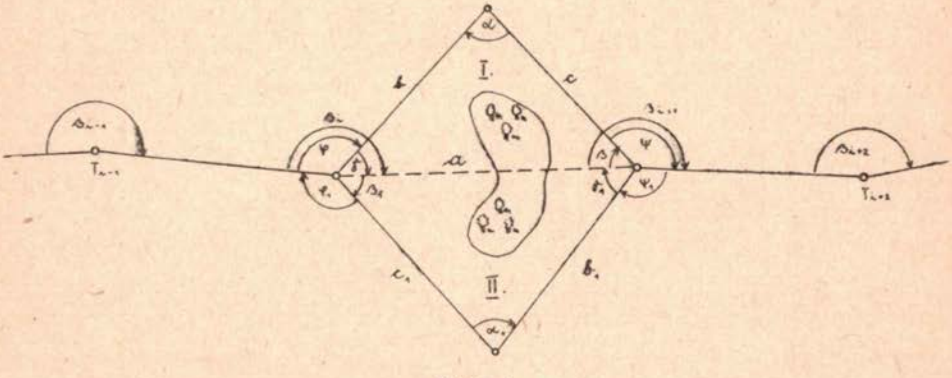
Ing. ALEKSANDAR MILOŠEVIĆ — Beograd

NAJCELISHODNIJI OBLIK TROUGLA KOJI JE ODREĐEN DVEMA STRANAMA I ZAHVAĆENIM UGLOM

Novi pravilnik za državni premer u članu 63 govori o indirektnom određivanju prelomnih uglova i dužina poligonskih strana u vlaku.

Razmotrićemo onaj slučaj, gde zbog neke prepreke nije moguće direktno meriti poligonsku stranu a i prelomne uglove β_i i β_{i+1} vlaka (sl. 1.), već će se te veličine odrediti indirektno pomoću trougla, u kome su merene dve strane b i c i zahvaćeni ugao α.



Slika 1.

Tražene veličine određuju se prema propisima Pravilnika iz dva trougla kao, proste aritmetičke sredine:

$$\left.\begin{aligned} \beta_i &= \frac{(\gamma+\varphi)+\{360^\circ-(\beta_1+\varphi_1)\}}{2}, \\ \beta_{i+1} &= \frac{(\beta+\phi)+\{360^\circ-(\gamma_1+\phi_1)\}}{2} \qquad a=\frac{a_I+a_{II}}{2} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

gde a_I i a_{II} znače vrednosti tražene strane a, sračunate iz trouglova I i II.

Kao najcelishodniji trougao smatraćemo onaj, u kome će tražene veličine a, β i γ imati istu ili veću težinu (istu ili manju srednju pogrešku) kao te iste veličine, kad bi se izmerile direktno.

Srednju pogrešku tražene strane a prema formuli (1) obeležićemo sa M_a; srednju pogrešku te strane sračunatu iz jednog trougla sa m_a, dok srednju pogrešku strane iste veličine, direktno merene, sa m'_a.

Najcelishodniji trougao biće u onom slučaju, ako je zadovoljen odnos:

$$M_a = \frac{m_a}{\sqrt{2}} \overline{\overline{<}} m'_a \tag{2}$$

Ako na isti način označimo srednje greške traženih uglova β i γ sa m_β i m_γ; srednje greške tih uglova ako bi se oni direktno merili sa m'_β i m'_γ, onda bi za najcelishodniji trougao važio odnos:

$$m_\beta \overline{<} m'_\beta \text{ i } m_\gamma \overline{<} m'_\gamma$$

To proizlazi iz ranijeg istaknutog uslova da težine sračunatih veličina budu jednake kao i one direktno merenih.

Postavljeni zadatak se može rešiti na osnovu razmatranja srednjih grešaka traženih veličina a, β i γ u trouglu, koji je određen dvema stranama **b** i **c** i zahvaćenim uglom α.

