ZUR THEORIE DES NORMALSPHÄROIDES DER ERDE

von

Dr. K. Ledersteger, Wien

Die moderne Geodäsie ist erfreulicherweise bereits vielfach durch das Bestreben ausgezeichnet, den rein geometrischen Standpunkt durch einen physihalischen und relative Grössen möglichkeit hypothesenfrei durch absolute zu ersetzen. Leider aber hat sich diese Tendenz noch nicht allgemein durchgesetzt und lässt die Besinnung darauf, dass die Höhere Geodäsie ein wichtiger Zweig der Geophysik und damit reine Naturwissenschaft ist, noch vieles zu wünschen übrig. Gerechterweise muss man freilich zugeben, dass hieran die grossen Schwierigkeiten, die sich einer hypothesenfreien Erforschung des irdischen Schwerefeldes entgegenstellen, die Hauptschuld tragen. Aber dennoch glaube ich, dass man die Geodäten von einer gewissen konservativen Trägheit nicht ganz freisprechen darf, die sie veranlasst, an unzulänglichen Modellvorstellungen, ja sogar an Fiktionen festzuhalten, die sich zwar in der Praxis recht gut bewährt haben, jedoch einer strengen Kritik nicht standhalten können. Aber der gigantische Fortschrift der modernen Naturwissenschaft zieht auch den Geodäten in seinen Bannkreis und zwingt ihn, sich in steigendem Masse seiner naturwissenschaftlichen Sendung bewusst zu werden.

Die ungeheure Kompliziertheit der physischen Erdoberfläche macht eine punktweise Bescheibung erforderlich und hat daher eine Bezugsfläche zur Voraussetzung, die bei einfachem mathematischen Bildungsgesetz der wahren Form der Erde möglichst gerecht wird. So wurde 1924 das damals beste Gradmessungsellipsoid, seither als Internationales Ellipsoid bekannt, zur allgemeinen Referenzfläche für die Landestriangulationen emphohlen. Hieran wäre an sich auch nichts aussetzen, solange man sich dabei streng auf die rein geometrischen Aufgaben der Höheren Geodäsie beschränkt. 6 Jahre später hat man aber das Internationale Ellipsoid zum Niveauellipsoid deklariert und mit der internationalen Schwereformel gekoppelt, um so eine gemeinsame Bezugsfläche für die Landesvermessungen und das irdische Schwerefeld zu gewinnen. Der Grundgedanke war gut, die Ausführung aber durchtränkt von hyhothetischen Elementen, ganz abgesehen davon, dass das heterogene Niveauellipsoid trotz der so scharfsinnigen Lösung der Stokesschen Problemes durch Pizzeti und Somigliana güngstingstenfalls als eine geodätische Fiktion gewertet werden kann. Denn es lässt sich streng beweisen, dass eine inhomogene Gleichgewichtsfigur von rotationsellipsoidischer Gestalt undenkbar ist. Die Verfechter des Niveauellipsoides halten dem entgegen, dass 1. der Unterschied zwischen dem Normalsphäriod der Erde Pund einem Niveauellipsoid maximal nur wenige Meter betragen kann und daher praktisch bedeutungslos sei, und dass es 2. innerhalb gewisser Grenzen beganglos sei, welche Referenzfläche man der Bestimmung der Geoindulationen zugrundelegt, weil es nicht auf letztere, sondern auf die Polarkoordinaten des Geoides oder gar der physichen Ernoberfläche ankäme. Diese Argumente sind aber sehr leicht zu wiederlegen.

Zunächst ist nicht einzusehen, warum man am fiktiven Niveauellipsoid festhalten soll, wenn das Normalsphäroid korrekter und dazu noch einfacher zu gewinnen ist. Ausserdem wird dabei die Abplattung der Erdfigur streng physikalisch Wege erhalten. Schliesslich kann aus dem beobachteten Schwerematerial exakt nur die Schwereverteilung auf dem Normalphäriod, niemals aber auf dem fiktiven Niveauellipsoid abgeleitet werden. Man ersieht dies schon aus der merkwürdigen Zusammensetzung der internationalen Schwereformel, bei welcher die Schwereformel, bei welcher die Schwereabplattung mit Hilfe Clairautschen Theorems einfach der geometrischen Abplattung des Hayfordschen Ellipsoides angepasst wurde, während der Parameter 4.0 bereits durch die Annahme des Niveauellipsoides vorgegeben war, so dass aus den Beobachtungen einzig und und allein die Äqutorschwere γ_0 bestimmt wurde.

