Ing. IZIDOR PALMAN — Zagreb

IZJEDNAČENJE TRIGONOMETRIJSKE MREŽE METODOM PRANIS-PRANJEVIĆA U DVIJE I VIŠE GRUPA PO UVJETNIM OPAŽANJIMA

Kako osnovne trigonometrijske mreže, koje se redovito izjednačuju po uvjetnim opažanjima, u večini slučajeva imaju velik broj točaka, a ujedno i uvjeta; to ih možemo smatrati velikim trigonometrijskim mrežama. Za izjednačenje jedne takve mreže najbolje je upotrebiti jednu od metoda koje uspješno rješavaju problem velikih trig. mreža i daju strogo ili približno rješenje. U svakom slučaju bolje je upotrebiti onu metodu koja daje strogo rješenje, nego li onu koja daje približno; iako je za približno rješenje potreban mnogo manji broj računskih operacija. To slijedi iz toga, što se metode koje daju stroga rješenja temelje na teoriji najmanjih kvadrata, dok autori približnih rješenja odustaju od teorije najmanjih kvadrata i pronalaze rešenje što bliže strogom, ali s jednostavnijim postupkom izjednačenja.

Ovim člankom htio bih opisati postupak izjednačenja jedne trig. mreže metodom Pranis-Pranjević-a po uvjetnim opažanjima. Ova metoda je jedna od onih, koje daju stroga rješenja, a za izjednačenje velikih trig. mreža pogodna je zbog toga što se na izjednačenju jedne mreže ovom metodom može istodobno uposliti veći broj kalkulatora i time ubrzati rad. Osim toga radeći ovom metodom smanjujemo broj računskih operacija, jer mrežu dijelimo u grupe i svaku grupu normalnih jednadžbi rješavamo nezavisno jednu od druge.

Da bi izjednačili jednu trig. mrežu metodom Pranis-Pranjevića po uvjetnim opažanjima, potrebno je istu podijeliti u dvije ili više grupa.

Kod podjele mreže u grupe treba obratiti pozornost na to da u svaku grupu, po mogućnosti uđe jednak broj uvjeta, odnosno normalnih jednadžbi. Osim toga i uvjete treba poredati tako, da djelomično vezujući uvjeti budu pisani istim redom u svim grupama iz kojih će biti računati Istim redom moraju biti pisani zbog toga, da bi se izvršilo pravilno spajanje grupa.

Općim vezujućim uvjetima nazivamo sve one uvjete, koji ulaze u više grupa. Ti opći vezujući uvjeti dijele se na djelomično vezujuće uvjete tako, da u svaku grupu uđe njezin djelomično vezujući uvjet. U djelomično vezujući uvjet jednog općeg vezujućeg uvjeta dolazi nesuglasica w onakva kakva jest, dok u ostalim vezujućim uvjetima, istog općeg vezujućeg uvjeta, nesuglasica $w=o$.

Uzmimo na pr. da trebamo izjednačiti jednu trig. mrežu sl. 1. Zbog jednostavnosti samog postupka izjednačenja uzmimo da su date dvije točke i to 1 i 2 (potcrtano), i da se izjednačenje vrši po kutevima.

Iz sl. 1. se vidi da ova trig. mreža sadrži 16 nezavisnih uvjeta i to: 11 figurnih, 4 sinusna i 1 uvjet horizonta. To znači da bi za izjednačenje ove mreže već poznatom metodom najmanjih kvadrata odjednom, bilo potrebno riješiti 16 normalni jednadžbi odjednom i izvršiti 1088 računskih operacija.

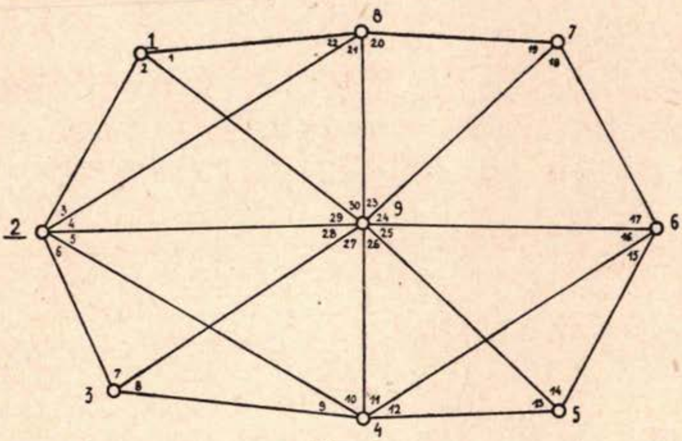
Međutim, ako bi htjeli izjednačiti ovu istu trig. mrežu metodom Pranis-Pranjevića u dvije grupe po uvjetnim opažanjima, vidimo iz sl. 2, da prva grupa ove mreže sadrži 8 nezavisnih uvjeta i to: 6 figurnih i 2 sinusna; a druga grupa 5 figurnih i 1 sinusni.

Iz ovoga vidimo da je kod diobe ove mreže u dvije grupe nestalo 2 uvjeta i to; 1 sinusni uvjet i 1 uvjet horizonta za △ 9.

Tako bi za navedeni primjer na sl. 2 osim 8 normalnih jednadžbi u prvoj i 6 normalnih jednadžbi u drugoj grupi trebalo rješiti još dvije jednadžbe koje bi se dobile spajanjem obih grupa. Za rješenje tih normalnih jednadžbi jedne i druge grupe i spajanja grupa potrebno je izvršiti broj računskih operacija kako slijedi:

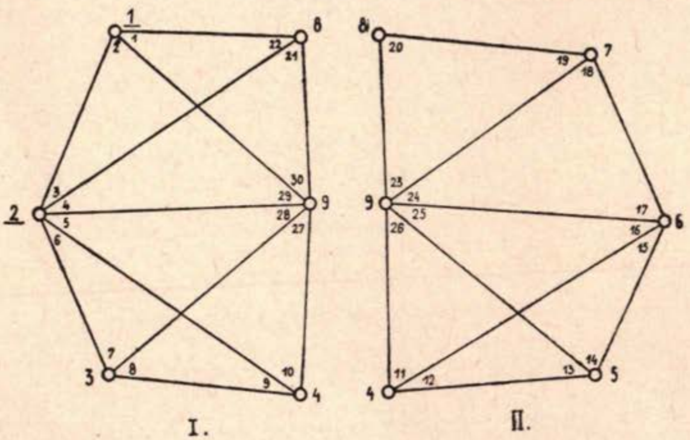
za I. grupu	192
za II. grupu	98

za spajanje grupa 10; dakle ukupno 300 računskih operacija.



Slika 1

Iz ovoga vidimo da i za izjednačenje manjih trig. mreža po uvjetnim opažanjima ova metoda daje izvjesnu prednost. Ova prednost tim je veća što je veći broj uvjeta u takvoj mreži. Samo u slučaju da imamo jednu veliku trig. mrežu onda je nećemo podijeliti u dvije grupe, nego u tri i više i time još više ubrzati postupak izjednačenja, odnosno smanjiti broj računskih operacija.



Slika 2

Za izjednačenje trig. mreže na sl. 1. izvršili smo podjelu u dvije grupe sl. 2. i sada prelazimo na sastavljanje uvjetnih jednadžbi.

Kod sastavljanja uvjetnih jednadžbi najprije sastavljamo figurne, a onda sinusne uvjete za svaku grupu. Nakon toga sastavljamo opće vezujuće uvjete tako, da za svaku grupu formiramo djelomično vezujući uvjet kao dio općeg vezujućeg uvjeta.

Za navedeni primjer na sl. 2. uvjetne jednadžbe prve grupe izgledale bi ovako:

$$(2) + (3) + (4) + (29) + w_1 = 0$$
$$(1) + (21) + (22) + (30) + w_2 = 0$$
$$(1) + (2) + (3) + (22) + w_3 = 0$$
$$(5) + (6) + (7) + (28) + w_4 = 0$$
$$(8) + (9) + (10) + (27) + w_5 = 0$$
$$(6) + (7) + (8) + (9) + w_6 = 0$$

za figurne uvjete, a za sinusne uvjete ovako:

$$(\delta_3 - \delta_{3+4})(3) - \delta_4(4) + \delta_{21+22}(21) + (\delta_{21+22} - \delta_{22})(22) + \delta_{29}(29) - \delta_{30}(30) + w_{12} = 0$$
$$(\delta_7 - \delta_{7+8})(7) - \delta_{7+8}(8) + \delta_9(9) - \delta_{10}(10) + \delta_{27+28}(27) + (\delta_{27+28} - \delta_{28})(28) + w_{13} = 0$$

djelomično vezujući uvjet horizonta glasi ovako:
$(27)+(28)+(29)+(30)+0=0$; a djelomično vezujući sinusni uvjet glasio bi ovako:

$$\delta_1(1) - \delta_2(2) + \delta_3(3) - \delta_5(5) + \delta_{10}(10) - \delta_{22}(22) + \delta_{29}(29) - \delta_{30}(30) + w_{15} = 0$$

Uvjetne jednadžbe figurnih uvjeta druge grupe glase:

$$(19) + (20) + (23) + w_7 = 0$$
$$(17) + (18) + (24) + w_8 = 0$$
$$(11) + (12) + (13) + (26) + w_9 = 0$$
$$(14) + (15) + (16) + (25) + w_{10} = 0$$
$$(11) + (16) + (25) + (26) + w_{11} = 0$$

sinusne uvjetne jednadžbe:

$$(\delta_{11} - \delta_{11+12})(11) - (\delta_{11+12})(12) + \delta_{13}(13) - \delta_{14}(14) + \delta_{15+16}(15) + (\delta_{15+16} - \delta_{16})(16) + w_{14} = 0$$

djelomično vezujući uvjet horizonta:

$$(23) + (24) + (25) + (26) + w_{16} = 0,$$

a djelomično vezujući sinusni uvjet:

$$-\delta_{11}(11) + \delta_{16}(16) - \delta_{17}(17) + \delta_{18}(18) - \delta_{19}(19) + \delta_{20}(20) + 0 = 0$$

gdje brojevi u zagradama označuju popravak dotičnog kuta,

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3 \text{ itd.}$$

označuju promjene logaritma sinusa za 1" odgovarajućih kuteva, a w nesuglasicu uvjeta.

Zadnje dvije jednadžbe u svakoj grupi predstavljaju nam djelomično vezujuće uvjete svake grupe.

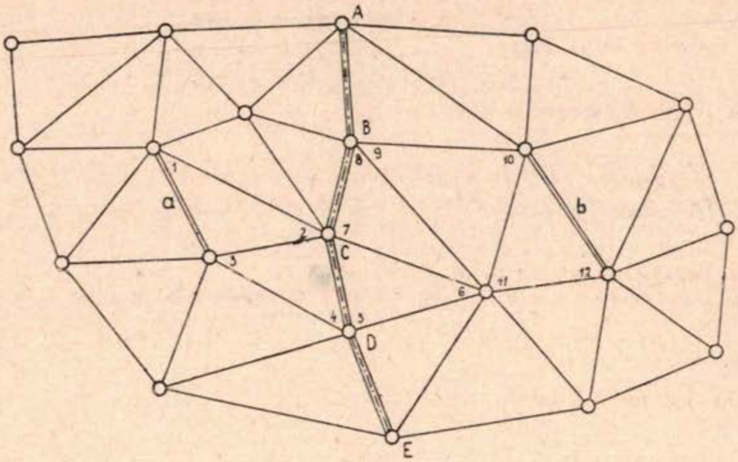
Djelomično vezujući uvjeti su ušli pisani u obje grupe istim redom kao što je prije navedeno i to: najprije uvjet horizonta, a onda djelomično vezujući sinusni uvjet, jer se oni računaju spajanjem obih grupa.

Iza toga bi se prešlo na sastavljanje i rješavanje normalnih jednadžbi. Eliminaciju nepoznanica provodimo na već poznati način, a spajanje grupa treba izvršiti kako ćemo pokazati kasnije. Nakon sračunatih korelata računamo popravke v pojedinih kuteva, i time je postupak izjednačenja po kutevima završen.