Taj se zadatak može rešiti pomoću tangentnog ili kosinusovog pravila. Odabrali smo tangentni, koji glasi:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{\beta-\gamma}{2} = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\frac{\beta+\gamma}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\beta &= 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\\ \gamma &= 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b-c}{b+c}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

Dužinu a računamo po sinusnom pravilu:

$$a = \frac{b}{\sin\beta}\sin\alpha = \frac{c}{\sin\gamma}\sin\alpha$$

Neka su srednje pogreške direktno izmerenih veličina m_b, m_c i m_α. Srednje greške trašenih veličina m_β, m_γ i m_a dobićemo iz totalnog diferencijala funkcija 2' u kome ćemo diferencijalne promene zameniti srednjim greškama t. j.:

$$m_\beta = \sqrt{\left(\frac{\partial\beta}{\partial b} m_b\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial c} m_c\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} m_\alpha\right)^2}$$

Diferencirajmo sada formulu 2' za kut β parcijalno po **b**, **c** i α pa će parcijalne devivacije u konačnom obliku biti:

$$\frac{\partial\beta}{\partial b} = \frac{\sin\gamma}{a}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial c} = -\frac{\sin\beta}{a}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} = -\frac{\sin\beta\cos\gamma}{\sin\alpha}$$

Ako ove veličine uvrstimo u gornju formulu za srednju pogrešku dobićemo izraz za srednju pogrešku kuta β:

$$m_\beta = \pm\sqrt{\left(\frac{\sin\gamma}{a} m_b\right)^2 + \left(\frac{\sin\beta}{a} m_c\right)^2 + \left(\frac{\sin\beta\cos\gamma}{\sin\alpha} m_\alpha\right)^2} \tag{3}$$

Analogno ovom izvodu dobija se i srednja pogreška za kut γ:

$$m_\gamma = \pm\sqrt{\left(\frac{\sin\gamma}{a} m_b\right)^2 + \left(\frac{\sin\beta}{a} m_c\right) + \left(\frac{\cos\beta\sin\gamma}{\sin\alpha} m_\alpha\right)^2} \tag{4}$$

Stranu **a** možemo izračunati bilo pomoću sinusne ili kozinusne formule. Koristićemo za ovu svrhu kozinusnu formulu, pa ćemo na osnovu nje izračunati i srednju pogrešku m_a strane **a**.

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha} \tag{5}$$

$$m_a = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial b} m_b\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial c} m_c\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial\alpha} m_\alpha\right)^2} \tag{6}$$

gdje ćemo nakon diferenciranja formule (5) imati:

$$\frac{\partial a}{\partial b} = \cos\gamma\ ;\quad \frac{\partial a}{\partial c} = \cos\beta \quad i \quad \frac{\partial a}{\partial\alpha} = b\sin\gamma$$

Uvrstimo li ove vrednosti u formulu (6) dobićemo traženu srednju pogrešku za stranu **a** tj.:

$$m_a = \pm\sqrt{(\cos\gamma\, m_b)^2 + (\cos\beta\, m_c)^2 + (b\sin\gamma\, m_\alpha)^2} \tag{7}$$

Mi smo kod ovog razmatranja postavili uslov, da prelomni uglovi β_2 i β_{i+1} treba da imaju istu (ili veću) težinu, koju imaju i direktno mereni prelomni uglovi. Iz tog uslova jednostavnim izvođenjem dolazi se do zaključka o najcelishodnijem obliku trougla. To će biti onda, ako je $b = c$ t j. u slučaju ravnokrakog trougla.

Dosledno tome kako unutarnji uglovi β, γ, β_1 i γ_1 tako i spoljni φ, φ_1 te ψ i ψ_1 treba da imaju jednake težine kao i direktno mereni prelomni uglovi β_{i-1} i β_{i+2} tj.

$$m_{i-1} = m_{\varphi} = m_{\varphi 1} = m_{\gamma} = m_{\beta 1} = m_{\beta} = m_{\gamma 1} = m_{\psi} = m_{\psi 1} = m_{i+2}$$

U ravnokrakom trouglu biće sada uglovi β i γ jednaki, pa ako u formulama (3) i (6) postavimo da je $\beta = \gamma$ odnosno $m_b = m_c$ to ćemo za ravnokraki trougao dobiti:

$$m_{\beta} = m_{\gamma} = \pm \sqrt{2\left(\frac{\sin\beta}{a} m_b\right)^2 + \left(\frac{\sin 2\beta}{2\sin\alpha} m_{\alpha}\right)^2} = \pm \sqrt{2\left(\frac{\sin\beta}{a} m_b\right)^2 + \left(\frac{m_{\alpha}}{2}\right)^2} \quad (8)$$

$$m_a = \pm \sqrt{2(\cos\beta\, m_b)^2 + (b \sin\beta\, m_{\alpha})^2} \quad (9)$$