Der zweite Einwand aber ist ein bedenklicher Rückfall in die frühere, rein geometrische Denkungsweise. Man hat besonders in den letzten Jahren im Zuge der Neubegründung der astronomischen Geodäsie den Vorzug der gravimetrischen Lotabweichungen immer wieder mit den absoluten Lotabweichungen verwechselt. Was aber für die Lotabweichungen gilt, gilt zumindenst ebenso für die Undulationen. Nicht irgendwelche relative Undulationen brauchen wir zur Bestimmung der Radienvektoren der Geoidpunkte, sondern in erster Linie die absoluten Undulationen, welche erst ein streng physikalisches Studium des irdischen Schwerefeldes und des Aufbaues der Erdkruste ermöglichen. Eine Geometrisierung des Problemes, wie sie gerade in den letzten Jahren wiederholt propagiert wurde, um jegliche Hypothese über die Dichtverteilung in der Erdkruste zu verweiden, stellt meiner Meinung nach trotz des bewundernswerten Scharfsinns bei der mathematischen Entwicklung nicht einen wirklichen Fortschritt dar, sondern kommt eher einer Entthronung der Geodäsie als Naturwissenschaft gleich.

Eine derartige Kritik verpflichtet aber, einen neuen, physikalisch mehr berechtigten, wenn nicht ganz hypothesenfreien Weg zur Lösung des Problems der Erdfigur aufzuweisen. Es lässt sich zeigen, dass die beiden grossen Teilaufgaben dieses Problems, nähmlich die Bestimmung des Normalsphäroides einerseits und die Bestimmung der Undulationen des aktuellen Geoides gegenüber dem Normalsphäroid nur in wechselseitiger Durchdrigung, ja sogar mit einer weitgehenden Umkehrung, lösen lassen. Dennoch werde im folgenden das Problem des Normalsphäroides gesondert diskutiert, weil schon hieraus manch wichtige Grundlage für die Lösung des gesamten Problemes zu gewinnen ist.

Es liegt im Grunde sehr nahe, das Normalsphäroid der Erde als eine heterogene, sphäroidische Gleichgewichtsfigur zu definieren und dafür den Potentialausdruck des Helmertschen Rotations-Niveausphäroides 4. Ranges zu postulieren. Freilich ist zunächst die Zerlegung der Kugelfunktionsentwicklung des Schwerepotentials W in die Summe (U + T) rein formaler Natur. Man kann sich aber die Massen in der Erdkruste derart »regularisiert« denken, dass die Restfunktion T verschwindet. Auf diese Weise entstehen künstliche Geoide, welche mit ihren eigenenen Niveausphäroiden U_4

(1)

zusammenfallen. Ist ein solches künstliches Geoid die freie Oberfläche der regularisierten Erdmasse, so ist damit bereits eine notwendige, aber noch nicht hinreichende Bedingung für das hydrostatische Gleichgewicht erfüllt. Ferner sieht man sofort, dass eine sehr wichtige Eigenschaft aller Gleichgewichtsfiguren befriedigt ist: die Äquatorebene ist eine Symmetrieebene der Figuren mit dem Potentialausdruck 1). Dieser Ansatz erfüllt schliesslich noch eine weitere sehr wichtige Voraussetzung, nämlich die Rotationssymmetrie, welche für die sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren charakteristisch ist. In diesem Zusammenhang sei gleich kurz Stellung genommen zu der viel diskutierten Frage der Dreiachsigkeit der Erdfigur. Das aktuelle Geoid ist keine Figur des hydrostatischen Gleichgewichtes; es ist also denkbar, dass es rein geometrisch durch ein dreiachsiges Ellipsoid merklich besser approximiert wird als durch ein Rotationsellipsoid. Als eine solche Approximation ist z. B. das Ellipsoid von Krassowskij—Isotow gedacht. Wollte man jedoch für die physikalisch definierte Normalfigur der Erde Dreiachsigkeit in Anspruch nehmen. so stünde dies in krassem Widerspruch zur Theorie der Gleichgewichtsfiguren.

In 1) bedeutet E die Erdmasse, l den Radiusverktor des Niveausphäroides, φ' die geozentrische Breite, K die durch die Masse dividierte Differenz der Hauptträgheitsmomente

(2)

also eine Massenfunktion 2.0., und schliesslich D eine Massenfunktion 4.0.

(3)

Zur Potentialfunktion tritt noch die Formel für die theoretische Schwere auf dem Niveausphäroid

4)

und der Abstand des Niveausphäroides vom achsengleichen Rotatiosellipsoid (Radiusvektor s), für den sich unter Einführung des sogenannten Formparameters f der einfache Ausdruck

(5)

ergibt. Die maximale Erhebung des Niveausphäroides über das Ellipsoid tritt unter 45^0 Breite auf

(5a)

Das ganze Problem umfasst dann 13 Parameter und zwar neben der Erdmasse drei geometrische Parameter (a, α, h_m), die drei Parameter der theoretischen Schwere (γ_0, β, β_4), drei reine Massengrössen β die mittlere Dichte ϱ_m, die statische Abplattung K/a^2 und den Parameter $\delta = D/a^4$, und schliesslich noch drei weitere physikalische Grössen: die Rotationsgeschwindigkeit ω, den Potentialwert W_0 und das Verhältniss ε von Fliehkraft zur Schwere am Äquator.