Sve ovo do sada rečeno vrijedi samo u tom slučaju, ako je cijela mreža oslonjena na dvije poznate trig. točke, t. j. da mreža treba zadovoljiti samo matematske uvjete.

Pretpostavimo sada da imamo izjednačiti jednu trig. mrežu u kojoj, osim navedenih uvjeta na primjeru sl. 1., imamo još i uvjet bazisa. Uvjet bazisa nastaje onda, ako u jednoj trig. mreži imamo izmjerene bar dvije strane.

Ako podijelimo trig. mrežu na grupe tako, da cijeli uvjet bazisa ulazi u jednu grupu, onda samo u toj grupi dobivamo još jednu uvjetnu jednadžbu. Ako je mreža podijeljena tako, da uvjet bazisa pripada obim grupama, kao što je slučaj prikazan na sl. 3., onda kod sastava bazisnog uvjeta moramo postupiti drugačije.



Slika 3

Uzmimo da su nam u trig. mreži izmjerene dvije strane a i b (sl. 3), i da je mreža podijeljena u grupe presjekom kroz točke A, B, C, D i E. Prema sl. 3 vidimo, da će nam u ovom slučaju uvjet bazisa biti vezujući uvjet. Prema naprijed navedenom ovaj ćemo opći vezujući uvjet formirati tako, da ćemo ga razdijeliti na dva djelomično vezujuća uvjeta i jednoga staviti u prvu, a drugoga u drugu grupu.

Računajući od strane a pomoću numeriranih kuteva stranu b, nećemo dobiti stranu b jednaku mjerenoj strani, već neku drugu stranu b. Ovo neslaganje će nastati uslijed pogrešaka mjerenih kuteva 1, 2, 3, 4 i t. d. Prema tome će biti:

$$\log b' = \log a + (\log \sin 1 + \log \sin 3 + \log \sin 5 + \log \sin 7 + \log \sin 9 + \\ + \log \sin 11) - (\log \sin 2 + \log \sin 4 + \log \sin 6 + \log \sin 8 + \log \sin 10 + \\ + \log \sin 12)$$

Ako označimo $\log b' - \log b = w_b$, a sa (1), (2), (3), (4) i t. d. označimo popravke mjerenih kuteva; onda će analogno sinusnim uvjetnim jednadžbama, uvjetna jednadžba bazisa glasiti:

$$\delta_1(1) - \delta_2(2) + \delta_3(3) - \delta_4(4) + \delta_5(5) - \delta_6(6) + \delta_7(7) - \delta_8(8) + \delta_9(9) - \delta_{10}(10) + \\ + \delta_{11}(11) - \delta_{12}(12) + w_b = 0$$

gdje su

$$\delta_1, \ \delta_2, \ \delta_3 \ itd.$$

promjene logaritna sinusa dotičnog kuta za 1 sekundu.

Kako je uvjet bazisa u ovom slučaju opće vezujući uvjet, to će uvjetne jednadžbe djelomično vezujućih uvjeta glasiti:

$$\delta_1(1) - \delta_2(2) + \delta_3(3) - \delta_4(4) + 0 = 0 \quad \text{za I grupu, a}$$
$$\delta_5(5) - \delta_6(6) + \delta_7(7) - \delta_8(8) + \delta_9(9) - \delta_{10}(10) + \delta_{11}(11) - \delta_{12}(12) + w_6 = 0 \quad \text{za II. grupu}$$

I ovdje kako vidimo, nesuglasica w_6 dolazi samo u jednoj jednadžbi, dok u drugoj umjesto nesuglasice dolazi nula.

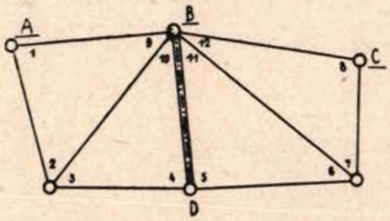
Kako se strane (bazisi) u trig. mreži određuju točnije nego kutevi, to ih možemo smatrati bespogrešnim, odnosno možemo smatrati da su popravci njihovih mjerenja jednaki nuli, t. j. (a)=(b)=0.

Bazisnih uvjeta u trig. mreži ima toliko, koliko ima datih strana minus jedan.

Do sada smo promatrali slučajeve kada je trig. mreža, koja se izjednačuje, oslonjena samo na dvije date točke. Pređimo sada na slučajeve kada je trig. mreža naslonjena na tri i više datih točaka, i kada je umetnuta između već postojeće dvije trig. mreže. U tom slučaju osim već do sada navedenih uvjeta javljaju se još i fiksni ili geodetski uvjeti i to: uvjet fiksnog kuta, uvjet fiksne strane i poligonski uvjeti.

Promotrimo sad slučaj pojave uvjeta fiksnog kuta.

Neka su nam na sl. 4. date tri točke A, B i C i izmjereni kutevi 1, 2, 3, 4 i t. d., i neka je podjela u grupe izvršena tako, da točke B i D pripadaju obim grupama.



Slika 4

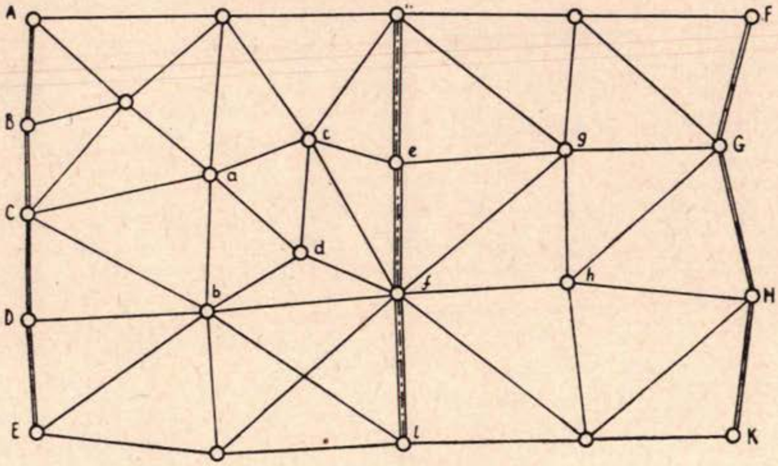
U ovom slučaju suma mjerenih kuteva 9, 10, 11 i 12 na točki B mora biti jednaka kutu ABC, koji je dat razlikom smjernih kuteva strana AB i BC. Kako to redovito nije slučaj, to moraju kutevi 9, 10, 11 i 12 biti izjednačeni uz uvjet fiksnog kuta ABC. Prema tome bi uvjetu fiksnog kuta odgovarala slijedeća uvjetna jednadžba:
$(9)+(10)+w_b = 0$ za I. grupu i $(11)+(12)+0=0$ za II. grupu; gdje je $w_b=9+10+11+12$ — dati kut ABC, a brojevi u zagradama popravci mjerenih kuteva.

Osim toga kod navedenog primjera na sl. 4. javlja se još i uvjet fiksne strane. Od zadane strane AB pomoću kuteva 1, 2, 3, 4 i t. d. možemo sračunati stranu BC, koja će se uslijed pogrešaka mjerenih kuteva razlikovati od zadane strane BC. Označimo li ovako sračunatu stranu sa B'C', a razliku B'C'—BC sa W_b ; onda će uvjetne jednadžbe djelomično vezujućih uvjeta fiksne strane izgledati ovako:

$$\delta_1(1) - \delta_2(2) + \delta_3(3) - \delta_4(4) + 0 = 0 \quad \text{za I. grupu, a}$$
$$\delta_5(5) - \delta_6(6) + \delta_7(7) - \delta_8(8) + w_{bc} = 0 \quad \text{za II. grupu}$$

Ako trebamo izjednačiti trig. mrežu koja se oslanja na dvije strane na već postojeću triangulaciju, onda nam se osim do sada navedenih uvjeta javljaju još i poligonski uvjeti.

Promotrimo sada kako bi za jednu trig. mrežu sastavili poligonske uvjete, uz uvjet da se ta mreža izjednačuje u više grupa. Ako je ta trig. mreža podijeljena u grupe tako, da poligonski uvjeti dolaze samo u jednu grupu, onda se to radi na već poznati način. (Vidi, Abakumov: Viša geodezija II. I. dio str. 91—104). Ako je mreža podijeljena tako, da poligonski uvjeti dolaze u više grupa, onda ćemo ove uvjetne jednadžbe formirati na isti način kao i u naprijed navedenim slučajevima. Formirati ćemo poligonske uvjete kao opće vezujuće uvjete, a onda ih podijeliti po grupama kao što to zahtijeva podjela mreže. Kod toga opet treba paziti da nesuglasica w dođe samo u jedan djelomično vezujući uvjet, dok u drugim djelomično vezujućim uvjetima istog općeg vezujućeg uvjeta nesuglasica w mora biti jednaka nuli.



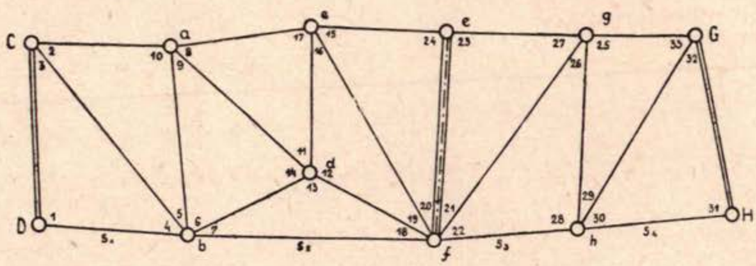
Slika 5

Dakle, uzmimo da nam je potrebno izjednačiti jednu trig. mrežu sl. 5., koja se sa dvije strane oslanja na već postojeću triangulaciju. Ili ako na pr. izjednačujemo jedan lanac trokuteva koji je umetnut između već dva postojeća lanca.

Na slici 5. vidimo da je ova trig. mreža na jednoj strani oslonjena na točke A, B, C, D i E, a na drugoj strani na točke F, G, H i K, već postojeće triangulacije. U ovoj će se mreži osim do sada navedenih uvjeta javiti još i poligonski uvjeti, i to: uvjet azimuta α, uvjet koordinate φ i uvjet koordinate λ.

Pretpostavimo da smo ovu mrežu podijelili u dvije grupe presjekom kroz točke k, e, f i l.

Za postavljanje poligonskih uvjeta uzeti ćemo najkraću hodnu liniju, i to liniju D, b, f, h i H. Kako iz slike vidimo, ovdje nam se poligonski uvjet javlja kao opći vezujući uvjet. Njega ćemo podijeliti na dva djelomična vezujuća uvjeta od kojih će jedan ući u prvu, a drugi u drugu grupu.



Slika 6

Uvjet azimuta sastoji se u tome, da se na primjer od zadanog azimuta strane DC preko prelomnih kuteva hodne linije dobije azimut strane HG. Uvjet koordinata sastoji se u tome, da se od koordinata točke D preko hodne linije dobiju koordinate točke H, i time uz pomoć ostalih uvjeta uspostavi potpuna veza između točaka A, B, C, D i E i točaka F, G, H i K.

Ovdje treba posebno napomenuti da se poligonalno izjednačenje triangulacije vrši samo u tom slučaju, ako točke stare triangulacije, među koje je umetnuta nova triangulacija, pripadaju jedinstvenoj triangulaciji i imaju jedinstvenu orijentaciju. U protivnom slučaju, ako točke stare triangulacije pripadaju različitim triangulacijama sa različitom orijentacijom, mora se jedna od datih mreža napustiti, a novu triangulaciju osloniti samo na jednu mrežu i to na onu koju smatramo točnijom.

Slika 6. prikazuje nam lanac trokuteva, kojim ćemo postaviti poligonske uvjete za izjednačenje trig. mreže na sl. 5.

Objasnimo sada prema sl. 6. kako ćemo postaviti poligonske uvjete za izjednačenje triangulacije.