Preglednosti radi uzimamo da je posmatrani poligon na zemljištu razreda »B«, tj.

a) da su strane izmjerene čeličnom pantlikom od 50 m. povećanom tačnošću (Pravilnik za državni premer II deo, čl. 7., B, t. 3), dva puta (Pravilnik II, čl. 25, stav /3/), za čiju je razliku propisano dozvoljeno odstupanje $\Delta_{pt} = 0{,}0025\sqrt{d'}$ (Pravilnik II čl. 42, s /1/):

b) Da su prelomni i vezni uglovi izmereni s ocenom čitanja od 6″ u 2 girusa (Pravilnik II, čl. 7, B, t. 2) s dozvoljenim otstupanjem razlike oba opažanja, kada je vizirano na značke, $\Delta_{\beta} = 60''$ (Pravilnik II, čl. 59, s. /2/, t. 2) i

c) Da su strane **b** i **c** i zahvaćeni ugao α, posmatranog računskog trougla (sl. 1), opažani isto onako i sa istim dozvoljenim otstupanjem kako je propisano za poligonske strane i prelomne uglove vlaka. (Pravilnik II, čl. 63, s/6/).

Za dozvoljeno otstupanje $\Delta_{l_1 - l_2}$ razlike dva opažanja jednake tačnosti $(l_1 - l_2)$ neke veličine (ugla ili poligonske strane) uzeta je pri izradi Pravilnika II trostruka sr. greška razlike $(m_{l_1 - l_2})$:

$$\Delta_{l_1 - l_2} = 3 m_{l_1 - l_2}$$

no kako je:

$$m_{l_1 - l_2} = m_l \cdot \sqrt{2}$$

gde je m_l sr. greška jednog merenja, to se dobije:

$$m_l = \frac{m_{l_1 - l_2}}{\sqrt{2}} = \frac{\Delta_{l_1 - l_2}}{3\sqrt{2}} \quad (10)$$

Definitivna vrednost neke veličine iz dva merenja jednake tačnosti (l_1 i l_2) izračunava se po formuli proste aritmetičke sredine $L = \frac{l_1 + l_2}{2}$. stoga je srednja greška definitivne vrednosti:

$$M_L = \frac{m_1}{\sqrt{2}}$$

gde je m_1 sr. greška jednog merenja. Zamenom iz form. (10) imamo:

$$M_L = \frac{\Delta_{l_1 - l_2}}{6} \tag{11}$$

Znači, da ćemo za izabrani primer imati:

$$m_\alpha = m'_\beta = \frac{\Delta\beta}{6} = \frac{60''}{6} = \pm 10''$$

gde m'_β znači sr. grešku ugla β ako bi bio direktno izmeren dva puta i za definitivnu vrednost uzeta prosta aritmetička sredina i

$$m_b = \frac{\Delta_{pt}}{6} = \pm \frac{25}{6} 10^{-4} \sqrt{b}; \qquad m'_a = \pm \frac{25}{6} 10^{-4} \sqrt{a}$$

Ovde su strane **a** i **b** izražene u metrima, koeficient ima dimenziju dim $\left[\frac{25}{6} 10^{-4}\right] = m^{1/2}$, a m'_a je sr. greška strane a, ako bi bila direktno izmerena (dva puta i definitivna vrednost sračunata po formuli proste aritmetičke sredine). Za najcelishodniji trougao je:

$$M_a = \frac{m_a}{\sqrt{2}} = m'_a = \frac{25}{6} 10^{-4} \sqrt{a} \tag{12}$$

i još

$$m_\beta = \pm 10''$$

Zamenom gornjih veličina za m_α i m_b u formulu (8) imamo da je

$$\left(\frac{10}{\varrho''}\right)^2 = 2\left(\frac{\sin\beta}{a} \cdot \frac{25}{6} \cdot 10^{-4} \sqrt{b}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{10}{\varrho''}\right)^2 \tag{8'}$$

