Da je jednadžba (7) stvarno puno vrijedna zamjena za nedostajući uvjet ravnoteže, može se pokazati na slijedeći način. Uvrstimo li na lijevu stranu treće jednadžbe (8) vrijednost, koja vrijedi za s v e homogene elipsoide

$$\frac{K}{a^2}=\frac{1}{5}(\mu-\mu^2) \qquad (8a)$$

dobivamo

$$\varepsilon=\frac{4}{5}\mu+\frac{138}{175}\mu^2,$$

i nadalje se dobiva iz 6. jednadžbe poslije lake transformacije, poznati Mac Laurinov uvjet

$$\frac{\omega^2}{2\pi k^2\rho}=\frac{8}{15}\mu-\frac{4}{35}\mu^2 \qquad (8b)$$

Primjena sistema (8) na homogene Mac Laurin-ove elipsoide daje:

$$
\begin{aligned}
&1.\ \beta=\mu+\mu^2\ ;\quad 2.\ \gamma_0=\tfrac{k^2E}{a^2}\left(1-\tfrac{1}{5}\mu-\tfrac{2}{7}\mu^2\right)\\
&3.\ \tfrac{K}{a^2}=\tfrac{1}{5}(2\mu-\mu^2);\ 4.\ W_0=\tfrac{k^2E}{a}\left(1+\tfrac{3}{5}\mu+\tfrac{12}{35}\mu^2\right)\\
&5.\ \beta_4=\tfrac{3}{2}\mu^2\ ;\ 6.\ \varepsilon=\tfrac{\omega^2a}{\gamma_0}=\tfrac{4}{5}\mu+\tfrac{138}{175}\mu^2\\
&\quad \text{ili } \tfrac{\omega^2a^3}{k^2E}=\tfrac{4}{5}\mu+\tfrac{22}{35}\mu^2\ ;\ 7.\ h_m=f=0\\
&8.\ \rho_m=\tfrac{3E}{4\pi}\,\tfrac{1}{a^3(1-\mu)}\ ;\ 9.\ \delta=\tfrac{3}{2}\mu^2
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots (9)
$$

Za ispitivanje opsega postignute koncentracije mase u nekoj heterogenoj figuri u ravnoteži naročito su pogodni sferoidi najveće koncentracije mase. Njih dobivamo iz Helmertovog sistema, ako uvrstimo $K = D = \gamma = 0$. Na taj se način reducira sistem na 7 jednadžbi za 10 parametara.

$$
\begin{aligned}
&1.\ \beta = 4\mu + 13\mu^2 \\
&2.\ \gamma_0 = \frac{k^2 E}{a^2}(1 - 2\mu - 2\mu^2) \\
&3.\ \varepsilon = 2\mu + 6\mu^2 \\
&4.\ W_0 = \frac{k^2 E}{a}(1 + \mu + \mu^2) \qquad \cdots\cdot (9a) \\
&5.\ \beta_4 = 9\mu^2 \\
&6.\ \varepsilon = \frac{\omega^2 a}{\gamma_0} \ \text{ili}\ \frac{\omega^2 a^3}{k^2 E} = 2\mu + 2\mu^2 \\
&7.\ h_{m0} = \frac{a}{4} f = -\frac{3}{8} a\mu^2
\end{aligned}
$$

Veliko značenje jednadžbe (7) leži u tome, što se ona može postaviti posve općenito za sve sferoidne figure u ravnoteži; ona je posve neovisna o zakonu gustoće i to ne samo u smislu neovisnosti poznavanja dotičnog zakona gustoće nego i u mnogo širem smislu važnosti za sve moguće zakone gustoće. Naprotiv svaka nehomogena figura u ravnoteži ima svoj strogo individualni zakon gustoće. Ako je na primjer pomoću E, ω, K i D neka od tih figura jednoznačno određena, tada su određene ne samo slobodna površina, već posve razumljivo također sve unutarnje nivo plohe i nakon gustoće. Za homogene elipsoide je uspjelo, zahvaljujući najjednostavnijem zakonu gustoće $\varrho = \text{const}$, formulirati uvjet ravnoteže matematski korisno. Da li će se uspjeti izraziti ovaj uvjet za sve heterogene figure u nekoj ovisnosti među Helmertovim parametrima 2 reda, ε i μ, veliko je pitanje. Radi toga omogućuje, jedino dokazano svojstvo minimuma parametra, numeričko računanje figura u ravnoteži.