Für diese 13 Bestimmungsstücke hat Helmert unter Beschränkung auf sphäroidische Figuren kleiner Abplattung und bei Entwicklung bis einschliesslich der Glieder 4.0. folgende 8 Gleichungen aufgestellt:

(6)

Hierin sind μ, β, ε, und K/a^2 Grössen 2.0., δ und β_4 Grössen 4.0., $-h_m/a$eine Grösse 5.—4.0., während Grössen 6.0., d.h. Grössen der Ordnung μ^3 vernachlässigt werden. Das System besitzt fünf »bedingt freie« Parameter, womit gemeint ist, dass die Parameter weder in ihrer Kombination, noch in ihren Zahlwerten absolut frei sind.

Das Helmertsche Gleichungssystem ist auf die homogenen MacLaurinschen Ellipsoide anwendbar und enthält daher unter seinen Lösungen sicher alle sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren. Da alle Rotationsellipsoide mögliche Gleichgewichtsfiguren einer bestimmten Masse sind und da sich an diese ebenso dicht die sphäroidischen Gleichsgewichtsfiguren anschliessen, muss es für die vorgegeben gedachte Erdmasse m i n d e s t e n s ∞^3 heterogene Gleichgewichtsfiguren geben. Das Helmertsche System hat für die Erdmasse anderseits ∞^4 Lösungen, wobei zu jeder Massenkonfiguration unendlich viele Niveausphäroide als äussere Niveauflächen gehören. Mithin kann es auch h ö c h s t e n s ∞^3 heterogene sphäroidische Gleichgewichtsfiguren geben. Die Lösungen des Helmertschen Systems umfassen daher die ∞^3 möglichen Gleichgewichtsfiguren mitsamt ihren äusseren Niveauflächen. Würde man die Gleichgewichtsbedingung, derzufolge in jeder Gleichgewichtsfigur notwendig und hinreichend die sämtlichen Niveauflächen guch Flächen gleicher Dichte sind, als eine 9. Gleichung zwischen den Parametern des Systems formulieren können, so könnte man aus den Lösungen eindeutig alle Gleichgewichtsfiguren herausgreifen.

Wohl das wichtigste System der fünf freien Parameter sind die sogenannten Stokesschen Elemente, nämlich die Masse E, die Rotationsgeschwindigkeit ω und eine die Masse umschliessende äussere Niveaufläche S = (a, ω, h_m). Nach dem Satz von Stokes gibt es dazu unendlich viele Massenanordnungen, falls nur eine 2. Massenanordnung möglich ist, welche die Stokesschen Elemente unverändert lässt. Dann sind die 8 übrigen Parameter des Helmertschen Systems »Stokessche Konstante«, d. h. Intergralinvarianten für alle zu denselben Stokesschen Elementen gehörigen möglichhen Massenanordnungen. Letztere sind bei rotierenden Figuren dadurch, dass mit der Rotationsachse auch der Schwerpunkt unverändert bleiben muss, bereits stark eingeschränkt; dennoch gibt es im allgemeinen noch immer unendlich viele Massenanordnungen zu einem System Stokesscher Elemente. Schreibt man z. B. einem homogenen MacLaurinschen Ellipsoid mit der Polarachse eine Kugel ein und gruppiert in dieser die Massen derart um, dass konzentrische Kugelschalen beliebiger Dichte entstehen, dann bleibt nicht nur das Potential an der

Oberfläche und im ganzen Aussenraum, sondern auch der Schwerpunkt unverändert. Jedoch sind jetzt die Massen innerhalb des Ellipsoides nicht mehr im hydrostatischen Gleichgewicht.