Date su geografske koordinate φ i λ točaka C, D, G i H i azimuti strana DC i HG, i uvedimo slijedeće oznake:

za točku D $\varphi_D, \lambda_D, \alpha_{DC}$

za točku H $\varphi_H, \lambda_H, \alpha_{HG}$

za strane	za razlike širina	za razlike dužina	za konvergencije meridijana
s_1	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\lambda_1$	γ_1
s_2	$\Delta\varphi_2$	$\Delta\lambda_2$	γ_2
s_3	$\Delta\varphi_3$	$\Delta\lambda_3$	γ_3
s_4	$\Delta\varphi_4$	$\Delta\lambda_4$	γ_4

Iz slike vidimo da je:

$$\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_3 + \Delta\varphi_4 = \varphi_H - \varphi_D$$
$$\Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2 + \Delta\lambda_3 + \Delta\lambda_4 = \lambda_H - \lambda_D$$

$\alpha_{CD} = \alpha_{GH} + 1 + 4 + 5 + 6 + 7 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23 + 29 + 30 + 31 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 - 4 \cdot 180$

Uslijed pogrešaka mjerenja neće biti ispunjeni gornji uvjeti, nego slijedeće:

$$(\varphi_H - \varphi_D) - \Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_3 - \Delta\varphi_4 = w\varphi$$
$$(\lambda_H - \lambda_D) - \Delta\lambda_1 - \Delta\lambda_2 - \Delta\lambda_3 - \Delta\lambda_4 = w\lambda$$

$\alpha_{HG} = \alpha_{DC} + 1 + 4 + 5 + 6 + 7 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 28 + 29 + 30 + 31 + \gamma_1 +$
$+ \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + 4 \cdot 140 = W\alpha$

Dodavši veličinama $\Delta\varphi$ $\Delta\lambda$, $\Delta\alpha$ i mjerenim kutevima popravke, tako da $W\varphi$, $W\lambda$ i W postanu jednaki nuli dobijemo tri uvjetne jednadžbe širine, dužine i azimuta koje glase:

$(1) + (4) + (5) + (6) + (7) + (8) + (20) + (21) + (22) + (28) + (29) + (30) + (31) + \alpha\gamma_1 +$
$+ d\gamma_2 + d\gamma_3 + d\gamma_4 = W\alpha$

$$d\Delta\varphi_1 + d\Delta\varphi_2 + d\Delta\varphi_3 + d\Delta\varphi_4 = w\varphi$$
$$d\Delta\lambda_1 + d\Delta\lambda_2 + d\Delta\lambda_3 + d\Delta\lambda_4 = w\lambda$$

$$+ d\gamma_1 + d\gamma_2 + d\gamma_3 + d\gamma_4 = w_\alpha$$

Ovo bi bili opći vezujući poligonski uvjeti za izjednačenje trig. mreže na sl. 5. Kako se ova mreža izjednačuje u dvije grupe presjekom kroz točke k, e, f i l; to ćemo svaki od ova tri opća vezujuća uvjeta rastaviti na dva djelomično vezujuća uvjeta, od kojih će jedan pripasti prvoj, a drugi drugoj grupi. Uvjetne jednadžbe djelomično vezujućih uvjeta izgledale bi ovako:

$$d\Delta\varphi_1 + d\Delta\varphi_2 - w_\varphi = 0$$
$$d\Delta\lambda_1 + d\Delta\lambda_2 - w_\lambda = 0$$

(1) + (4) + (5) + (6) + (7) + (18) + (19) + (20) + $d\gamma_1 + d\gamma_2 - W\alpha = 0$ za prvu grupu, a

$$d\Delta\varphi_3 + d\Delta\varphi_4 - 0 = 0$$
$$d\Delta\lambda_3 + d\Delta\lambda_4 - 0 = 0$$

21) + (22) + (28) + (29) + (30) + (31) + $d\gamma_3 + d\gamma_4 - 0 = 0$ za drugu grupu;

gdje nam je $d\Delta\varphi$ popravka razlike širina, $d\Delta\lambda$ popravka razlike dužina, $d\gamma$ popravka meridijanske konvergencije i brojevi u zagradama popravke odgovarajućih kuteva.

Kako kod izjednačenja triangulacije određujemo popravke kuteva ili pravaca, to moramo veličine $d\Delta\varphi$ i $d\Delta\lambda$ i γ u uvjetnim jednadžbama izraziti kao funkcije popravaka kuteva ili pravaca. Koristeći se za tu svrhu Gaussove formule za rješavanje geodetskog zadatka dobivamo da je:

$$d(\Delta\varphi) = \frac{\Delta\varphi'}{Mod}\, d\log s - \frac{\Delta\varphi'' tg\,\alpha_n}{\rho''}\, d\alpha''$$
$$d(\Delta\lambda) = \frac{\Delta\lambda'}{Mod}\, d\log s + \frac{\Delta\lambda'' ctg\,\alpha_n}{\rho''}\, d\alpha'' + \frac{\Delta\lambda'' tg\,\varphi_n}{\rho''}\, d\varphi_n''$$
$$d(\gamma) = \frac{\gamma'}{Mod}\, d\log s + \frac{\gamma'' ctg\,\alpha_n}{\rho''}\, d\alpha + \frac{2\gamma''}{\rho'' \sin 2\varphi_n}\, d\varphi_n$$

gdje je Mod = log e = 0,434294 modul Briggsovih logaritama

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$$
$$\gamma = \beta - \alpha \quad \text{konvergencija meridijana}$$
$$\varphi_n = \frac{\varphi_1 + \varphi}{2}$$
$$\alpha_n = \frac{\beta + \alpha}{2}$$
$$\rho'' = 206\ 264{,}8$$

Uvedemo li slijedeće oznake:

$$p' = \frac{\Delta\varphi'}{Mod}\ ;\ q' = \frac{\Delta\lambda'}{Mod}\ ;\ r' = \frac{\gamma'}{Mod}$$
$$p'' = -\frac{\Delta\varphi''}{\rho''}\, tg\,\alpha_n\ ,\ q'' = \frac{\Delta\lambda'' ctg\,\alpha_n}{\rho''}\ ;\ r'' = \frac{\gamma'' ctg\,\alpha_n}{\rho''}$$
$$q''' = \frac{\Delta\lambda'' tg\,\varphi_n}{\rho''}\ ;\ r''' = \frac{2\gamma''}{\rho'' \sin 2\varphi_n}$$

onda gornje jednadžbe poprimaju ovakav oblik:

$$d(\Delta\varphi) = p' d\log s + p'' d\alpha''$$
$$d(\Delta\lambda) = q' d\log s + q'' d\alpha'' + q''' d\varphi_n$$
$$d(\gamma) = r' d\log s + r'' d\alpha'' + r''' d\varphi_n$$

U ovim jednadžbama potrebno je d log s, $d\alpha$ i $d\varphi$ izraziti pomoću popravaka kuteva ili pravaca. Za naš slučaj na sl. 6 imamo da je·

$$s_1 = DC\frac{\sin 3}{\sin 4}$$

$$s_2 = DC\frac{\sin 1 \cdot \sin 2 \cdot \sin 9 \cdot \sin 13}{\sin 4 \cdot \sin 10 \cdot \sin 14 \cdot \sin 18}$$

$$s_3 = GH\frac{\sin 31 \cdot \sin 33 \cdot \sin 26}{\sin 30 \cdot \sin 25 \cdot \sin 22}$$

$$s_4 = GH\frac{\sin 32}{\sin 30}$$

Ako logaritmiramo ove jednadžbe dobijemo:

$$\log s_1 = \log DC + \log \sin 3 - \log \sin 4$$
$$\log s_2 = \log DC + \log \sin 1 + \log \sin 2 - \log \sin 4 + \log \sin 9 - \log \sin 10 +$$
$$+ \log \sin 13 - \log \sin 14 - \log \sin 18$$
$$\log s_3 = \log GH - \log \sin 22 - \log \sin 25 + \log \sin 26 -$$
$$- \log \sin 30 + \log \sin 31 + \log \sin 33$$
$$\log s_4 = \log GH - \log \sin 30 + \log \sin 32$$

Diferencirajući ove jednadžbe dobijemo:

$$d \log s_1 = \beta_3(3) - \beta_4(4)$$
$$d \log s_2 = \beta_1(1) + \beta_2(2) - \beta_4(4) + \beta_9(9) - \beta_{10}(10) + \beta_{13}(13) - \beta_{14}(14) - \beta_{18}(18)$$
$$d \log s_3 = -\beta_{22}(22) - \beta_{25}(25) + \beta_{26}(26) - \beta_{30}(30) + \beta_{31}(31) + \beta_{33}(33)$$
$$d \log s_4 = -\beta_{30}(30) + \beta_{32}(32)$$

gdje je β promjena logaritma sinusa pri promjeni kuta za jednu sekundu.

Iz slike 6. vidimo da je:

$$\alpha_{DH} = \alpha_{DC} + 1$$
$$\alpha_{Hf} = \alpha_{DC} + 1 + 4 + 5 + 6 + 7 + \varepsilon_1 - 180$$
$$\alpha_{fh} = \alpha_{HG} - 28 - 29 - 30 - 31 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4$$
$$\alpha_{hg} = \alpha_{HG} - 31 - \varepsilon_4 - 180$$

Ako diferenciramo ove jednadžbe dobijemo:

$$d\alpha_{DH} = (1)$$
$$d\alpha_{Hf} = (1) + (4) + (5) + (6) + (7) + d\varepsilon_1$$
$$d\alpha_{fh} = -(28) - (29) - (30) - (31) - d\varepsilon_3 - d\varepsilon_4$$
$$d\alpha_{hg} = -(31) - d\varepsilon_4$$

Diferencijal širine za sredinu strane triangulacije dat je slijedećim izrazima:

$$d\varphi_{m1} = \frac{d(\Delta\varphi_1)}{2},$$

$$d\varphi_{m2} = d(\Delta\varphi_1) + \frac{d(\Delta\varphi_2)}{2}$$

$$d\varphi_{m3} = d(\Delta\varphi_1) + d(\Delta\varphi_2) + \frac{d(\Delta\varphi_3)}{2}$$

$$d\varphi_{m4} = d(\Delta\varphi_1) + d(\Delta\varphi_2) + d(\Delta\varphi_3) + \frac{d(\Delta\varphi_4)}{2}$$

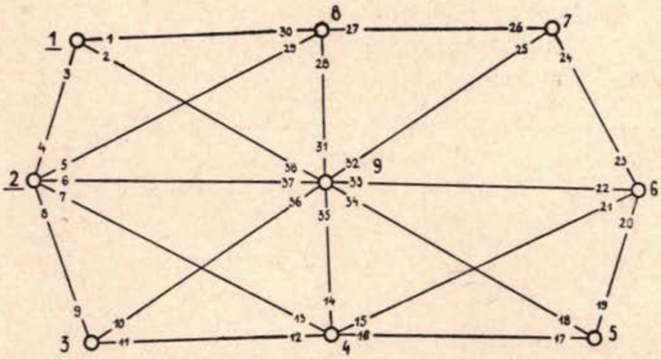
Kada sve ove formule uvrstimo u uvjetne jednadžbe djelomično vezujućih uvjeta (vidi stranu 43) dobivamo uvjetne jednadžbe u kojima kao nepoznanice dolaze popravke renih kuteva, a koje glase:

$$
\begin{aligned}
a_1(1) + a_2(2) + a_3(3) + a_4(4) \ldots\ldots\ldots &= w\varphi \\
b_1(1) + b_2(2) + b_3(3) + b_4(4) \ldots\ldots\ldots &= w\lambda \\
c_1(1) + c_2(2 + c_3(3) + (c)_4(4) \ldots\ldots\ldots &= w\alpha
\end{aligned}
$$

Time smo obradili sve uvjete koji mogu doći u obzir kod izjednačenja trig. mreže po kutevima u dvije grupe. Ako se radi o izjednačenju trig, mreže u više od dvije grupe, onda je postupak isti samo što se svaki opći vezujući uvjet ne dijeli na dva djelomično vezujuća uvjeta, nego na toliko koliko ima grupa kojima taj opći vezujući uvjet pripada. Osim toga slobodni član w jednog općeg vezujućeg uvjeta dolazi samo u jednu uvjetnu jednadžbu tog općeg vezujućeg uvjeta, dok u ostalim uvjetnim jednadžbama istog općeg vezujućeg uvjeta dolazi da je w = o. Sve ostalo ostaje isto kao i kod izjednačenja trig. mreže u dvije grupe.