Uslijed jednoznačnosti dotičnog zakona gustoće pojavljuju se i Stokes-ove konstante u novom svijetlu. Mi smo vidjeli, da povoljni sistem Stokes-ovih elemenata općenito ne daje nikakovu figuru u ravnoteži, nego samo jednu njenu vanjsku nivo plohu. Prema tome postoji u unutrašnjosti površine S kod zadane brzine rotacije, samo jedan jedini raspored mase u ravnoteži, ali osim toga i mnogo drugih rasporeda koji ne ispunjavaju uvjet ravnoteže. Ukoliko se misli samo na figure u ravnoteži, tada su Stokes-ove konstante posve neovisne od p o z n a v a n j a zakona gustoće, ali one integralne varijante za različite, raspodjele gustoće u unutrašnjosti, kojih tada nema. Mi već znamo da je K diferencija glavnih momenata tromosti, prava, Stokes-ova konstanta. Ipak je zapravo posve razumljivo, da sami momenti tromosti uglavnom bitno ovise o rasporedu masa. Za momente tromosti jedne sferoidne figure u ravnoteži dobivaju se razmjerno jednostavno klasične približne formule, kod zanemarivanja članova 4 reda.

$$A = \frac{8\pi}{3}\int_0^{r_0} \rho r^4 dr - \frac{8\pi}{45}\int_0^{r_0} \frac{\partial}{\partial r}(\mu r^5) dr$$
$$C = \frac{8\pi}{3}\int_0^{r_0} \rho r^4 dr + \frac{16\pi}{45}\int_0^{r_0} \frac{\partial}{\partial r}(\mu r^5) dr \qquad \cdots\cdot(10)$$

Ako se nadomjeste unutarnje sferoidne nivo plohe odnosno plohe jednake gustoće, kuglama radija r istog volumena i ako r_0 predočuje odgovarajuću površinsku vrijednost. U tim je izrazima drugi integral radi

$$C - A = \frac{8\pi}{15}\int_0^{r_0} \frac{\partial}{\partial r}(\mu r^5) dr \qquad \cdots\cdot (11)$$

sigurno Stokes-ova konstanta. Pomoću poznate transformacije od Radau-a, (1885) možemo predočiti također 1. integral dovoljnim približenjem kao funkciju E, r_0, μ i ε, odakle slijedi, da su sami momenti tromosti približne ili takozvane »quasi — Stokes-ove konstante«, na pr.

$$C = \frac{2}{3}E r_0^2\left[1 - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{5\varepsilon_0}{2r_0} - 1} + \frac{2}{3}\left(\mu_0 - \frac{\varepsilon_0}{2}\right)\right] \qquad \cdots\cdot(12)$$

To međutim ne stoji u protivrječju s gore utvrđenom ovisnošću momenata tromosti od rasporeda masa. Jer (12) vrijedi samo za figure u ravnoteži i zbog toga govori, da su momenti tromosti približno čiste funkcije Stokes-ovih elemenata i kao takovi su nezavisni od poznavanja strogo individualnog zakona gustoće. Mogućnost jedne takove predočbe je, dakle, upravo obrnuto jedan dokaz za jednoznačnost zakona gustoće.

Spojimo li (12) sa približnim odnosom

$$\frac{C - A}{E r_0^2} \sim \frac{K}{a^2} \sim \frac{2}{3}\left(\mu_0 - \frac{\varepsilon_0}{2}\right), \qquad (13)$$

to se dobiva za recipročnu vrijednost dinamične spljoštenosti važna formula

$$\frac{C}{C - A} = \frac{1 - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{5\varepsilon}{2\mu} - 1}}{\mu - \varepsilon/2} \qquad (14)$$

koja se može zato iskoristiti, da se izračunana geometrijska spljoštenost iz točnije dinamičke spljoštenosti, pomoću empirijske vrijednosti $\varepsilon = 0.00346788$. Pomoću Bullard-ove vrijednosti dinamične spljoštenosti $1 : 305{,}59$ dobiva see $1 : \mu = 297{,}49$, koji je rezultat veoma blizu istini.