Es erhebt sich daher die Frage, ob es zu einem System Stokesscher elemente immer eine oder sogar mehrere Massenanordnungen im Gleichgewicht geben muss. Diese Frage kann sofort verneint werden. Denn da es ∞^3 sphäroidische Gleichgewichtsfiguren gibt, ist jede davon durch E und S allein bereits eindeutig bestimmt. Die Rotationsgeschwindigkeit kann also gar nicht willkürlich vorgegeben werden. Da aber anderseits die ∞^4 Lösungen des Helmertschen Gleichungssystemes nur ∞^3 geometrisch mögliche Figuren gegenqberstehen, muss jede dieser Flächen im allgemeinen äussere Niveaufläche von unendlich vielen Gleichgewichtsfiguren sein. Dass dem wirklich so ist, lässt sich auch folgendermassen zeigen. Kombiniert man eine beliebige Fläche $S = (a, \omega, h_m)$ mit irgendeiner Rotatiosgeschwindigkeit, so liegt zusammen mit E ein System Stokesscher Elemente vor und die Gleichungen geben eindeutige Lösungen für die übrigen 8 Parameter, darunter auch für die Massengrössen K und D. Diese sind als Stokessche Konstante Integralinvarianten für alle möglichen Massenanordnungen, unter denen sich auch die durch E, ω, K und D eindeutig bestimmte Gleichgewichtsfigur befinden muss. Eine genauere Analyse lehrt, dass die Reihe der Gleichgewichtsfiguren, welche eine gegebene Fläche S zur gemeinsamen äusseren Niveaufläche haben, mit einem homogenen Ellipsoid von maximaler Rotationsgeschwindigkeit beginnt und schliesslich für einen bestimmten Minimalwert von ω mit jener Gleichgewichtsfigur endet, für welche die gegebene Fläche S zur freien Oberfläche wird.

Dies führt bereits auf zwei sehr wichtige Sonderfälle. Ist die gegebene Fläche 5.—S ein Rotationsellipsoid : $S = (a, \omega, h_m = 0)$, so fällt für dieses das Ausgangsellipsoid der soeben beschriebenen Reihe mit der Endfigur zusammen, d. h. das Maximum und Minimum der Rotationsgeschwindigkeit sind identisch und es gibt nur eine einzige Massenanordnung im Gleichgewicht, eben das durch S bestimmte MacLaurinsche Ellipsoid. Damit aber steht a priori erstmalig fest, dass es unmöglich eine heterogene Gleichgewichtsfigur von rotationsellipsoidischer Gestalt geben kann. Das theoretisch anscheinend so wohlbegründete Niveauellipsoid ist physikalisch unmöglich und kann höchstens als Fiktion gelten. Den zweiten Sonderfall stellen die sogenannten Sphäroide der grössten Massenkonzentration dar, deren es ∞^2 gibt, da sie ja als äussere Niveauflächen des rotierenden Massenpunktes gedacht sind, der selbstverstäindlich selbst eine Fiktion ist. Hier tritt an Stelle eines endlichen homogenen Ausgangsellipsoides der Massenpunkt, d. h. die Reihe der Gleichgewichtsfiguren, welche das gegebene Sphäroid der grössten Massenkonzentration zur gemeinsamen äusseren Niveaufläche besitzen, beginnt hier mit einer Sphäroid selbst zu einer Gleichgewichtsfigur wird.

Bevor wir aus diesen interessanten Figurenreihen den entscheidenden Schluss ziehen können, müssen wir uns noch einer anderen Frage zuwenden. Es wurde oben betont, dass die 5 freien Parameter des Helmertschen Systems nur »bedingt frei« sind und wir müssen daher die Kennzeichen der physikalisch unmöglichen Lösungen des Helmertschen Systems diskutieren. Zunächst ist klar, dass K niemals negativ sein kann. Denn die Differenz der Hauptträghitsmomente $(C - A)$ ist wesentlich positiv; sie erreicht den Wert Null in den Grenzfällen der ruhenden Kugel und des rotierenden Massenpunktes sowie in der Hüllfläche der heterogenen Gleichgewichtsfiguren, wie sich später noch weisen wird. Aber auch die Massenfunktion D verschwindet gerade in den beiden erstgenannten Fällen, woraus folgt, dass auch D stets $\geqq 0$ ist. Besonders wichtig ist ferner der Formparameter f. In einem geometrischen Koordinatensystem mit den drei Achsen $a, \omega\, h_m$, erfüllen die homogenen MacLaurinschen Ellipsoide den Streifen $0 \leqq a < \infty$, $0 \leqq \mu \leqq 1$ der (a, ω) — Ebene Sämtliche inhomogenen Figurenreihen gehen aus irgendeinem homogenen Ellipsoid durch fortgesetzte Massenkonzentration hervor, welche allerdings auf die mannigfachste Weise mit einer Kontraktion oder Expansion der Figuren verknüpft sein kann. Daraus folgt bereits, dass die heterogenen Figuren nur auf einer Seite der Fundamentalebene liegen können, d. h. dass der Formparameter einheitliches Vorzeichen haben muss. Für die Sphäroide der grössten Massenkonzentration ergibt sich $f = -3\,\mu^2/2$ also wesentlich negativ. Wohl sind diese Sphäroide als äussere Niveauflächen definiert. Da aber jede Gleichgewichtsfigur im allgemeinen gleichzeitig äussere Niveaufläche von unendlich vielen anderen Gleichgewichtsfiguren mit anderen Rotationsgeschwindigkeiten ist, darf man schliessen, dass stetst $f \leqq 0$

ist. Ebensowenig kann auch die Ableitung df/da bei den äusseren Niveauflächen einer Gleichgewichtfigur positiv werden. Denn sonst müsste es ja möglich sein, dass sich unter diesen äusseren Niveauflächen auch ein Rotationsellipsoid befindet, was der oben gefundenen Sonderstellung der Rotationsellipsoide widerspricht.