IZJEDNAČENJE PO PRAVCIMA

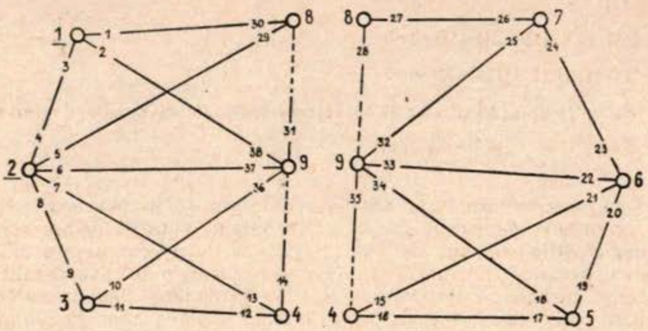
Kod opažanja se neposredno mjere pravci, a veličina kuta se dobije razlikom mjerenih pravaca. Girusna metoda, a također i Schreiberova metoda mjerenja kuteva nakon stajališnog izjednačenja, imaju oblik mjerenih pravaca. Prema tome je pravilnije da se izjednačenje triangulacije ne vrši po kutevima, nego po pravcima. Ovdje će sada biti objašnjeno kako se vrši ižjednačenje trig. mreže metodom Pranis-Pranjevića u više grupa po pravcima. Za tu svrhu uzmimo opet istu mrežu kao na sl. 1. samo što ćemo u ovom slučaju numerirati pravce sl. 7., a ne kuteve kao na sl. 1.



Slika 6

Iz slike 7. se vidi da je za izjednačenje ove mreže po pravcima potrebno odjednom rješiti 15 normalnih jednadžbi (15 nezavisnih uvjeta) i to: 11 figurnih i 4 sinusna. No ako tu istu mrežu želimo izjednačiti metodom Pranis-Pranjevića u dvije grupe po pravcima presjekom kroz točke 8, 9 i 4; onda će nam, kako se iz slike vidi, prva grupa sadržavati 6 uvjeta i to: 4 figurna i 2 sinusna; a druga grupa 4 uvjeta i to: 3 figurna i 1 sinusni. Iz toga vidimo da nam je pri podjeli mreže u dvije grupe nestalo pet uvjeta i to: 4 figurna i 1 sinusni. Oni uvjeti koji su ostali prilikom podjele mreže u grupe ostati će svaki u svojoj grupi, a oni uvjeti koji su nestali ući će u izjednačenje kao opći vezujući uvjeti. Pri podjeli mreže u grupe sl. 8. treba paziti da granični obostrano opažani pravci budu podijeljeni na dva jednostrana pravca tako, da jedan od njih uđe u jednu, a drugi u drugu grupu. Na taj način jedan pravac dolazi samo u jednu grupu i dobiva popravku samo iz jedne grupe, a veza među grupama ostaje i dalje dobra, jer nigdje ne ostaju praznine.

Prema tome za slučaj izjednačenja trig. mreže sl. 8. uvjetne jednadžbe za prvu grupu glase:



Slika 8

$$-(2)+(3)-(4)+(6)-(37)+(38)+W_1=0$$
$$-(1)+(3)-(4)+(5)-(29)+(30)+W_2=0$$
$$-(6)+(8)-(9)+(10)-(36)+(37)+W_3=0$$
$$-(7)+(8)-(9)+(11)-(12)+(13)+W_4=0$$
$$-(\delta_{2-1}-\delta_{9-1})(1)+\delta_{2-1}(2)-\delta_{9-4}(4)+(\delta_{5-4}+\delta_{6-5})(5)-\delta_{6-5}(6)+(\delta_{31-37}-\delta_{31-38})(31)$$
$$-\delta_{31-37}(37)+\delta_{31-38}(38)+W_5=0$$
$$-\delta_{7-6}(6)+(\delta_{7-6}+\delta_{8-7})(7)-\delta_{8-7}(8)-\delta_{10-9}(9)+(\delta_{10-9}+\delta_{11-10})(10)-\delta_{11-10}(11)-\delta_{13}(12)$$
$$+\delta_{14-13}(13)+(\delta_{14-12}-\delta_{14-13})(14)+W_6=0$$

za drugu grupu glase ovako:

$$-(15)+(16)-(17)+(19)-(20)+(21)+W_7=0$$
$$-(18)+(19)-(20)+(22)-(33)+(34)+W_8=0$$
$$-(22)+(23)-(24)+(25)-(32)+(33)+W_9=0$$
$$-(\delta_{18-17}-\delta_{19-17})(17)+\delta_{19-17}(18)-\delta_{19-17}(19)-\delta_{21-20}(20)+(\delta_{21-20}+\delta_{22-21})(21)-\delta_{22-21}(22)$$
$$-\delta_{34-33}(33)+\delta_{34-35}(34)+(\delta_{34-35}-\delta_{33-34})(35)+W_{10}=0$$

Djelomično vezujući uvjeti za prvu grupu glase ovako:

$$-(5)+(6)+(29)+(31)-(37)+W_{11}=0$$
$$-(10)+(11)-(12)+(14)+(36)+W_{12}=0$$
$$-(14)\qquad\qquad+W_{13}=0$$
$$-(31)\qquad\qquad+W_{14}=0$$
$$-\delta_{2-1}(1)+\delta_{3-2}(2)+(\delta_{3-4}-\delta_{3-2})(3)+\delta_{6-5}(5)+(\delta_{6-5}+\delta_{7-6})(6)-\delta_{7-6}(7)-\delta_{14-13}(13)$$
$$+(\delta_{14-13}+\delta_{15-14})(14)+\delta_{30-29}(29)-\delta_{30-29}(30)-\delta_{31-37}(31)+(\delta_{31-37}+\delta_{38-37})(37)$$
$$+\delta_{38-37}(38)+W_{15}=0$$

a za drugu grupu ovako:

$$
\begin{aligned}
&-(28) \qquad\qquad\qquad\qquad + 0 = 0 \\
&-(35) \qquad\qquad\qquad\qquad + 0 = 0 \\
&(16) - (17) + (18) - (34) + (35) + 0 = 0 \\
&-(25) + (26) - (27) + (28) + (32) - 0 = 0 \\
&-\delta_{[illegible]}(15) + \delta_{[illegible]}(21) + (\delta_{[illegible]} + \delta_{[illegible]})(22) - \delta_{[illegible]}(23) - \delta_{[illegible]}(24) + (\delta_{[illegible]} + \delta_{[illegible]})(25) \\
&-\delta_{[illegible]}(26) - \delta_{[illegible]}(27) + \delta_{[illegible]}(28) + 0 = 0
\end{aligned}
$$

gdje brojevi u zagradama označuju popravke odgovarajućih pravaca, a δ sa indeksom označuje nam promjenu logaritma sinusa pri promjeni kuta za jednu sekundu.

Kako vidimo i ovdje su nam slobodni članovi w vezujućih uvjeta ušli samo u jednu grupu, dok smo u drugoj grupi umjesto veličine w pisali nulu. Sve ostalo ostaje isto kao i kod izjednačenja mreže po kutevima. Uvjetne jednadžbe fiksnih uvjeta formiraju se na isti način kao i kod izjednačenja po kutevima, samo s tom razlikom što se numeriraju pravci, a ne kutevi. Kod podjele mreže u grupe treba paziti na to da granični pravci, ako su opažani obostrano, budu podjeljeni na jednostrane i svaki da pripadne jednoj grupi, a ako su jednostrani, onda svaki takav jednostrano opaženi pravac ulazi samo u jednu grupu, dok u drugoj grupi na tom mjestu ostaje praznina.

Mislim da će iz svega do sada rečenog biti jednostavno formirati uvjetne jednadžbe fiksnih uvjeta, ako se izjednačenje vrši po pravcima.

Nakon formiranja uvjetnih jednadžbi prelazimo na formiranje i rješavanje normalnih jednadžbi i spajanja grupa.

Pokažimo sada kako se vrši spajanje grupa.

Uzmimo na pr. da nam jednadžbe popravaka (pogrešaka)

I. grupe glase ovako:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= a_1k_1 + b_1k_2 + c_1k_3 + d_1k_4 + e_1k_5 + f_1k_{10} + g_1k_{11} + h_1k_{12} \\
v_2 &= a_2k_1 + b_2k_2 + c_2k_3 + d_2k_4 + e_2k_5 + f_2k_{10} + g_2k_{11} + h_2k_{12} \\
v_3 &= a_3k_1 + b_3k_2 + c_3k_3 + d_3k_4 + e_3k_5 + f_3k_{10} + g_3k_{11} + h_3k_{12} \\
&\;\;\vdots \\
v_n &= a_nk_1 + b_nk_2 + c_nk_3 + d_nk_4 + e_nk_5 + f_nk_{10} + g_nk_{11} + h_nk_{12}
\end{aligned}
$$

a II. grupe ovako:

$$
\begin{aligned}
v'_1 &= a'_1k_6 + b'_1k_7 + c'_1k_8 + d'_1k_9 + e'_1k_{10} + f'_1k_{11} + g'_1k_{12} \\
v'_2 &= a'_2k_6 + b'_2k_7 + c'_2k_8 + d'_2k_9 + e'_2k_{10} + f'_2k_{11} + g'_2k_{12} \\
v'_3 &= a'_3k_6 + b'_3k_7 + c'_3k_8 + d'_3k_9 + e'_3k_{10} + f'_3k_{11} + g'_3k_{12} \\
&\;\;\vdots \\
v'_n &= a'_nk_6 + b'_nk_7 + c'_nk_8 + d'_nk_9 + e'_nk_{10} + f'_nk_{11} + g'_nk_{12}
\end{aligned}
$$

Kako vidimo u ovim jednadžbama nepoznanice korelata K_1, K_2, K_3, K_4 i K_5 pripadaju prvoj grupi; K_6, K_7, K_8 i K_9 pripadaju drugoj grupi; a K_{10}, K_{11} i K_{12} računamo spajanjem grupa, dok ostale nepoznanice računamo svaku u svojoj grupi.

Gornje uvjetne jednadžbe treba rješiti uz uvjet da bude $[vv] + [v'v'] =$ minimum.

Uz uvjet minimuma dobiti ćemo normalne jednadžbe, koje će za prvu grupu glasiti ovako:

$$
\begin{aligned}
[aa]k_1 + [ab]k_2 + [ac]k_3 + [ad]k_4 + [ae]k_5 + [af]k_{10} + [ag]k_{11} + [ah]k_{12} + w_1 &= 0 \\
[bb]k_2 + [bc]k_3 + [bd]k_4 + [be]k_5 + [bf]k_{10} + [bg]k_{11} + [bh]k_{12} + w_2 &= 0 \\
[cc]k_3 + [cd]k_4 + [ce]k_5 + [cf]k_{10} + [cg]k_{11} + [ch]k_{12} + w_3 &= 0 \\
[dd]k_4 + [de]k_5 + [df]k_{10} + [dg]k_{11} + [dh]k_{12} + w_4 &= 0 \\
[ee]k_5 + [ef]k_{10} + [eg]k_{11} + [eh]k_{12} + w_5 &= 0 \\
[ff]k_{10} + [fg]k_{11} + [fh]k_{12} + w_{10} &= 0 \\
[gg]k_{11} + [gh]k_{12} + 0 &= 0 \\
[hh]k_{12} + w_{11} &= 0
\end{aligned}
$$

a za drugu grupu ovako:

$$
\begin{aligned}
[a'a']k_6 + [a'b']k_7 + [a'c']k_8 + [a'd']k_9 + [a'e']k_{10} + [a'f']k_{11} + [a'g']k_{12} + w'_6 &= 0 \\
[b'b']k_7 + [b'c']k_8 + [b'd']k_9 + [b'e']k_{10} + [b'f']k_{11} + [b'g']k_{12} + w'_7 &= 0 \\
[c'c']k_8 + [c'd']k_9 + [c'e']k_{10} + [c'f']k_{11} + [c'g']k_{12} + w'_8 &= 0 \\
[d'd']k_9 + [d'e']k_{10} + [d'f']k_{11} + [d'g']k_{12} + w'_9 &= 0 \\
[e'e']k_{10} + [e'f']k_{11} + [e'g']k_{12} + 0 &= 0 \\
[f'f']k_{11} + [f'g']k_{12} + w'_{11} &= 0 \\
[g'g']k_{12} + 0 &= 0
\end{aligned}
$$

Iz gore pisanih normalnih jednadžbi vidimo da nam slobodni članovi w_{10}, w_{11} i w_{12} ne dolaze pisani u obe grupe nego samo u jednoj grupi, jer su to nesuglasice vezujućih uvjeta, a u drugoj grupi umjesto njih pišemo nulu.