Osim dosad promatranog niza figura u ravnoteži sa zajedničkom vanjskom nivo plohom ima još mnogo drugih. Na primjer, može se izvući od ∞^2 homogenih elipsoida linearni niz, ukoliko se jedan fizikalni parametar drži konstantan, kao na pr. niz (ω) onih Mac Laurinovih elipsoida, koji svoj obrt dovrše u jednom zvjezdanom danu. Iz 2 fizikalna parametra dobiva se jedan Mac Laurinov elipsoid, iz kojega izlazi linearni niz heterogenih sferoidnih figura u ravnoteži, za koje su uvijek konstantna ta oba parametra. Mi ćemo izabrati niz (ω, K). Jednostavno razmatranje pokazuje, da u tom nizu s razlikom momenata tromosti također ova sama, a time i dinamička spljoštenost mora biti konstantna. Ovdje momenat tromosti C nije nikakova Stokesova konstanta u smislu integralne varijante, što nije uočljivo među parametrima Helmertovog sistema jednadžbi. Mi se moramo zbog toga orjentirati na homogene elipsoide, kod kojih se C može izračunti zahvaljujući poznatom zakonu gustoće. Može se pokazati, da se u nizu (K) brzina rotacije mijenja od figure do figure s C i obrnuto u nizu (C) s K, dok se u nizu (ω) C *i* K zakonito mijenjaju. To isto bi moralo vrijediti posve razumljivo također i za heterogene nizove figura. Time istovremena konstantnost K i ω u nizu (ω, K) ima nužno za posljedicu konstantnost C. Nizovi (ω, K) i (ω, C) su prema tome identični. To je za teoriju normalnog sferoida od fundamentalnog značenja.

Za nas interesantni niz (ω, K) $\equiv$ (ω, C) počinje s jednim Mac Laurinovim elipsoidom osi $a = 5819.4$ km i spljoštenosti $\mu = 1 : 305.1$ i prostire se teoretski u beskonačnost. To je omogućeno na taj način što je rastuća koncentracija masa prema težištu povezana sa snažnom ekspanzijom figura. Radi ograničene točnosti formula (9) ne može se naravno, daleko slijediti. Upadljivo je polagano povećanje spljoštenosti. Na dalekom putu od homogenog polaznog elipsoida do normalnog sferoida Zemlje koji, kao što ćemo naskoro vidjeti, mora na osnovu definicije pripadati ovom nizu, povećava se spljoštenost usprkos povećanja osi od 559 km samo od 1 : 305 do 1 : 297. Izračunamo li još figuru : $a = 6800$ km, $\mu = 1 : 283.2$, to se može ispitati opseg već postignute koncentracije masa, t. j. s vanjskom nivo plohom rotirajuće materijalne točke u jednom zvjezdanom danu u visini $a = 6800$ km. Za taj sferoid dobivamo spljoštenost $\mu = 1 : 477.8$, što govori, da koncentracija masa relativno lagano napreduje. Takovo uspoređenje je općenito veoma važan kriterij za raspored masa. Poklapaju li se osovina i spljoštenost sferoida najveće koncentracije masa za istu brzinu rotacije s geometrijskim dimenzijama povoljne figure u ravnoteži, tada je to jasna uputa (dokaz) na jednu već daleko napredovalu koncentraciju masa. Postoji još jedan drugi kriterij za to, naime razmak jedne figure od omotne plode sferoidne figure u ravnoteži.

Ako su osovina i spljoštenost konstantni, tada nastaje niz figura, koje se u našem koordinatnom sistemu preslikavaju kao paralele s h_m osi. Polazeći od odgovarajućeg komogenog elipsoida (a, μ, $h_m = 0$) raste u tom nizu s apsolutnim iznosom parametra $|f| = \frac{5\varepsilon}{4}\left(\frac{5\varepsilon}{4} - \mu\right)$ kako ε tako μ, dok K trajno opada. Granična figura u omotnoj plohi je tada određena izrazom $K = 0$. Budući da se ta vrijednost prirodno može postići kod potpunije koncentracije masa, u kom slučaju nema više ni jedne figure u ravnoteži, to ć› se svaki beskonačni niz poslije nekog stanovitog približenja omotnoj plohi povući duž nje u beskonačnost, Spomenuta granična figura za neki zadani par vrijednosti a i μ je, dakle, izražena jednadžbom

$$C_{max} = (2\mu - \mu^2) - \frac{1}{14} K\varepsilon + \frac{109}{56} \varepsilon^2 \qquad (15)$$

Za gornju figuru je $\varepsilon = 42\,0617 \times 10^{-8}$, dok posljednja formula daje maksimalni iznos $71\,4634 \times 10^{-8}$. Stvarno se pokazuje da se nalazimo još daleko ispod omotne (obuhvatne) plohe.

Mi smo vidjeli, da je svaka figura u ravnoteži jednoznačno određena sa E i S = (a, μ, h_m). Obrnuto kod problema normalnog sferoida treba tražiti oblik. Mi moramo zbog toga normalni sferoid Zemlje definirati osim pomoću E s tri odgovarajuće izbarana fizikalna parametra. Između njih mora u svakom slučaju biti brzina rotacije. Budući da nadalje kod neuzimanja u obzir vanjskih sila obrtni impuls ili momenat rotacije mora ostati ωC, mora se uključiti u definiciju kao drugi parametar glavni momenat tromosti C.