Nach diesen Zwischenbemerkungen wenden wir uns wieder der Reihe der heterogenen Glichgwichtsfigurn mit gemeinsamer äusserer Niveaufläche zu. Fragt man nach jener dieser Figuren, so liegen wohl die vier Bestimmungsstücke E, K, D und ω vor, die aber nicht zur Lösung des Helmertschen Systems genügen. Man kann aber für äquidistante Werte von a eine Reihe von Lösungen finden, welche alle weiteren und zwar tiefer liegenden äusseren Niveauflächen der gesuchten Gleichgewichtsfigur darstellen. Sie bilden eine parabelähnliche Kurve, deren tiefster Punkt offenbar die gesuchte Gleichgwichtsfigur repräsentiert. Damit ist aber ein sehr bemerkenswertes Kriterium der Gleichgewichtsfiguren gefunden; sie sind durchwegs durch ein Minimum des Absolutbetrages des Formparameters ausgezeichnet! Es muss also an der Oberfläche jeder Gleichgewichtsfigur die Ableitung df/da verschwinden:

(7)

Man kan 7) als Gleichung für δ auffassen und als 9. Gleichung dem Helmertschen System anschliessen. Eliminiert damit noch δ aus den übrigen Gleichungen, so liegen 9 Parameter in Funktion der vier restlichen : E, a, ω und ε vor.

(8)

Dieses neues System hat jetzt für die gegebene Erdmasse E nur mehr ∞^3 Lösungen und liefert alle sphäroidischen Gleichoewichtsfiguren. Setzt dan h = 0, so müssen die MacLaurinschen Ellipsoide resultieren. Dass die Gleichung 7) tatsächlich ein vollwertiger Ersatz der fehlenden Gleichgewichtsbedingung ist, kann auf folgendem Wege gezeigt werden. Man setzt in der 3. Gleichung 8) linkerhand den für alle homogenen Ellipsoide geltenden Wert

ein und findet damit

(8a)

und weiter aus der 6. Gleichung nach leichter Transformation die bekannte MacLaurinsche Bedingung

(8b)

Die Spezialisierung des Systemes 8) auf die homogenen MaäLaurinschen Ellipsoide liefert so:

(9)

Für die Prüfung des Masses der erreichten Massenkonzentration in einer heterogenen Gleichgewichtsfigur eignen sich besonders die Sphäroide der grössten Massenkonzentration. Man erhält sie unmittelbar aus dem Helmertschen System, wenn man K = D = δ = 0 setzt. Damit reduziert sich das System auf 7 Gleichungen für 10 Parameter:

(9a)

Die hohe Bedeutung der Gleichung 7) liegt darin, dass sie ganz generell für alle sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren aufgestellt werden kann; sie ist völlig unabhängig vom Dichtegesetztund zwar nicht nur im Sinne einer Unabhängigkeit von der Kenntnis des jeweiligen Dichtegesetzes, sondern in dem viel weiter reichenden Sinne einer Gültigkeit für alle möglichen Dichtgesetze. Hingegen hat jede inhomogene Gleichgewichtsfigur ihr streng individuelles Dichtegesetz. Denn ist z. B. durch E, ω, K und D eine dieser Figuren eindeutig bestimmt, so liegen damit nicht allein die freie Oberfläche, sondern selbstverständlich auch alle inneren Niveauflächen und damit das Dichtegesetz fest. Für die homogenen Ellipsoide ist es dank des einfachsten Dichtgesetzes ϱ = const gelungen, die Gleichgewichtsbedingung mathematisch brauchbar zu formulieren. Ob es aber je gelingen wird, diese Bedingung für alle heterogenen Figuren in einer Beziehung zwischen den Helmertschen Parametern 2.0. ε und μ auszudrücken, scheint recht fraglich. Daher ermöglicht einzig und allein die nachgewiesene Minimumeigenschaft des Formparameters die numerische Berechnung heterogener Gleichgewichtfiguren.