U ovu formulu uvrstit ćemo da je:

$$\frac{b}{a^2} \sin^2\beta = K$$

i izračunati da je $K = \frac{27}{1250}\left(\frac{10^5}{\varrho''}\right)^2 = 50{,}7695 \cdot 10^{-4}$

Kako je u ravnokrakom trouglu

$$b = \frac{a}{2\cos\beta}$$

to će se zamenom ove veličine u izrazu za K konačno dobiti da je:

$$\cos^2\beta + 2aK\cos\beta - 1 = 0 \tag{8''}$$

Iz ove formule se može sada izračunati strana a t. j.

$$a = \frac{1 - \cos^2\beta}{2K\cos\beta}$$

gde je dim $[a] = m$, a dim $[K] = m^{-1}$

Prema formulama (9) i (12) imamo da je:

$$2\left(\cos\beta \cdot \frac{25}{6} \cdot 10^{-4}\sqrt{b}\right)^2 + (b\sin\beta\, m_\alpha)^2 = 2\left(\frac{25}{6}\right)^2 10^{-8}a \tag{9'}$$

U ovu formulu uvrstit ćemo sledeće supstitucije:

$$b = \frac{a}{2\cos\beta}; \quad \text{zatim} \quad a = \frac{1 - \cos^2\beta}{2K\cos\beta} \quad \text{i} \quad m^2_\alpha = \left(\frac{10}{\varrho''}\right)^2,$$

pa će nova formula glasiti:

$$\cos^4\beta - 1{,}5\cos^3\beta - 0{,}5\cos^2\beta + 0{,}25 = 0 \tag{9''}$$

Ovu jednačinu nije potrebno rešavati ni grafičkim niti kojim drugim načinom. Skoro na prvi pogled se može uočiti, da je njen realan koren $0 < \cos\beta < 1$.

$$\text{za } \cos\beta = 0{,}5 \text{ biće } \beta = 60^\circ = \alpha$$

To znači, da je za zadate srednje greške $m_\alpha = \pm 10''$ i $m_b = \pm \frac{25}{6} \cdot 10^{-4}\sqrt{b}$ najcelishodniji ravnostrani trougao, čija strana ima vrednost:

$$a = \frac{\sin 60^\circ}{K} = 147{,}7\,\text{m}$$

Izvršimo kontrolu, zamenivši u form. (8) i (9) sledeće veličine: $\beta = 60^\circ$; $a = b = 147{,}7$ m; $m_\alpha = \pm 10''$ i $m_b = \pm \frac{25}{6} 10^{-4}\sqrt{147{,}7} =$

$$= \pm 50{,}6 \cdot 10^{-4}\,\text{m}$$

Ako je dobar rezultat izvršenog računanja, treba da dobijemo prema (12)

$$m_\beta = \pm 10'' \text{ i } M_a = \frac{m_a}{\sqrt{2}} = m'_a \pm 50{,}6 \cdot 10^{-4}\,\text{m}$$

$$m_\beta = \varrho''\sqrt{2\left(\frac{0{,}866}{147{,}7} \cdot 50{,}6 \cdot 10^{-4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{10}{\varrho''}\right)^2} = \pm 10''$$

$$m_a = \sqrt{2\,(0{,}5 \cdot 50{,}6 \cdot 10^{-4})^2 + \left(147{,}7 \cdot 0{,}866 \cdot \frac{10}{\varrho''}\right)^2} = \pm 71{,}6 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$$

$$M_a = \frac{m_a}{\sqrt{2}} = \frac{71{,}6}{\sqrt{2}} \cdot 10^{-4} = \pm 50{,}6 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} = m'_a$$

Iz prednjeg ramatranja videli smo da za zadate srednje greške direktno izmerenih strana i ugla (m_b i m_α) postoji samo jedan trougao čija oba sračunata tražena elementa (a i β) imaju istu težinu kao da su direktno izmereni. To je za zamljište razreda »B« ravnostrani trougao čija je strana a = 148 m.

U Pravilniku II (čl. 16, s /1/, t. 2). propisane su ekstremne dužine poligonskih strana: min d = 50 m i max d = 500 m.