Ova dva sistema normalnih jednadžbi rješiti ćemo na taj način da u svakoj grupi eliminiramo nepoznanice koje dolaze samo u toj grupi, odnosno, u našem slučaju, u prvoj grupi eliminirati ćemo nepoznanice K_1, K_2, K_3, K_4 i K_5; a u drugoj grupi nepoznanice K_6, K_7, K_8 i K_9.

Na taj način dobili smo dva nova sustava normalnih jednadžbi koji u sebi sadrže samo zajedničke nepoznanice obim grupama, a glase ovako:

za prvu grupu, i:

$$
\begin{aligned}
[ff\cdot 5]k_{10} + [fg\cdot 5]k_{11} + [fh\cdot 5]k_{12} + w_{10}\cdot 5 &= 0 \\
[gg\cdot 5]k_{11} + [gh\cdot 5]k_{12} + w_{11}\cdot 5 &= 0 \\
[hh\cdot 5]k_{12} + w_{12}\cdot 5 &= 0
\end{aligned}
$$

za drugu grupu.

$$
\begin{aligned}
[e'e'\cdot 4]k_{10} + [e'f'\cdot 4]k_{11} + [e'g'\cdot 4]k_{12} + w'_{10}\cdot 4 &= 0 \\
[f'f'\cdot 4]k_{11} + [f'g'\cdot 4]k_{12} + w'_{11}\cdot 4 &= 0 \\
[g'g'\cdot 4]k_{12} + w'_{12}\cdot 4 &= 0
\end{aligned}
$$

Kako vidimo ove jednadžbe u sebi sadržavaju samo one nepoznanice koje su zajedničke obim grupama, odnosno nepoznanice K_{10}, K_{11} i K_{12}. Ako sada zbrojimo koeficijente pred istim nepoznanicama dobiti ćemo jedan novi sustav normalnih jednadžbi, koji kada rješimo dobivamo rješenja ista kao da smo cijelu trig. mrežu izjednačili u jednoj grupi.

Ako uvedemo slijedeće oznake:

$$
\begin{aligned}
&[ff\cdot 5] + [e'e'\cdot 4] = [AA]; \quad [fg\cdot 5] + [e'f'\cdot 4] = [AB]; \quad [fh\cdot 5] + [e'g'\cdot 4] = [AC] \\
&[gg\cdot 5] + [f'f'\cdot 4] = [BB]; \quad [gh\cdot 5] + [f'g'\cdot 4] = [BC]; \quad [hh\cdot 5] + [g'g'\cdot 4] = [CC] \\
&w_{10}\cdot 5 + w'_{10}\cdot 4 = W_{10}; \quad w_{11}\cdot 5 + w'_{11}\cdot 4 = W_{11}; \quad w_{12}\cdot 5 + w'_{12}\cdot 4 = W_{12}
\end{aligned}
$$

onda nakon zbrajanja koeficijenata pred istim nepoznanicama dobivamo jedan novi sustav normalnih jednadžbi koji glasi ovako:

$$
\begin{aligned}
[AA]k_{10} + [AB]k_{11} + [AC]k_{12} + W_{10} &= 0 \\
[BB]k_{11} + [BC]k_{12} + W_{11} &= 0 \\
[CC]k_{12} + W_{12} &= 0
\end{aligned}
$$

Kada rješimo ovaj sustav normalnih jednadžbi dobivamo zajedničke nepoznanice obim grupama K_{10}, K_{11} i K_{12}; koje kada uvrstimo u prvu i u drugu grupu dobivamo ostale nepoznanice: K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7, K_8, i K_9. Nakon toga prelazimo na računanje popravaka v svake mjerene veličine po formuli:

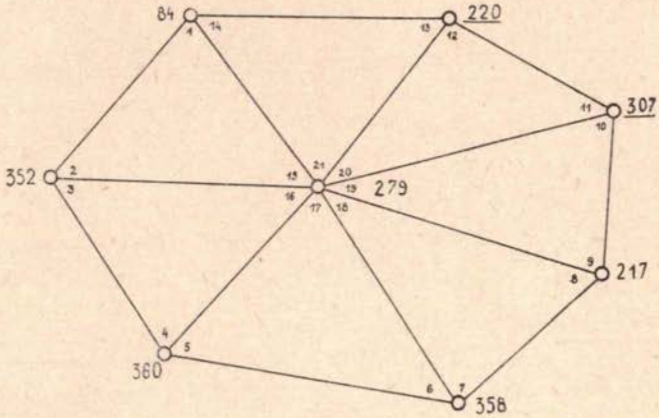
$$v_n = a_n k_1 + b_n k_2 + c_n k_3 + d_n k_4 + e_n k_5 + f_n k_{10} + g_n k_{11} + h_n k_{12}$$

I na kraju, a što služi kao kontrola, računamo veličinu $[vv]+[v'v']$, a koja glasi:

$$[vv]+[v'v']=[kw].$$

I. Primjer: Izjednačenje trigonometrijske mreže metodom Pranis-Pranjevića po uvjetnim opažanjima.

Izjednačenje po kutevima.



Slika 9

Rezultati mjerenja su slijedeći:

Broj kuta	Opažani kut			Broj kuta	Opažani kut			Broj kuta	Opažani kut		
1	25°	21'	56,77"	8	89°	35'	32,79"	15	54°	51'	29,49"
2	99	46	41,31	9	60	00	19,06	16	79	03	07,81
3	56	50	10,12	10	84	00	17,35	17	34	22	57,06
4	44	06	43,30	11	70	59	00,15	18	48	35	44,64
5	108	33	28,90	12	35	42	41,88	19	35	59	21,15
6	37	03	31,00	13	95	53	23,20	20	73	18	20,55
7	41	48	48,40	14	50	17	33,02	21	33	48	59,30

Podjela mreže u grupe je izvršena, presjekom kroz trig. točke 84 Križišće, 279 Klupca, i 358 Glavat, kako prikazuje sl. 10.

Ako bi ovu mrežu izjednačili odjednom onda bi imali broj uvjeta kako slijedi:

svih uvjeta	9
figurnih uvjeta	7
sinusnih uvjeta	1
uvjet horizonta	1

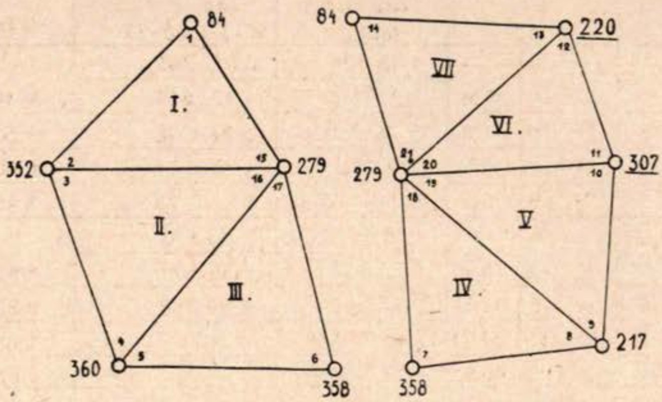
Kada ovu istu mrežu podjelimo u dvije grupe prema sl. 10. onda dobivamo slijedeći broj uvjeta:

I. grupa	3 figurna uvjeta
II. grupa	4 figurna uvjeta

Kako vidimo podjelom ove mreže u dvije grupe nestala su dva uvjeta i to: sinusni uvjet i uvjet horizonta. Prema naprijed navedenom se vidi da će nam u ovom slučaju kao opći vezujući uvjeti u izjednačenje ući sinusni uvjet i uvjet horizonta.

Sastav sinusnog uvjeta

$$\frac{\sin 1 \cdot \sin 3 \cdot \sin 5 \cdot \sin 7 \cdot \sin 9 \cdot \sin 11 \cdot \sin 13}{\sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 6 \cdot \sin 8 \cdot \sin 10 \cdot \sin 12 \cdot \sin 14} = 1$$



Slika 10

Broj kuta	Kut	Log sin	PP 1"	Broj kuta	Kut	Log sin	PP 1"
1	25 21 56,77	9.631 8448	44,4	2	99 46 41,31	9 993 6436	— 3,6
3	56 50 10,12	9.922 7823	13,8	4	44 06 43,30	9.842 6489	21,7
5	108 33 28,90	9.976 8092	— 9,1	6	37 03 31,00	9 780 0520	27,8
7	41 48 48,40	9.823 9352	23,5	8	89 35 32,79	9.999 9890	0,1
9	60 00 19,06	9.937 5538	12,1	10	84 00 17,35	9.997 6182	2,2
11	70 59 00.15	9.975 6266	7,3	12	35 42 41,88	9.766 1942	22,3
13	95 53 23,20	9.997 7013	— 2,1	14	50 17 33,02	9.086 1048	17,5
		9.266 2532				9.267 2517	

W = + 15

Uvjetne jednadžbe

I. grupa

(1) + (2) + (15) + 6,85 = 0
(3) + (4) + (16) + 0,78 = 0
(5) + (6) + (17) — 3,53 = 0

II. grupa

(7) + (8) + (18) + 5,15 = 0
(9) + (10) + (19) — 2,75 = 0
(11) + (12) + (20) + 1,87 = 0
(13) + (14) + (21) — 5,35 = 0

Uvjetne jednadžbe djelomično vezujućih uvjeta.