Infolge der Eindeutigkeit des jeweiligen Dichtegesetzes erscheinen auch die Stockesschen Konstanten in einem neuen Licht. Wir haben gesehen, dass ein willkürliches System der Stokesscen Elemente im allgemeinen überhaupt keine Gleichgewichtfigur ergibt, sondern nur eine äussere Niveaufläche einer solchen. Es gibt also im Innern der Fläche S bei der vorgegebenen Rotationsgeschwindigkeit nur eine einzige Massenanordnung im Gleichgewicht, daneben aber unendlich viele weitere Anordnungen, welche die Gleichgewichtsbedingung nicht erfüllen. Denkt man nur an die Gleichgewichtsfiguren, so sind die Stokesschen Konstanten wohl unabhängig von der Kenntnis des Dichtegesetzes, aber nicht Integralinvarianten für verschiedene Dichtverteillungen im Innern, die es dann gar nicht gibt.

Wir wissen bereits, dass mit K die Differenz der Trägheitsmomente (C-A) eine echte Stokessche Konstante ist. Jedoch ist es eigentlich selbstverständlich, dass die Trägheitsmomente einer sphäroidischen Gleichgewichtsfigur gewinnt man bei Vernachlässigung der Glieder 4.0. verhältnismässig leicht die klassischen Näherungs formel:

(10)

wenn man die inneren sphäroidischen Niveauflächen oder Flächen gleicher Dichte durch volumgleiche Kugeln mit den Radien r ersetzt denkt und r_0 den entsprechenden Oberflächenwert darstellt. In diesen Ausdrücken ist das 2. Integral wegen

(11)

sicherlich eine Stokessche Konstante. Mit Hilfe der berühmten Transformation von Radau (1885) kann aber auch das 1. Integral mit guter Annäherung in Funktion von E, r_0, μ und ε dargestellt werden, woraus folgt, dass die Trägheitsmoments selbst genäherte oder sogenannte »Quasi-Stokessche Konstante« sind, z. B.

(12)

Dies steht jetzt keineswegs im Widerspruch mit der oben konstantierten Abhängigkeit der Trägheitsmomente von der Massenanordnung. Den (12) gilt nur für Gleichgewichtsfiguren und besagt daher bloss, dass die Trägheitsmomente genähert reine Funktionen der Stokesschen Elemente und als solche unabhängig sind von der Kenntnis des streng individuellen Dichtegesetzes! Die Möglichkeit einer solchen Darstellung ist also geradezu umgekehrt ein Beweis für die Eindeutigkeit des Dichtegesetzes.

Verbintet man (12) mit der genäherten Relation:

(13)

so erhält man für den Reziprokwert der dynamischen Abplattung die wichtige Formel

(14)

die man dazu benützt hat, mit Hilfe des empirischen ε Wertes $\varepsilon = 0{,}0034678$ die geometrische Abplattung aus der genaueren dynamischen Abplattung herzuleiten. Mit dem Bullardschen Wert der dynamischen Abplattung 1 : 305,59 ergibt sie $1 : \mu = 279{,}49$, welches Ergebnis der Wahrheit recht nahe kommt.

Ausser der oben betrachteten Reihe der Gleichgewichtsfiguren mit gemeinsamer äusserer Niveaufläche gibt es noch zahlreiche andere. Z. B. kann man aus den ∞^2 homogenen Ellipsoiden lineare Reihe herausgreifen, indem man einen physikalischen Parameter festhält, etwa die Reihe (ω) jener MacLaurinschen Ellipsoide, welche ihre Umdrehung in einem Sterntag vollenden. Mit 2 physikalischen Parametern erhält man ein bestimmtes MacLaurinsches Ellipsoid, von welchem eine lineare Reihe heterogener sphäroidischer Gleichgewichtsfiguren ausgeht, für welche durchwegs dieselben beiden Parameter konstant sind. Wir wählen die Reihe (ω, K). Eine einfache Überlegung zeigt dann, dass in dieser Reihe mit der Differenz der Trägheitsmomente auch diese selbst und damit auch die dynamische Abplattung konstant sein muss. Da das Trägheitsmoment C keine Stokessche Konstante im Sinne einer Integralinvariante ist, scheint es nicht unter den Parametern des Helmertschen Gleichungssystemes auf. Wir müssen uns daher an den homogenen Ellipsoiden orientieren, für welche C dank des bekannten Dichtegesetzes berechnet werden kann. Es zeigt sich, dass sich in der Reihe (K) die Rotationsschwindigkeit von Figur zu Figur mit C und umgekehrt in der Reihe (K) mit K ändert, während sich in der Reihe (ω) C u n d K gesetzmässig ändern. Dasselbe müsste selbverständlich auch für die heterogenen Figurenreihen gelten. Mithin hat die gleichzeitige Konstanz von K und ω in der Reihe (ω, K) sind demnach identisch. Dies ist für die Theorie des Normalsphäroides von fundamentaler Bedeutung.