Treba još da vidimo, koji trouglovi imaju najcelishodniji oblik za indirektno određivanje strane **a** (Sl. 1), koje su kraće ili duže od 148 m. Taj oblik imaće oni ravnokraki trouglovi, čiji će jedan traženi elemenat (strana a ili ugao β) imati srednju grešku istu, kao i da je direktno izmeren, a onaj drugi će imati sr. grešku manju od one, koju bi imao da je direktno izmeren. Za strane a = 148 m treba uzeti uslov $m_\beta = \pm 10''$, a za a $>$ 148 m uslov

$$M_a = \frac{m_a}{\sqrt{2}} = m'_a = \pm \frac{25}{6} 10^{-4} \sqrt{a}$$

Izračunajmo koji je najcelishodniji trougao na pr. za a = 50 m.

Formulu (8'') rešit ćemo po β i uvrstiti vrednosti za K i aK, pa ćemo imati:

$$\cos\beta = -\,aK + \sqrt{(aK)^2 + 1} = -\,0{,}254 + \sqrt{1{,}0645} = 0{,}778$$

$$\beta = 38°55'; \qquad \alpha = 180° - 2\beta = 102°10'$$

$$b = \frac{a}{2\cos\beta} = \frac{50}{2 \cdot 0{,}778} = 32{,}1\,\mathrm{m}$$

$$m_b = \pm \frac{25}{6} \cdot 10^{-4} \sqrt{b} = \pm 23{,}6 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$$

$$m'_a = \pm \frac{25}{6} \cdot 10^{-4} \sqrt{a} = \pm 29{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$$

$$m_\alpha = \pm 10''$$

Da bi konstrolisali da li je $m_\beta = \pm 10''$ i $M_a = \frac{ma}{\sqrt{2}} < m'_a$ uvrstićemo poznate veličine u formule (8) i (9) i dobićemo da je:

$$m_\beta = \varrho'' \sqrt{2\left(\frac{0{,}628}{50} \cdot 23{,}6 \cdot 10^{-4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{10}{\varrho''}\right)^2} = \pm 10''$$

$$m_a = \sqrt{2\,(0{,}778 \cdot 23{,}6 \cdot 10^{-4})^2 + \left(32{,}1 \cdot 0{,}628\,\frac{10}{\varrho''}\right)^2} = \pm\, 27{,}8 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$$

Vidi se da je $m_a < m'_a$

Na isti način možemo izračunati koji je najcelishodniji trougao uzimajući dužinu strane $a > 148$ m, na pr. $a = 300$ m. Zato ćemo koristiti formulu (9'), u koju ako uvrstimo za $b = \frac{a}{2\cos\beta}$ i $m_\alpha^2 = \left(\frac{10}{6}\right)^2$ dobit ćemo sledeći izraz

$$\cos^3\beta - (2 + 0{,}33846 \cdot 10^{-2}a)\cos^2\beta + 0{,}33846 \cdot 10^{-2}a = 0$$

za $a = 300$ m biće:

$$\cos^3\beta - 3{,}0154\cos^2\beta + 1{,}0154 = 0$$

Ispitajmo da li je moguće ovu jednačinu rešiti primenom Kardanove (Cardan) formule:

$$\cos\beta = x - \left(\frac{-3{,}0154}{3}\right) = x + \underbrace{1{,}0051}_{r}$$

$$(x + r)^3 - 3r\,(x + r)^2 + s = 0$$

$$x^3 - 3r^2x - 2r^3 + s = 0$$

$$x^3 - 3{,}0309x - 1{,}0156 = 0; \qquad x^3 + 3px + 2q = 0$$

$$p = -1{,}0103; \qquad q = 0{,}5078$$

$$q^2 + p^3 < 0$$

Znači, ne možemo datu jednačinu rešiti po Kardanovoj formuli. Budući da je $|p^3| > q^2$ ova jednačina ima tri realna korena, te bi trebalo primeniti rešavanje pomoću trigonometriskih (ne hiperbolskih) funkcija. Nas interesuje samo koren za koji je $0 < \cos\beta < 1$, zato možemo, kao nešto bržu, primeniti Njutnovu (Newton) metodu. Iz date jednačine vidimo da za prvu aproksimaciju možemo uzeti $K_1 = -\frac{1}{3}$