(15) + (16) + (17) + 0 = 0
44,4(1) + 3,6(2) + 13,8(3) — 21,7(4) — 7,1(5) — 27,8(6) + 15 = 0

(18) + (19) + (20) + (21) + 0 = 0
23,5(7) — 0,1(8) + 12,1(9) — 2,2(10) + 7,311) — 29,3(12) — 2,1(13) — 17,5(14) + 0 = 0

Točke P_1 P_2 P_3		α β γ Σ			$\log \frac{a}{\sin \alpha}$ $\log \sin \alpha$ $\log \sin \beta$ $\log \sin \gamma$ $180+\varepsilon$	$\log \frac{1}{\sin \alpha}$ $\log a$ $\log b$ $\log c$ $W = \Sigma-(180+\varepsilon)$	$\log bc$ $\log \sin \alpha$ $\log \frac{s}{2r^2}$ $\log \varepsilon$
		°	′	″	4,19 108	0,06 245	
△ 217	9	60	00	19,06	9,93 755	4,12 863	8,14 889
△ 279	19	35	59	21,15	9,76 910	3,96 018	9,93 755
△ 307	10	84	00	17,35	9,99 763	4,18 871	1,40 507
		179	59	57,56	180° 00′ 00,″31	W = - 2,75	9,49 151
					4,36 478	0,17 607	
△ 358	7	41	48	48,40	9,82 393	4,18 871	8,60 465
△ 279	18	48	35	44,64	9,87 510	4,23 988	9,82 393
△ 217	8	89	35	32,79	9,99 999	4,36 477	1,40 507
		180	00	05,83	180° 00′ 00,″68	W = + 5,15	9,83 365
					4,38 796	0,02 319	
△ 360	5	108	33	28,90	9,97 681	4,36 477	8,30 780
△ 279	17	34	22	57,06	9,75 183	4,13 979	9,97 681
△ 358	6	37	03	31,00	9,78 005	4,16 801	1,40 507
		179	59	56,96	180° 00′ 00,″49	W = - 3,53	9,68 968
					4,24 523	0,07 722	
△ 352	3	56	50	10,12	9,92 278	4,16 801	8,32 513
△ 279	16	79	03	07,81	9,99 202	4,23 725	9,92 278
△ 360	4	44	06	43,30	9,84 265	4,08 788	1,40 507
		180	00	01,23	180° 00′ 00,″45	W = - 0,78	9,65 298
					4,45 603	0,36 815	
△ 84	1	25	21	56,77	9,63 185	4,08 788	8,81 832
△ 279	15	54	51	29,49	9,91 261	4,36 864	9,63 185
△ 352	2	99	46	41,31	9,99 365	4,44 968	1,40 507
		180	00	07,57	180° 00′ 00,″72	W = + 6,85	9,85 524
					4,45 198	0,00 230	
△ 220	13	95	53	23,20	9,99 770	4,44 968	8,53 566
△ 279	21	33	48	59,30	9,74 549	4,19 747	9,99 770
△ 84	14	50	17	33,02	9,88 611	4,33 809	1,40 507
		179	59	55,52	180° 00′ 00,″87	W = - 5,35	9,93 833
					4,36 243	0,01 870	
△ 279	20	73	18	20,55	9,98 130	4,34 373	8,46 669
△ 220	12	35	42	41,88	9,76 620	4,12 863	9,98 130
△ 307	11	70	59	00,15	9,97 563	4,33 806	1,40 507
		180	00	02,58	180° 00′ 00,″71	W = + 1,87	9,85 306

Koeficijenti uvjetnih jednadžbi

I. grupa

	a	b	c	h	j	s
1	+1				+44,4	+45,4
2	+1				+3,6	+4,6
3		+1			+13,8	+14,8
4		+1			-21,7	-20,7
5			+1		-7,1	-6,1
6			+1		-27,8	-26,8
15	+1			+1		+2,0
16		+1		+1		+2,0
17			+1	+1		+2,0
W	+6.85	+0.78	-3.53		+15	

II. grupa

	d	e	f	g	h	j	s
7	+1					+23,5	+24,5
8	+1					-0,1	+0,9
9		+1				+12,1	+13,1
10		+1				-2,2	-1,2
11			+1			+7,3	+8,3
12			+1			-29,3	-28,3
13				+1		-2,1	-1,1
14				+1		-17,5	-16,5
18	+1				+1		+2,0
19		+1			+1		+2,0
20			+1		+1		+2,0
21				+1	+1		+2,0
W	+5.15	-2.75	+1.87	-5.35			

Formiranje normalnih jednadžbi

I. grupa

	a]	b]	c]	h]	j]	w	s]
[a	+3,00			+1,00	+48,00	+6,85	+58,85
[b		+3,00		+1,00	-7,90	+0,78	-3,12
[c			+3,00	+1,00	-34,90	-3,53	-34,43
[h				+3,00	·	·	+6,00
[j					+3468,90	+15,00	+3489,10

II. grupa

	d]	e]	f]	g]	h]	j]	w	s]
[d	+3,00	·	·	·	+1,00	+23,40	+5,15	+32,55
[e		+3,00	·	·	+1,00	+9,90	-2,75	+11,15
[f			+3,00		+1,00	-22,00	+1,87	-16,13
[g				+3,00	+1,00	-19,60	-5,35	-20,95
[h					+4,00			+8,00
[j						+1925,95	·	+1917,65

Eliminacija nepoznanica i računanje korelata

I. grupa

	h·3]	j·3]	w·3	s·3]
[h	+ 2,0001	- 1,7334	- 1,3666	- 1,1000
[j		+ 2274,0947	- 133,6115	+ 2138,7496

II. grupa

	h·4]	j·4]	w·4	s·4]
[h	+ 2,6668	+ 2,7666	+ 0,3600	+ 5,7933
[j		+ 1421,3747	- 52,3349	+ 1371,8063

Spajanje grupa

	A]	B]	W	S]
[A	+ 4,6669	+ 1,0332	- 1,0066	+ 4,6935
[B		+ 3695,4694	- 185,9464	+ 3510,5562

Računanje popravaka v

I. grupa

k	- 3,1563	- 0,1957	+ 1,6937	+ 0,2046	+ 0,0503		
	ak_1	bk_2	ck_3	hK_1	jK_2	v_I	v_I^2
1.	- 3,1563				+ 2,2333	- 0,9230	0,8519
2.	- 3,1563				+ 0,1811	- 2,9752	8,8518
3.		- 0,1957			+ 0,6941	+ 0,4984	0,2484
4.		- 0,1957			- 1,0915	- 1,2872	1,6569
5.			+ 1,6937		- 0,3571	+ 1,3366	1,7865
6.			+ 1,6937		- 1,3983	+ 0,2954	0,0872
15.	- 3,1563			+ 0,2046		- 2,9517	8,7125
16.		- 0,1957		+ 0,2046		+ 0,0089	0,0001
17.			+ 1,6937	+ 0,2046		+ 1,8983	3,6035

$\sum v_I^2 = 25,7988$

II. grupa

K	- 2,1772	+ 0,6825	- 0,3226	+ 2,0437	+ 0,2046	+ 0,0503		
	dk_4	ek_5	fk_6	gk_7	hK_1	jK_2	v_{II}	v_{II}^2
7.	- 2,1772					+ 1,1821	- 0,9951	0,9902
8.	- 2,1772					- 0,0050	- 2,1822	4,7620
9.		+ 0,6825				+ 0,6086	+ 1,2911	1,6670
10.		+ 0,6825				- 0,1107	+ 0,5718	0,3270
11.			- 0,3226			+ 0,3672	+ 0,0446	0,0020
12.			- 0,3226			- 1,4738	- 1,7964	3,2270
13.				+ 2,0437		- 0,1056	+ 1,9381	3,7562
14.				+ 2,0437		- 0,8803	+ 1,1634	1,3535
18.	- 2,1772				+ 0,2046		- 1,9716	3,8872
19.		+ 0,6825			+ 0,2046		+ 0,8871	0,7870
20.			- 0,3226		+ 0,2046		- 0,1180	0,0139
21.				+ 2,0437	+ 0,2046		+ 2,2483	5,0549

$\sum v_{II}^2 = 25,0279$

Kontrole računanja

$$[vv] = [vv]_I + [vv]_{II} = 51,6267 \qquad -[kw] = 51,6242$$

$$[vv] = \frac{W_1^2}{[a\,a]} + \frac{[w_2\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]} + \frac{[w_3\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]} + \frac{W_4^2}{[dd]} + \frac{[w_5\cdot 1]^2}{[ee\cdot 1]} + \frac{[w_6\cdot 2]^2}{[ff\cdot 2]} +$$

$$+ \frac{[w_7\cdot 3]^2}{[gg\cdot 3]} + \frac{W_1^1}{[AA]} + \frac{[w_2\cdot 1]^2}{[BB\cdot 1]} = 51.6165$$

Kontrole računanja

Računanje definitivnih vrijednosti kuteva

	Mjereni kut			v″	Popr. kut		
1.	25	21	56,77	−0,92	25	21	55,85
2.	99	46	41,31	−2,98	99	46	38,33
3.	56	50	10,12	+0,50	56	50	10,62
4.	44	06	43,30	−1,29	44	06	42,01
5.	108	33	28,90	+1,34	108	33	30,24
6.	37	03	31,00	+0,30	37	03	31,30
7.	41	48	48,40	−1,00	41	48	47,40
8.	89	35	32,79	−2,18	89	35	30,61
9.	60	00	19,06	+1,29	60	00	20,35
10.	84	00	17,35	+0,57	84	00	17,92
11.	70	59	00,15	+0,04	70	59	00,19
12.	35	42	41,88	−1,80	35	42	40,08
13.	95	53	23,20	+1,94	95	53	25,14
14.	50	17	33,02	+1,16	50	17	34,18
15.	54	51	29,49	−2,95	54	51	26,54
16.	79	03	07,81	+0,01	79	03	07,82
17.	34	22	57,06	+1,90	34	22	58,96
18.	48	35	44,64	−1,97	48	35	42,67
19.	35	59	21,15	+0,89	35	59	22,04
20.	73	18	20,55	−0,12	73	18	20,43
21.	33	48	59,30	+2,25	33	49	01,55

Zatvaranje figurnih uvjeta

	°	′	″
1.	25	21	55,85
2.	99	46	38,33
15.	54	51	26,54
Σ =	180	00	00,72

	°	′	″
3.	56	50	10,62
4.	44	06	42,01
16.	79	03	07,82
Σ =	180	00	00,45

	°	′	″
5.	108	33	30,24
6.	37	03	31,30
17.	34	22	58,96
Σ =	180	00	00,50

	°	′	″
7.	41	48	47,40
8.	89	35	30,61
18.	48	35	42,67
Σ =	180	00	00,68

	°	′	″
9.	60	00	20,35
10.	84	00	17,92
19.	35	59	22,04
Σ =	180	00	00,31

	°	′	″
11.	70	59	00,19
12.	35	42	40,08
20.	73	18	20,43
Σ =	180	00	00,70

	°	′	″
13.	95	53	25,14
14.	50	17	34,18
21.	33	49	01,55
Σ =	180	00	00,87

Zatvaranje uvjeta horizonta

15.	54—51—26,54
16.	79—03—07,82
17.	34—22—58,96
18.	48—35—42,67
19.	35—59—22,04
20.	73—18—20,43
21.	33—49—01,55
Σ =	360—00—00,01

Zatvaranje sinusnog uvjeta

log sin 1 =	9,631 8407
log sin 3 =	9,922 7830
log sin 5 =	9,976 8082
log sin 7 =	9,823 9329
log sin 9 =	9,937 5553
log sin 11 =	9,975 6266
log sin 13 =	9,997 7009
	9,266 2476

Zatvaranje sinusnog uvjeta

log sin 2 =	9,993 6457
log sin 4 =	9,842 6461
log sin 6 =	9,780 0528
log sin 8 =	9,999 9890
log sin 10 =	9,997 6183
log sin 12 =	9,766 1889
log sin 14 =	9,886 1068
	9,266 2476

Napomena: U ovom primjeru koeficijenti uvjetnih jednadžbi I. grupe imaju oznake **a, b, c**; II. grupe **d, e, f, g**; a koeficijenti uvjetnih jednadžbi općih vezajućih uvjeta imaju oznake **h, j**.

Analogno tome, koeficijenti normalnih jednadžbi I. grupe označeni su **[aa], [ab], [ac]** itd.; II. grupe **[dd], [de], [df] itd.**; a koeficijenti spojenih grupa označeni su **[AA], [AB] i [BB]**.

Slobodni članovi **w** I. grupe označeni su w_1, w_2 i w_3; II. grupe w_4, w_5, w_6 i w_7; a slobodni članovi spoja grupa W_1 i W_2.

Nepoznanice (korelate) I. grupe označeni su k_1, k_2 i k_3; II. grupe k_4, k_5, k_6 i k_7; a nepoznanice zajedničke obim grupama K_1 i K_2.

Popravke kuteva v I. grupe imaju oznake v_I .; a II. grupe v_{II} .

Kako vidimo, u naprijed navedenom primjeru računate su sve kontrole da bi se eventualne pogreške u toku računanja pravovremeno uklonile. Iz računskih kontrola za [vv] vidimo da je rješenje normalnih jednadžbi i računanje popravaka **v** provedeno dobro. Kao najbolja garancija za pravilno rješenje cijelog zadatka je zadovoljenje uvjeta. Figurni uvjeti zatvorili su se na veličinu $180^0 + \varepsilon$. Izuzetak čine III. i IV. uvjet koji i nakon izjednačenja odstupaju od veličine $180 + \varepsilon$ za 0,″01. Uvjet horizonta odstupa također za 0,″01 od svoje prave veličine, dok je sinusni uvjet zadovoljen potpuno. Nesuglasice 0,″01 kod naprijed navedenih uvjeta nastale su kao posljedice zaokruživanja kod računanja popravaka v.