Treći parametar će biti obzirom na svrhu vrijednost potencijala geoida W_0. Mi ćemo, dakle, definirati:

»Normalni sferoid Zemlje je ona sferoidna figura u ravnoteži Zemljine mase, koja ima sa stvarnom Zemljom zajedničku brzinu rotacije, glavni momenat tromosti C i vrijednosti potencijala geoida. Rotacioni elipsoid koji ima s tim normalnim sferoidom iste osi je srednji Zemljin elipsoid i služi kao referentna ploha za velike triangulacije i Zemljino polje sile teže«.

Od nabrojanih parametara je samo brzina rotacije zadana empirijski:

$$\omega = 7\,292\,116 \,.\, 10^{-11}\ \mathrm{sec}^{-1};\ \omega^2 = 5\,317\,496 \,.\, 10^{-15}\ \mathrm{sec}^{-2} \qquad (16)$$

Umjesto momenta tromosti C, koristimo vrijednost, koju je izračunao Bullard pomoću konstanata precesije, za dinamičnu spljoštenost:

$$(C - A):C = 0.0032\ 7236 + 0.00000059 = 1 : (305.59 \pm 0.03) \qquad (17)$$

Umjesto u početku nepoznate mase Zemlje, upotrijebit će se Heiskenen-ova vrijednost sile teže na ekvatoru, podešena za internacionalnu formulu za normalnu vrijednost sile teže, koja je već naravno umanjena za 12 mgal, da se već sada približno eliminira pogreška Potsdamskog sistema sile teže:

$$\gamma_0 = 978.037\ \mathrm{gal} \qquad (18)$$

Kao zamjena za također prvotno nepoznatu vrijednost potencila W_0 služi os ekvatora:

$$a = 6\,378\,290\ \mathrm{m}, \qquad (19)$$

koja je vrijednost moguće još za nekoliko desetaka metara prevelika.

Sa zadanim podacima dobiva se neposredno $\varepsilon = 34\,6782 \,.\, 10^{-8}$. Jer dinamična spljoštenost nije parametar sistema (8) mora se u toku računanja zamijeniti veličinom K, što je moguće povratkom na homogeni polazni elipsoid niza $(\omega, K) \equiv (\omega, C)$. Postavljeni sistem (9) se dopunjuje za Mac Laurin-ove elipsoide, dvjema jednadžbama

$$C = \frac{2}{5} E a^2 ; \quad (C - A) : C = \mu - \frac{\mu^2}{2} \tag{20}$$

i na taj način dobiva iz zadane dinamičke spljoštenosti geometrijsku spljoštenost polaznog elipsoida $\mu_e = 32\,7773.10^{-8}$ i iz drugog oblika 6. jednadžbe (9) os elipsoida $a_e = 5\,819\,462$ m, ako se za masu Zemlje u 1. približenju upotrebi »internacionalna« vrijednost $E = 5976{,}505.10^{24}$ g. Treća jednadžba sada daje $K = 44\,328{,}86.10^{10}$ cm^2, odakle se, s osi (19) dobiva kao statička spljoštenost normalnog sferoida 108963.10^{-8}. Na taj način ulazimo u sistem (8) i dobivamo iz treće jednadžbe geometrijsku spljoštenost normalnog sferoida $33\,6267.10^{-8}$ i nastavno s (18) iz druge jednadžbe, drugo približenje za masu Zemlje $E = 5967{,}2591.10^{24}$ g.

Ponovi li se čitavo računanje s tom vrijednosti, tada se dobiva u trećem približenju $E = 5976{,}2594.10^{24}$ g tako, da je iduće približenje nepotrebno. Dakle, prema tome dobivamo u zatvorenom sistemu za geometrijske i fizikalne podatke normalnog sferoida Zemlje:

$$\begin{aligned}
&E = 5976{,}259 \cdot 10^{24} \mathrm{g} ; \quad W_0 = 62638115 \cdot 10^4 \mathrm{cm}^2 \mathrm{sec}^{-2} \\
&K = 54327{,}64 \cdot 10^{10} \mathrm{cm}^2 ; \quad \frac{K}{a^2} = 108960 \cdot 10^{-8} \\
&\varrho_m = 5{,}5168 ; \quad E = 346782 \cdot 10^{-8} ; \quad \delta = + 1464 \cdot 10^{-8} \\
&\omega = 7\,292116 \cdot 10^{-11} \mathrm{sec}^{-1} ; \quad \frac{2\pi}{\omega} = \text{zvjezdani dan} \\
&\gamma_0 = 978{,}037 \,\mathrm{gal} ; \quad \beta = 529391 \cdot 10^{-8} ; \quad \beta_4 = + 3614 \cdot 10^{-8} \qquad (21) \\
&a = 6\,378\,290 \,\mathrm{m} ; \quad \mu = 336267 \cdot 10^{-8} = 1 : 297 \cdot 383 \\
&f = - 421 \cdot 10^{-8} ; \quad h_m = - 6{,}72 \mathrm{m}
\end{aligned}$$