$$f(x) = x^3 - 3{,}031x - 1{,}0156$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3.031$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$x_1 = -0{,}333; \qquad f(x_1) = -0{,}037 + 1{,}010 - 1{,}016 = -0{,}043$$

$$f'(x_1) = 0{,}333 - 3{,}031 = -2{,}698$$

$$x_2 = -0{,}333 - \frac{-0{,}043}{-2{,}698} = -0{,}349\,;\ f(x_2) = -0{,}043 + 1{,}058 - 1.016 =$$

$$= -0{,}001\,;\quad f'(x_2) = 0{,}366 - 3{,}031 = -2{,}665$$

$$x_3 = -0{,}349 - \frac{-0{,}001}{-2{,}665} = -0{,}3494$$

Kontrola:

$$-0{,}0427 + 1{,}0590 - 1{,}0156 = 0{,}0007 \cong 0$$

Definitivno:

$$\begin{aligned} x &= -0{,}3494 \\ r &= 1{,}0051 \\ \hline \cos\beta &= 0{,}6557;\ \beta = 49°00';\quad \alpha = 82°00' \end{aligned}$$

$$b = \frac{a}{2\cos\beta} = \frac{300}{2\cdot 0{,}656} = 228{,}7\text{ m};\ m_b = \frac{25}{6}\cdot 10^{-4}\sqrt{228{,}7} = \pm\, 63{,}1\cdot 10^{-4}\text{m}$$

$$m_\alpha = \pm\, 10'';\ m'_a = \frac{25}{6}\cdot 10^{-4}\sqrt{300} = \pm\, 72{,}2\cdot 10^{-4}\text{ m}$$

Kontrolišemo da li je

$$M_a = \frac{m_a}{\sqrt{2}} = m'_a \text{ i } m_\beta < m'_\beta = \pm\, \mathbf{10''}$$

Prema (8) je

$$m_\beta = \varrho''\sqrt{2\left(\frac{0{,}755}{300}\cdot 63{,}1\cdot 10^{-4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{10}{\varrho''}\right)^2} = \pm\, 7'' < m'_\beta = \pm\, 10''$$

dok prema (9)

$$m_a = \sqrt{2\left(0{,}656\cdot 63{,}1\cdot 10^{-4}\right) + \left(228{,}7\cdot 0{,}755\cdot \frac{10}{\varrho''}\right)^2} =$$

$$= \pm\, 102{,}1\cdot 10^{-4}\text{ m}$$

$$M_a = \frac{m_a}{\sqrt{2}} = \frac{102{,}1}{\sqrt{2}} = \pm\, 72{,}2\cdot 10^{-4}_{\text{m}} = m'_a$$

Isto kao za strane a = 50m i a = 300m sračunate su tražene veličine (najcelishodnijih trouglova) i odgovarajuće srednje greške i za strane u intervalu d = 50m — d = 400m s prirastom od 50m, kao i relativne srednje greške strana, ako bi one bile direktno izmerene (dva puta i za definitivnu vrednost uzeta prosta aritmetička sredina);

$$M_{rs} = \frac{m'_a}{a} \tag{13}$$

Sve te veličine date su u priloženoj tablici.

a	α	b	$\pm m_a$	$M_a = \frac{\pm m_a}{\sqrt{2}}$	$m'_a = \pm \frac{25}{6} \cdot 10^{-4} \sqrt{a}$	$\pm m_\beta$	$\pm m_\beta = m_\alpha$	$M_{21} = \frac{m'_a}{a}$
m		m	mm	mm	mm			
50	102,2°	32	2,8	2,0	3,0	10"	10"	$\frac{1}{16\,500}$
100	75,8	81	4,5	3,2	4,2	10	10	$\frac{1}{24\,000}$
148	60,0	148	7,2	5,1	5,1	10	10	$\frac{1}{29\,000}$
200	69,3	176	8,3	5,9	5,9	8	10	$\frac{1}{34\,000}$
250	76,0	203	9,3	6,9	6,6	7	10	$\frac{1}{38\,000}$
300	82,0	229	10,2	7,2	7,2	7	10	$\frac{1}{42\,000}$
350	87,0	254	11,0	7,8	7,8	6	10	$\frac{1}{45\,000}$
400	91,5°	274	11,8	8,3	8,3	6"	10"	$\frac{1}{48\,000}$