II. Primjer: Izjednačenje trigonometrijske mreže metodom Pranis-Pranjevića po uvjetnim opažanjima

Izjednačenje po pravcima

Rezultati mjerenja su slijedeći:

Δ 360 Tajan

	°	'	"
Δ 279	0	00	00,00
Δ 358	108	33	28,90
Δ 352	315	53	16,70

Δ 307 Sv. Ilija

y = — 68 132,12 s   x = 4 762 151,24 s

	°	'	"
Δ 217	43	21	08,32
Δ 279	127	21	57,67
Δ 220	198	20	25,82

Δ 217 Ražnjić

	°	'	"
Δ 307	0	00	00,00
Δ 358	210	24	08,15
Δ 279	299	59	40,94

Δ 382 Kom

	°	'	"
Δ 279	0	00	00,00
Δ 360	56	50	10,12
Δ 84	260	18	18,69

Δ 358 Glavat

	°	'	"
Δ 360	27	45	37,69
Δ 279	64	49	08,69
Δ 217	106	37	57,09

Δ 220 Likova Glava

y = — 82 885,140   x = 4 778 560,52 8

	°	'	"
Δ 307	0	00	00,00
Δ 279	35	42	41,88
Δ 84	131	36	05,00

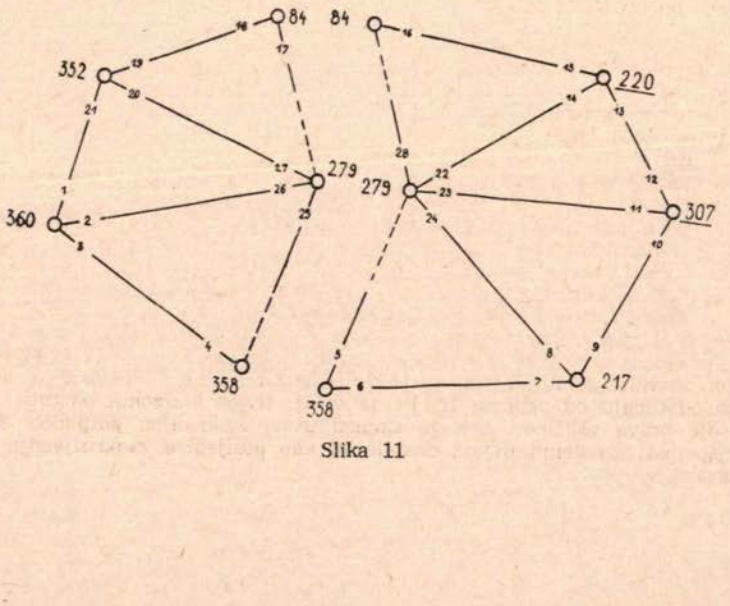
Δ 84 Križišće

	°	'	"
Δ 220	176	44	11,23
Δ 279	227	01	44,25
Δ 352	252	23	41,02

Δ 279 Klupca

	°	'	"
Δ 307	0	00	00,00
Δ 217	35	59	21,15
Δ 358	84	35	05,79
Δ 360	118	58	02,85
Δ 352	198	01	10,66
Δ 84	252	52	40,15
Δ 220	286	41	39,45

Podjela mreže u grupe i numeracija pravaca izvršena je kako je prikazano na sl. 11. Kada bi ovu mrežu izjednačivali odjednom, onda bi imali 8 nezavisnih uvjeta i to: 7 figurnih i 1 sinusni uvjet. No kako je mreža podjeljena u dvije grupe prema sl. 11., vidimo da ćemo u tom slučaju u prvoj grupi imati samo jedan figurni uvjet, a u drugoj grupi dva figurna uvjeta. Prema tome, znači, da ćemo za slučaj izjednačenja ove mreže po pravcima u dvije grupe imati pet općih vezujućih uvjeta i to: 4 figurna uvjeta i 1 sinusni uvjet.



Slika 11

Uvjetne jednadžbe

I. grupa

$$(2)-(1)+(21)-(20)+(27)-(26)+0{,}78=0$$

II. grupa

$$(12)-(11)+(14)-(13)+(23)-(22)+1{,}87=0$$
$$(9)-(8)+(11)-(10)+(24)-(23)-2{,}75=0$$

Uvjetne jednadžbe djelomično vezujućih uvjeta

$$(18)-(17)+(20)-(19)-(27)+6{,}85=0$$
$$(3)-(2)-(4)+(26)-(25)-3{,}53=0$$
$$(17)=0$$
$$(25)=0$$
$$21{,}7(1)-14{,}6(2)-7{,}1(3)+27{,}8(4)-61{,}9(17)+44{,}4(18)-3{,}6(19)-10{,}2(20)+13{,}8(21)+15=0$$

$$(5)=0$$
$$(15)-(14)-(16)+(22)-(28)-5{,}35=0$$
$$(6)-(5)+(8)-(7)-(24)+5{,}15=0$$
$$(28)=0$$
$$-51{,}3(5)+23{,}5(6)+0{,}1(7)-12{,}2(8)+12{,}1(9)+2{,}2(10)-9{,}5(11)+7{,}3(12)+29{,}3(13)-27{,}2(14)-2{,}1(15)+17{,}5(16)+0=0$$

Koeficijenti uvjetnih jednadžbi

I. grupa

	a	d	e	f	g	h	s
1	-1					+21,7	+20,7
2	+1		-1			-14,6	-14,6
3			+1			- 7,1	- 6,1
4			-1			+27,8	+26,8
17		-1		+1		+61,9	-61,9
18		+1				+44,4	+45,4
19		-1				- 3,6	- 4,6
20	-1	+1				-10,2	-10,2
21	+1					+13,8	+14,8
25			-1		+1		
26	-1		+1				
27	+1	-1					
W	+0.78	+6.85	-3.53	·	·	+15	

II. grupa

	b	c	d	e	f	g	h	s
5.				+1		-1	-51,3	-51,3
6.						+1	+23,5	+24,5
7.						-1	+ 0,1	- 0,9
8.		-1				+1	-12,2	-12,2
9.		+1					+12,1	+13,1
10.	-	-1					+ 2,2	+ 1,2
11.	-1	+1					- 9,5	- 9,5
12.	+1						+ 7,3	+ 8,3
13.	-1						+29,3	+28,3
14.	+1				-1		-27,2	-27,2
15.					+1		- 2,1	1,1
16.					-1		+17,5	-16,5
22.	-1				+1			
23.	+1	-1						
24.		+1				-1		
28.			+1		-1			
W	+1.87	-2.75	·	·	-5.35	+5.15		

Formiranje normalnih jednadžbi

I. grupa

	a]	d]	e]	f]	g]	h]	w	s]
[a	+ 6,00	- 2,00	- 2,00	·	·	- 12,30	+ 0,78	- 9,52
[d		+ 5,00	·	- 1,00	·	+ 99,70	+ 6,85	+ 108,55
[e			+ 5,00	·	- 1,00	- 20,30	- 3,53	- 21,83
[f				+ 1,00	·	- 61,90	·	- 61,90
[g					+ 1,00			
[h						+ 7617,71	+ 15,90	+ 7637,91

II. grupa

	b]	c]	d]	e]	f]	g]	h]	w	s]
[b	+ 6,00	- 2,00	·	·	- 2,00	·	- 39,70	+ 1,87	- 35,83
[c		+ 6,00	·	·		- 2,00	+ 12,60	- 2,75	+ 11,85
[d			+ 1,00	·	- 1,00	·	·	·	
[e				+ 1,00	·	- 1,00	- 51,30	·	- 51,30
[f					+ 5,00	·	+ 7,60	- 5,35	+ 4,25
[g						+ 5,00	+ 62,50	+ 5,15	+ 69,65
[h							+ 5536,57	·	+ 5528,27

Eliminacija nepoznanica i računanje korelata

I. grupa

	d·1]	e·1]	f·1]	g·1]	h·1]	w·1	s·1]
[d	+ 4,3334	- 0,6666	- 1,0000	·	+ 95,6004	+ 7,1100	+ 105,3770
[e		+ 4,3334	·	- 1,0000	- 24,3996	- 3,2700	- 25,0030
[f			+ 1,0000	·	- 61,9000	·	- 61,9000
[g				+ 1,0000	·	·	
[h					+ 7592,4950	+ 16,5990	+ 7618,3940

Eliminacija nepoznanica i računanje korelata

II. grupa

	d·2]	e·2]	f·2]	g·2]	h·2]	w·2	s·2]
[d	+ 1,0000	·	- 1,0000	·			·
[e		+ 1,0000	·	- 1,0000	- 51,3000		- 52,3000
[f			+ 4,2501	- 0,2498	- 5,7109	- 4,9923	- 7,7036
[g				+ 4,2502	+ 62,2631	+ 4,3527	+ 69,6500
[h					+ 5273,8121	+ 12,1211	+ 5291,1855

Spajanje grupa

	A]	B]	C]	D]	E]	W	S]
[A	+ 5,3334	- 0,6666	- 2,0000	·	+ 95,6004	+ 7,1100	+ 105,3772
[B		+ 5,3334		- 2,0000	- 75,6996	- 3,2700	- 76,3028
[C			+ 5,2501	- 0,2498	- 67,6109	- 4,9923	- 69,6029
[D				+ 5,2502	+ 62,2631	+ 4,3527	+ 69,6162
[E					+ 12 866,3071	+ 28,7201	+ 12 909,5802

Računanje popravaka v

I. grupa

K	-0,4299	-1,3721	+0,3640	+0,6126	-0,8689	+0,0175	
	ak_1	dK_1	eK_2	fK_3	gK_4	hK_5	v_I
1.	+0,4299					+0,3798	+0,8097
2.	-0,4299		-0,3640			-0,2550	-1,0489
3.			00,3640			-0,1243	+0,2397
4.			-0,3640			+0,4865	+0,1225
17.		+1,3721		+0,6126		-1,0833	+0,9014
18.		-1,3721				+0,7770	-0,5951
19.		+1,3721				-0,0630	+1,3091
20.	+0,4299	-1,3721				-0,1785	-1,1207
21.	-0,4299					+0,2415	-0,1884
25			-0,3640		-0,8689		-1,2329
26	+0,4299		+0,3640				+0,7939
27.	-0,4299	+1,3721					+0,9422

$\sum v_I^2 = 9{,}0402$

II. grupa

K	+0,0591	+0,1517	-1,3721	+0,3640	+0,6126	-0,8689	+0,0175	
	bk_2	ck_3	dK_1	eK_2	fK_3	gK_4	hK_5	v_{II}
5.				+0,3640		+0,8689	-0,8978	+0,3351
6.						-0,8689	+0,4113	-0,4576
7.						+0,8689	+0,0018	+0,8707
8.		-0,1517				-0,8689	-0,2135	-1,2341
9.		+0,1517					+0,2118	+0,3635
10.		-0,1517					+0,0385	-0,1132
11.	-0,0591	+0,1517					-0,1663	-0,0737
12.	+0,0591						+0,1278	+0,1869
13.	-0,0591						+0,5128	+0,4537
14.	+0,0591				-0,6126		-0,4760	-1,0295
15.					+0,6126		-0,0368	+0,5758
16.					-0,6126		+0,3063	-0,3063
22	-0,0591				+0,6126			+0,5535
23	+0,0591	-0,1517						-0,0926
24		+0,1517				+0,8689		+1,0206
28			-1,3721		-0,6126			-1,9847