Die interessante Reihe (ω, K) $\equiv$ (ω, C, beginnt mit einem MacLaurinsche Ellipsoid der Achse a = 5819,4 km und der Abplattung $\mu = 1 : 305{,}1$ und erstreckt sich theoretisch ins Unendliche. Sie ist dadurch ermöglicht, dass die zunehmende Massenkonze ntration gegen den Schwerpunkt mit einer kräftigen Expansion der Figuren verbunden ist. Wegen der beschränkten Genaigkeit der Formeln (9) kann sie natürlich nicht weit verfolgt werden. Auffallend ist die langsame Zunahme der Abplattung. Auf dem weiten Wege vom homogenen Ausgangsellipsoid bis zum Normalsphäroid der Erde, welches, wie wir bald sehen werden, auf Grund seiner Definition dieser Reihe angehören muss, nimmt die Abplattung trotz der Achsenzunahme von 559 km nur von 1 : 305 bis auf 1 : 297 zu. Berechnet man noch die Figur : a = 6800 km, $\mu = 1 : 283{,}2$. so kann man das Mass der bereits erreichten Massenkonzentration durch den Vergleich mit dem zugehörigen Sphäroid der grössten Massenkonzentration, d. h. mit der äusseren Niveaufläche des in einem Sterntag rotierenden Massenpunktes in der Höhe a = 6800 km überprüfen. Für dieses Sphäroid finden wir die Abplattung $\mu = 1 : 477{,}8$, was besagt, dass die Massenkonzentration nur verhältnismässig langsam fortschreitet. Ein derartiger Vergleich ist ganz allgemein ein sehr wichtiges Kriterium für die Massenanordnung. Stimmen Achse und Abplattung des Sphäroides der grössten Massenkonzentration für die gleiche Rotationsgeschwindigkeit mit den geometrischen Dimensionen einer beliebigen Gleichgewichtsfigur überein, so ist dies ein klarer Hinweis auf eine bereits weit fortgeschrittene Massenkonzentration. Es gibt übrigens noch ein zweits Kriterium hierfeir, nämlich den Abstand einer Figur von der Hullfläche der sphäroidischen Gleichgewichtsfiguren.

Hält man Achse und Abplattung fest, so entsteht eine Figurenreihe, welche sich in unserem Koordinatensystem als Parallele zur h_m-Achse abbildet. Ausgehend vom entsprechenden homogenen Ellipsoid (a, μ, $h_m = 0$) wächst in dieser Reihe mit dem Absolutbetrag des Formparameters $|f| = \frac{5}{4} \varepsilon (5 \varepsilon - \mu)$ sowohl ε wie μ, während K dauerd abnimmt. Die Grenzfigur in der Hüllfläche ist dann durch K = 0 bestimmt. Da dieser Wert natürich nur bei volllständiger Massenkonzentration erreicht werden kann, in welchem Falle gar keine Gleichgewichtsfigur mehr vorliegt, wird sich jede unendliche Reihe nach einer gewissen Annäherung an die Hüllfläche entlang dieser ins Unendliche hinziehen. Die erwähnte Grenzfigur für ein gegebenes Wertepaar a und μ ist also durch

(15)

gegeben. Für die obige est $\varepsilon = 42\,0617.10^{-8}$, während die letzte Formel den Maximalbetrag $71\,4634.10^{-8}$ liefert. Es zeigt sich tatsächlich, dass wir uns noch weit unter der Hüllfläche befinden.

Wir haben gesehen, dass jede Gleichgewichtsfigur durch E und S = (a, μ h m) eindeutig festliegt. Beim Problem des Normalsphäroides der Erde aber umgekehrt die Gestalt gesucht. Wir müssen daher das Normalsphäroid der Erde ausser durch E durch drei passend gewählte physikalische Parameter definieren. Unter diesen muss auf jeden Fall die Rotationsgeschwindigkeit sein. Weil ferner bei Abstraktion von äusseren Kräften der Drehimpuls oder das Rotationsmoment ωC erhalten bleiben muss, muss als 2. Parameter das Hauptträgheitsmoment C in die Definition aufgenommen werden. Der 3. Parameter wird zweckentsprechend der Potentialwert W_0 des Geoides sein. Wir definieren also:

»Das Normalsphäroid der Erde ist jene sphäroidische Gleichgewichtsfigur der Erdmasse, welche mit der wirklichen Erde die Rotationsgeschwindigkeit, das Hauptträgheitsmoment C und den Potentialwert des Geoides gemeinsam hat. Das mit diesem Normalsphäroid achsengleiche Rotationsellipsoid ist das mittlere Erdellipsoid und dient als Bezugsfläche für die Grosstriangulationen und für das irdische Schwerefeld«.