U pravilniku II (čl. 63, s./4/) propisano je da: »Trougao kome je indirektno određena strana ujedno strana poligonskog vlaka, treba da je približno ravnostran. U protivnom ne sme imati uglove manje od 30°.«

Ako se ovo ne može ostvariti, izuzetno se dozvoljava da u trouglu može biti i manjih uglova od 30°, ali nikako manjih od 20°. U tome slučaju ugao manji od 30° mora se izmeriti u dvostrukom broju girusa, propisanih za odnosnu mrežu. Za zemljišni razred »B« treba takav ugao izmeriti u 4 girusa.

Izračunajmo srednje greške m_β i $M_a = \frac{m_a}{\sqrt{2}}$ za $\alpha = 60°$, $a = 50\,m$ i $a = 300\,m$ za zemljište razreda »B« (tj. $m_\alpha = m'_\beta = \pm 10''$ i

$$m'_a = \pm \frac{25}{6} \cdot 10^{-4} \sqrt{a} \Big).$$

To je ravnostran trougao ($b = a$, $\beta = \alpha = 60°$).

$$m_\beta = \varrho'' \sqrt{2 \left(\frac{0{,}866}{50} \cdot \frac{25}{6} \cdot 10^{-4} \sqrt{50}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{10}{\varrho''}\right)^2} = \pm 16'' \qquad (14)$$

Vidimo da za $\alpha = 60°$ i $a = 50\,m$ je $m_\beta > m'_\beta$ za 60%

za $a = 300\,m$ i $\alpha = 60°$:

$$m_a = \sqrt{2\left(0{,}5 \cdot \frac{25}{6} 10^{-4} \sqrt{300}\right)^2 + \left(300 \cdot 0{,}866 \cdot \frac{10}{\varrho''}\right)^2} = \pm 136 \cdot 10^{-4} m$$

$$M_a = \frac{m_a}{\sqrt{2}} = \frac{136}{\sqrt{2}} = \pm 96 \cdot 10^{-4} m$$

$$m'_a = \frac{25}{6} \cdot 10^{-4} \sqrt{300} = \pm 72 \cdot 10^{-4} m$$

$$\frac{M_a}{m'_a} = \frac{96}{72} = 1{,}33$$

, — tj. srednja greška M_a je veća za 33% od sr. greške direktno izmerene strane $a = 300$ m.

Znači, da bi tražene — indirektno određivane — veličine (β_i, β_{i+1} i a, sl. 1.) odredili da imaju iste težine, kao i da su direktno izmerene, za kratke (kraće od 100 m) i duge (duže od 200 m) strane a, trebalo bi povećati broj opažanja čak i kada je $\alpha = 60°$, a ne samo kada je $20° < \alpha < 30°$.

ZAKLJUČAK

Iz prednjeg razmatranja vidi se da su (po Pravilniku II. deo od 1958 god.) dozvoljena otstupanja za merenje poligonskih strana (za zemljište razreda »B«) veoma stroga. Na pr. iz priložene tabele vidimo da relativno srednje greške (koje odgovaraju dozvoljenim otstupanjima za merenje poligonskih strana) za strane — određene iz dva merenja $d = 50$ m, 200 m i 300 m iznose:

$$M_{rs(50)} = \frac{1}{16500}$$

$$M_{rs(200)} = \frac{1}{34000}$$

$$M_{rs(300)} = \frac{1}{42000}$$

Međutim, kada je već propisana tako velika tačnost merenja poligonskih strana, da bi indirektno određivanje veličine (strane, prelomi i vezni uglovi) imale jednake težine s onim iste vrste, koje su direktno izmerene, trebalo bi razmotriti i neke druge slučajeve, na pr.: indirektno određivanje veznih uglova na nepristupnim triangulaciskim točkama, koji mogu biti određivani i iz tri trougla (Pravilnik II, čl. 62, s/4).

Napominjemo najzad da bi i za druge potrebe trebalo razmotriti najcelishodniji oblik trougla, koji je određen dvema stranama i zahvaćenim uglom, na pr.: potrebe izvršenja triangulaciskih radova (Pravilnik I. deo čl. 73, t. 2)