$\sum v_{II}^2 = 9{,}7749$

Kontrole računanja:

$$[vv] = [vv]_I + [vv]_{II} = 18.8151$$
$$- [Kw]^2 = 18.8155$$

$$[vv] = \frac{w_1^2}{[aa]} + \frac{[w_2.1]^2}{[bb.1]} + \frac{[w_3.2]^2}{[cc.2]} + \frac{W_1^2}{[AA]} + \frac{[W_2.1]^2}{[BB.1]} + \frac{[W_3.2]^2}{[CC.2]} + \frac{[W_4.3]^2}{[DD.3]} + \frac{[W_5.4]^2}{[EE.4]} = 18.8115$$

Računanje definitivnih pravaca

	Mjer. pravac			v"	Popr. pravac		
1.	315	53	16,70	+0,81	315	53	17,51
2.	0	00	00,00	-1,05	359	59	58,95
3.	108	33	28,90	+0,24	108	33	29,14
4.	27	45	37,69	+0,12	27	45	37,81
5.	64	49	08,69	+0,34	64	49	09,03
6.	106	37	57,09	-0,46	106	37	56,63
7.	210	24	08,15	+0,87	210	24	09,02
8.	299	59	40,94	-1,23	299	59	39,71
9.	0	00	00,00	+0,36	0	00	00,36
10.	43	21	08,32	-0,11	43	21	08,21
11.	127	21	25,67	-0,07	127	21	25,60
12.	198	20	25,82	+0,19	198	20	26,01
13.	0	00	00,00	+0,45	0	00	00,45
14.	35	42	41,88	-1,03	35	42	40,85
15.	131	36	05,08	+0,58	131	36	05,66
16.	176	44	11,23	-0,31	176	44	10,92
17.	227	01	44,25	+0,90	227	01	45,15
18.	252	23	41,02	-0,60	252	23	40,42
19.	260	13	18,69	+1,31	260	13	20,00
20.	0	00	00,00	-1,12	359	59	58,88
21.	56	50	10,12	-0,19	56	50	09,93
22.	286	41	39,45	+0,55	286	41	40,00
23.	0	00	00,00	-0,09	359	59	59,91
24.	35	59	21,15	+1,02	35	59	22,17
25.	84	35	05,79	-1,23	84	35	04,56
26.	118	58	02,85	+0,79	118	58	03,64
27.	198	01	10,66	+0,94	198	01	11,60
28.	252	52	40,15	-1,98	252	52	38,17

Zatvaranje figurnih uvjeta

	°	'	"
(2 1)	44	06	41,44
(27 26)	79	03	07,96
(21 20)	56	50	11,05
Σ =	180	00	00,45

	°	'	"
(3 2)	108	33	30,19
(5 4)	87	03	31,22
(26 25)	34	22	59,08
=	180	00	00,49

	°	'	"
(6 5)	41	48	47,60
(8 7)	89	35	30,69
(25 24)	48	35	42,39
=	180	00	00,68

	°	'	"
(9 8)	60	00	20,65
(11 10)	84	00	17,39
(24 23)	35	59	22,26
Σ =	180	00	00,30

	°	'	"
(14 13)	35	42	40,40
(23 21)	73	18	19,91
(12 11)	70	59	00,41
Σ =	180	00	00,72

	°	'	"
(15 14)	95	53	24,81
(17 16)	50	17	34,23
(22 28)	33	49	01,83
Σ =	180	00	00,87

	°	'	"
(18 17)	25	21	55,27
(20 19)	99	46	38,88
(28 27)	54	51	26,57
Σ =	180	00	00,72

Zatvaranje sinusnog uvjeta

log sin (12-11) = 9.9756268	log sin (14-13) = 9.7661899
log sin (9- 8) = 9.9375557	log sin (11-10) = 9.9976182
log sin (6- 5) = 9.8239334	log sin (8- 7) = 9.9999890
log sin (3- 2) = 9.9768082	log sin (5- 4) = 9.7800525
log sin (21-20) = 9.9227835	log sin (3- 1) = 9.8426448
log sin (18-17) = 9.6318381	log sin (20-19) = 9,9936455
log sin (23-14) = 9.9977010	log sin (17-16) = 9,8861869
Σ = 9.2662468	Σ = 9.2662469

Napomena: Kako vidimo, i u ovom su primjeru kao i u prošlom izvršene sve računske kontrole tokom računanja kako bi se eventualne pogreške u toku računanja uklonile. Na koncu, zatvaranje figurnih i sinusnog uvjeta daje nam garanciju da je zadatak pravilno ijvršen.

Izjednačenje u tri i više grupa

Do sada smo promatrali slučajeve, koji dolaze kod izjednačenja trig. mreže u dvije grupe. No, kako se radi o izjednačenju velikih trig. mreža, to će češći slučaj biti izjednačenje trig. mreže u više od dvije grupe. Prema tome potrebno je još obraditi i izjednačenje u više grupa.

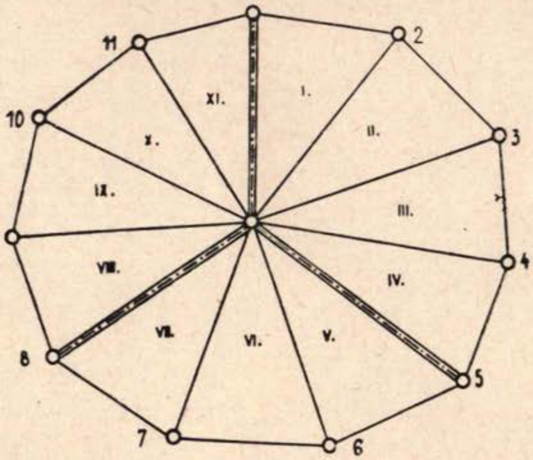
Izjednačenje trig. mreže u tri i više grupa u principu je isto kao i izjednačenje u dvije grupe. Razlika je samo u spajanju grupa, dok sve ostalo prije spajanja ostaje isto kao i kod slučaja izjednačenja trig. mreže u dvije grupe.

Pretpostavimo da nam je potrebno izjednačiti jednu trig. mrežu kao na sl. 12. Za izjednačenje ove trig. mreže metodom Pranis-Pranjevića podjelili smo cijelu mrežu u tri grupe.

Iz slike 12. vidimo da ova mreža sadrži 12 nezavisnih uvjeta i to: 11 figurnih uvjeta i 1 sinusni uvjet. Podjelivši ovu mrežu u tri grupe dobivamo u prvoj grupi 2, u drugoj 1 i u trećoj grupi 2 nezavisna uvjeta, dok su ostalih 7 uvjeta opći vezujući uvjeti. Prema tome u prvoj grupi računati ćemo nepoznanice (korelate) k_2 i k_3; u drugoj grupi računati ćemo nepoznanicu k_6; a u trećoj grupi nepoznanice k_9 i k_{10}.

Kako iz sl. 12. vidimo figurni uvjeti numerirani su redom od 1—11, a sinusni uvjet numeriran je brojem 12. Uvjeta horizonta u ovom slučaju nema, uz pretpostavku da izjednačenje vršimo po pravcima, a ne po kutevima.

Formirajmo sada normalne jednadžbe za slučaj prikazan na sl. 12. i objasnimo spajanje grupa. Zbog jednostavnosti prelazim odmah na formiranje normalnih jednadžbi preskočivši formiranje uvjetnih jednadžbi i prelaz na normalne jednadžbe.



Slika 12

Normalne jednadžbe za ovu mrežu glase:

$$
\begin{aligned}
[cc]k + [cn]k + [cm]k + [ch]k + [ci]k + [cj]k + w &= 0\\
[nn]k + [nm]k + [nh]k + [ni]k + [nj]k + w &= 0\\
[mm]k + [mh]k + [mi]k + [mj]k + 0 &= 0\\
[hh]k + [hi]k + [hj]k + w &= 0\\
[ii]k + [ij]k + 0 &= 0\\
[jj]k + 0 &= 0
\end{aligned}
$$

za I. grupu;

$$
\begin{aligned}
[aa]k + [ab]k + [af]k + [ag]k + [ah]k + [ai]k + [aj]k + w &= 0\\
[bb]k + [bf]k + [bg]k + [bh]k + [bi]k + [bj]k + w &= 0\\
[ff]k + [fg]k + [fh]k + [fi]k + [fj]k - w &= 0\\
[gg]k + [gh]k + [gi]k + [gj]k + w &= 0\\
[hh]k + [hi]k + [hj]k + 0 &= 0\\
[ii]k + [ij]k + w &= 0\\
[jj]k + w &= 0
\end{aligned}
$$

za II. grupu; i

$$[dd]k_1 + [de]k_{11} + [dn]k_7 + [dm]k_8 + [df]k_9 + [dg]k_{10} + [dj]k_{12} + w_1 = 0$$
$$[ee]k_{11} + [en]k_7 + [em]k_8 + [ef]k_9 + [eg]k_{10} + [ej]k_{12} + w_{11} = 0$$
$$[nn]k_7 + [nm]k_8 + [nf]k_9 + [ng]k_{10} + [nj]k_{12} + 0 = 0$$
$$[mm]k_8 + [mf]k_9 + [mg]k_{10} + [mj]k_{12} + w_3 = 0$$
$$[ff]k_9 + [fg]k_{10} + [fj]k_{12} + 0 = 0$$
$$[gg]k_{10} + [gj]k_{12} + 0 = 0$$
$$[jj]k_{12} + 0 = 0$$

za III. grupu

Nakon formiranja normalnih jednadžbi prelazimo na eliminaciju nepoznanica i spajanje grupa.

Za naš primjer na sl. 12. računati ćemo najprije nepoznanicu k_{12} i to spajanjem svih triju grupa. Za tu svrhu eliminirati ćemo sve nepoznanice iz svih grupa i u svakoj grupi dobiti ćemo po jednu reduciranu jednadžbu, koja će glasiti:

$[jj\cdot 6]k_{12} + w_{12}\cdot 6 = 0$	za I. grupu
$[jj\cdot 5]k_{12} + w_{12}\cdot 5 = 0$	za II. grupu i
$[jj\cdot 6]k_{12} + w_{12}\cdot 6 = 0$	za III. grupu

Zbrojima li sada koeficijente pred nepoznanicom k_{12} i slobodne članove dobiti ćemo jednu jednadžbu koju kada rješimo dobivamo veličinu k_{12}.

Iza toga računamo nepoznanice k_4 i k_5 spajanjem I. i II. grupe. Eliminiravši iz I. i II. grupe nepoznanice k_2, k_3, k_1, k_{11}, k_6, k_7 i k_8 dobijemo:

$$[hh\cdot 4]k_4 + [hi\cdot 4]k_5 + [hj\cdot 4]k_{12} + w_4\cdot 4 = 0$$
$$[ii\cdot 4]k_5 + [ij\cdot 4]k_{12} + w_5\cdot 4 = 0$$

za I. grupu, i

$$[hh\cdot 3]k_4 + [hi\cdot 3]k_5 + [hj\cdot 3]k_{12} + w_4\cdot 3 = 0$$
$$[ii\cdot 3]k_5 + [ij\cdot 3]k_{12} + w_5\cdot 3 = 0$$

za II. grupu

Kada zbrojimo koeficijente pred istim nepoznanicama iz I. i II. grupe i kada u obe grupe uvrstimo već sračunatu nepoznanicu k_{12} dobiti ćemo dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice koje kada rješimo dobijemo veličine k_4 i k_5.

Iza toga prelazimo na računanje nepoznanica k_1 i k_{11} i to spajanjem I. i III. grupe, a onda računamo k_7 i k_8 spajanjem II. i III. grupe. Ova spajanja se vrše na isti način kao i spajanje I. i II. grupe.

Sada, kada su sračunate sve nepoznanice opće vezajućih uvjeta onda se računaju nepoznanice koje pripadaju samo jednoj grupi. Uvrštenjem do sada sračunatih nepoznanica u pojedine grupe dobivamo preostale nepoznanice koje pripadaju uvjetima svake pojedine grupe.

Time je završeno računanje nepoznanica u više grupa. Preostaje još računanje popravaka v, računanje definitivnih pravaca, odnosno kuteva i kontrole računanja. Kontrole računanja za [vv] računaju se po istim formulama kao što je u naprijed navedenim primjerima pokazano.