Von den genannten Parametern ist aber nur die Rotationsgeschwindigkeit empirisch gegeben:

(16)

An Stelle des Trägheitsmomentes C verwenden wir den von Bullard aus der Präzessionskonstanten abgeleiteten Wert für die dynamische Abplattung

(17)

An Stelle der primär unbekannten Erdmasse E wird der von Heiskanen bestimmte und für die Schwere auf dem Äquator verwendet, der allerdings um 2 mgal verringert wird, um schon jetzt den Fehler des Potsdamer Schweresystems genähert zu eliminieren:

(18

Als Ersatz für den gleichfalls primär unbekannten Potentialwert W_0 dient die Äquatorachse

(19)

welcher Wert möglicherweise noch um einige Zehnermeter zu gross ist.

Mit den gegebenen Daten findet man unmittelbar $\varepsilon = 34\,6782.10^{-8}$. Da die dynamische Abplattung kein Parameter des Systemes (8) ist, muss sie im Zuge der Rechnung durch die Grösse K ersetzt werden, was durch den Rückgang auf das homogene Ausgangsellipsoid der Reihe $(\omega, K) \equiv (\omega, C)$ möglich ist. Man ergänzt das für die MacLaurinschen Ellipsoide aufgestellte System (9) um die beiden Gleichungen:

(20)

leitet damit aus der gegebenen dynamischen Abplattung die geometrische Abplattung des Ausgangsellipsoides $\mu_e = 32\,7773 . 10^{-8}$ ab und findet sodann aus der 2. Form der 6. Gleichung 9) die Ellipsoidachse $a = 5\,819\,462$ m, wenn für die Erdmasse in 1. Näherung der »internationale »Wert $E = 5976,505 . 10^{24}$ g verwendet wird. Die 3. Gleichung liefert nun $K = 44\,328,86 . 10^{10}$ cm^2, woraus sich mit der Achse 19) als statische Abplattung des Normalsphäroides $10\,8963 . 10^{-8}$ ergibt. Damit gehen wir in das System 8) ein und erhalten aus der 3. Gleichung die geometrische Abplattung des Normalsphäroides $\mu = 33\,6267 . 10^{-8}$ und anschliessend mit 18) aus der 2. Gleichung die zweite Näherung für die Erdmasse $E = 5976,2591 . 10^{-24}$ g.

Wiederholt man die ganze Rechnung mit diesem Wert, so kommt man auf die dritte Näherung $E = 5976,2594 . .10^{24}$ g, sodass eine weitere Näherung überflüssig erscheint. Man findet also in sich geschlossene System für die geometrischen und physikalischen Daten des Normalsphäroides der Erde:

(21)

Mit der ersten Formel 20) kann dieses System noch ergänzt werden:

(21a)

Schliesslich ergibt sich die theoretische Schwere auf dem Normalsphäroid

(22)

Sie kann leicht auf das achsengleiche Rotationsellipsoid, das mittlere Erdellipsoid, übertragen werden, indem man mit dem bekannten Freiluftgradienten wegen $h_{,,}$ reduziert.

$$-0{,}3086 \cdot 6{,}72 = -2{,}2281 \text{ mgal}$$

Damit findet man:

(22a)

Es bleibt noch kurz zu prüfen, wieweit dieses Resultat als hypothesenfrei gelten darf. Von den in der Definition des Normalsphäroides verankerten Grössen E, ω, C und W_0 ist unmittelbar empirisch gegeben nur die Rotationsgeschwindigkeit. Die Grösse C wird über die dynamische Abplattung durch die statische Abplattung ersetzt. Der numerische Wert der dynamische Abplattung wurde von Bullard unter Benützung des Wertes für die Mondmasse von Spencer—Jones ($m^{-1} = 81{,}271 \pm 0{,}021$) aus der Präzessionskonstanten (5493, 156" ± 0,175") hergeleitet. Die Unsicherheit liegt hauptsächlich in der Mondmasse, welche wohl in naher Zukunft aus den Bahnen der künstlichen Satelliten kontrolliert werden kann. Denn diese ergeben einen bedeutend besseren Wert für die statische Abplattung, als er bisher aus den Ungleichheiten der Mondbewegung gewonnen wurde. Der theoretische Zusammenhang zwischen statischen und dynamischen Abplattung kann dann umgekehrt zur Prüfung der Mondmasse herangezogen werden. Bei dieser Frage handelt es sich also bloss um die empirische Genauigkeitssteiguerung, nicht aber um ein hypothetisches Element. Hingegen enthält die Vertretung der Erdmasse durch die Äquatorsuchwere und die Vertretung des Potentialwertes durch die Äquatorachse hypotetische Elemente, die nur durch eine gemeinsame Bestimmung des Normalsphäroides und der Geoidundulationen ausgeschaltet werden können. Dort wird die Äquatorschwere streng gravimetrisch zu ermitteln sein, während der Potentialwert wesentlich korrekter durch die Forderung der Volumgleichheit ersetzt wird. Doch überschreiten diese Fragen bereits das Thema des vorliegendes Aufsatzes.