Pomoću prve formule (20) može se ovaj sistem još dopuniti:

$$\begin{aligned}
&C = 80\,954{,}90.10^{40} \text{ g cm}^2 ; \quad (C - A) : C = 1 : 305{,}59 \\
&A = 80\,689{,}99.10^{40} \text{ g cm}^2 ; \quad (C - A) = 264.91 \text{ g cm}^2 \qquad (21a)
\end{aligned}$$

Konačno se dobiva za teoretsku vrijednost sile teže na normalnom sferoidu:

$$\gamma_0 = 978{,}037 \,(1 + 0{,}00529391 \sin^2\varphi - 0.0000\,0903 \sin^2 2\varphi) \text{ gal} \quad . \quad (22)$$

Ona se može veoma lako preračunati na rotacioni elipsoid istih osi, srednji Zemljin elipsoid, ako se reducira s poznatim gradijentom slobodnog zraka:

$$- 0{,}3086 \,.\, 6{,}72 = - 2{,}2281 \text{ mgal}$$

Na taj se način dobiva:

$$\gamma_0 = 978{,}037 \,(1 + 0{,}00529391 \sin^2\varphi - 0.0000\,1164 \sin^2 2\varphi) \quad . \quad . \quad 22a)$$

Još moramo ispitati, koliko se taj rezultat može smatrati nehipotetski. Od uvrštenih veličina E, ω, C i W_0, prema definiciji normalnog sferoida, je neposredno empirijski zadana jedino brzina rotacije. Vrijednost C se zamjenjuje pomoću dinamične sploštenosti statičkom sploštenošću. Numeričku je vrijednost dinamičke sploštenosti izračunao Bullard korištenjem vrijednosti mase Mjeseca po Spencer-Jones-u ($m^{-1} = 81.27 \pm 0.021$) iz presecionih konstanti ($5493{,}156'' \pm 0.175''$). Nesigurnost leži uglavnom u masi Mjeseca, koja će se moći u skoroj budućnosti kontrolirati pomoću staza (putanja) umjetnih satelista. Pomoću njih se dobiva bitno bolja vrijednost za statičku sploštenost, nego se dosad mogla izračunati iz nejednakosti Mjesečevog gibanja. Teoretska ovisnost između statičke i dinamičke sploštenosti može tada biti iskorištena za ispitivanje Mjesečeve mase. Kod tog se pitanja radi, dakle, samo o empirijskom povećanju točnosti, a nikako ne o hipotetskom elementu. Nasuprot tome, sadrži zamjena mase Zemlje s vrijednosti sile teže na ekvatoru i zamjena vrijednosti potencijala s osi ekvatora hipotetske elemente, koji se mogu isključiti samo zajedničkim određivanjem normalnog sferoida i geoidnih undulacija. U tom se slučaju sila teže na ekvatoru mora dobiti gravimetrijski dok se vrijednost potencijala bitno ispravnije nadomješta zahtjevom jednakosti volumena. Međutim, ova pitanja već prelaze temu ove radnje.

LITERATURA:

E. C. Bulard: »The Figure of the Earth«, Monthly Notices Royal Astron. Society, Geophys. Suppl., vol. 5, no. 6, 1948.

W. A. Heiskanen: »Ist die Erde ein dreiachsiges Ellipsoid?«, Gerlands Beiträge zur Geophysik, Bd. 19, 1928 u. Astr. Nachr., Bd. 234, Dr. 5562, 1928.

K. Ledersteger: »Die mögliche Gleichgewichtsfiguren der rotierenden Erdmasse«, Zeitschrift f. Vermessungswesen, 84. Jg., Seite 73—90; Stuttgart 1959.

K. Ledersteger: »Die Stokesschen Konstanten und die Trägheitsmomente einer Gleichgewichtsfigur«, Österr. Zeitschrift f. Vermessungswesen, Heft 4, Wien, 1959. Izlazi doskora.

K. Ledersteger: »Die heterogenen sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren und das Normalsphäroid der Erde.« Geofisica pura e applicata, Bd. 44, Milano 1959. Izlazi doskora.

H. Spencer Jones: Mem. Roy. Astron. Soc., vol. 66, p. 60, 1941.