

## Računanje koordinata čvorne tačke:

- a) presecanjem pravaca dijagonala i  
b) lučnim presekom dužina dijagonala učvorenih vlakova

Pri računanju koordinata čvorne tačke, tačnosti učvorenih vlakova ocenjuje se po njihovim uglovnim i linearnim odstupanjima prema vrednostima nagiba zajedničke strane i koordinata čvorne tačke dobivenih kao opšta aritmetička sredina iz rezultata svih vlakova. Ako su ova odstupanja u granicama dozvoljenih onda se pristupa računanju koordinata poligonih tačaka.

Međutim, pri merenju poligonih strana može da se potkrade i koja gruba greška (manja) a da linearno odstupanje vlaka sa pogrešno merenom stranom ipak ulazi u granice dozvoljenog jer je ta greška obrazovanjem aritmetičke sredine iz svih vrednosti za koordinate čvorne tačke izravnata odnosno raspodeljena na sve učvorene vlakove. Takva se greška otkriva tek pri računanju kratkih poprečnih vlakova, umetnutih između tačaka dva učvorenih vlaka, kada njihovo uglovno odstupanje ne ulazi u granice dozvoljenih odstupanja za  $f_{\beta}$ .

Za primer koji će se u ovome članku rasmatrati, uzet je slučaj, kada se 5 vlakova sustižu u jednoj trigonometrijskoj tački za čije se koordinate može pretpostaviti da su bez greške. Ova će se tačka odrediti iz ovih vlakova kao čvorna tačka, te će odstupanja prema vrednostima koordinata određenih triangulacijom pružiti jasnu sliku o tačnosti čvorne tačke. Situacija poligonih vlakova prikazana je na skici.

## Podaci:

za vlak broj 90

$$\Delta 72 \ y = 43837, 56_0, \ x = 51449, 32_1$$

$$\nu_{73}^{72} = 212^{\circ} 57' 25''$$

vezni i prelomni uglovi:	dužine strana:
--------------------------	----------------

$\beta_{72} = 197^{\circ} 53' 48''$	m
$\beta_{201} = 169^{\circ} 32' 42''$	235, 89 <sub>0</sub>
$\beta_{244} = 178^{\circ} 17' 30''$	246, 76 <sub>7</sub>
$\beta_{245} = 181^{\circ} 03' 00''$	216, 98 <sub>8</sub>
$\beta_{246} = 181^{\circ} 39' 30''$	250, 60 <sub>4</sub>
$\beta_{247} = 176^{\circ} 16' 00''$	217, 94 <sub>5</sub>
$\beta_{248} = 169^{\circ} 14' 18''$	228, 43 <sub>1</sub>
$\beta_{124} = 180^{\circ} 33' 24''$	258, 83 <sub>8</sub>

za vlak broj 91

$$\Delta 86 \ y = 43691, 54_5, \ x = 49876, 39_1$$

$$\nu_{118}^{86} = 42^{\circ} 55' 27''$$

vezni i prelomni uglovi:	dužine strana:
--------------------------	----------------

$\beta_{86} = 66^{\circ} 20' 18''$	m
$\beta_{464} = 178^{\circ} 11' 12''$	291, 90 <sub>3</sub>
$\beta_{469} = 175^{\circ} 00' 18''$	176, 81 <sub>5</sub>
$\beta_{455} = 189^{\circ} 36' 18''$	182, 27 <sub>2</sub>
$\beta_{124} = 95^{\circ} 25' 00''$	292, 79 <sub>2</sub>

za vlak broj 79

$$\Delta 88 y = 42415, 74_0, x = 48661, 59_3$$

$$v_{118}^{88} = 39^0 23' 46''$$

vezni i prelomni uglovi:	dužine strana:
$\beta_{88} = 154^0 45' 00''$	
$\beta_{403} = 179^0 04' 18''$	227, 04 <sub>6</sub>
$\beta_{405} = 181^0 43' 21''$	233, 29 <sub>1</sub>
$\beta_{406} = 179^0 17' 00''$	238, 24 <sub>1</sub>
$\beta_{407} = 179^0 52' 33''$	303, 48 <sub>0</sub>
$\beta_{408} = 180^0 11' 45''$	294, 52 <sub>4</sub>
$\beta_{124} = 13^0 09' 30''$	264, 90 <sub>3</sub>

za vlak broj 58

$$\Delta 85 y = 41842, 00_0, x = 50380, 62_6$$

$$v_{124}^{85} = 282^0 09' 06''$$

vezni i prelomni uglovi:	dužine strana:
$\beta_{85} = 357^0 42' 00''$	
$\beta_{435} = 177^0 22' 12''$	238, 90 <sub>4</sub>
$\beta_{436} = 193^0 06' 48''$	250, 22 <sub>2</sub>
$\beta_{437} = 170^0 25' 15''$	258, 71 <sub>5</sub>
$\beta_{124} = 286^0 42' 51''$	234, 01 <sub>1</sub>

za vlak broj 57

$$\Delta 71 y = 42057, 33_6, x = 51350, 38_7$$

$$v_{471} = 218^0 44' 23''$$

vezni i prelomni uglovi:	dužine strana:
$\beta_{71} = 110^0 32' 39''$	
$\beta_{223} = 178^0 04' 09''$	230, 33 <sub>2</sub>
$\beta_{224} = 179^0 31' 03''$	231, 80 <sub>5</sub>
$\beta_{225} = 180^0 50' 09''$	208, 59 <sub>6</sub>
$\beta_{232} = 179^0 07' 51''$	238, 68 <sub>0</sub>
$\beta_{233} = 181^0 39' 42''$	225, 70 <sub>7</sub>
$\beta_{124} = 238^0 57' 12''$	254, 22 <sub>0</sub>

Za O 124 sračunate su koordinate kao za čvornu tačku na uobičajen način u trig. obr. broj 19 i 21 i to prvo iz svih 5 vlakova, a zatim iz 3 vlaka, najbolje pružena i ravnomerno raspoređena.

U prvom slučaju za koordinate čvorne tačke dobivena je vrednost:

$$y = 42797, 95_7, x = 50175, 00_0$$

Uglovna i linearna otstupanja

vlaka br. 90 ... $f_\beta = +00' 13''$	dozvoljeno	2' 50''	$f_d = 0,31$	dozvoljeno	$2/3 \text{ II} = 1,17$
„ „ 91 ... $f_\beta = -00' 43''$	„	2' 14''	$f_d = 0,12$	„	= 0,74
„ „ 79 ... $f_\beta = +00' 37''$	„	2' 39''	$f_d = 0,53$	„	= 1,11
„ „ 58 ... $f_\beta = -00' 22''$	„	2' 14''	$f_d = 0,30$	„	= 0,70
„ „ 57 ... $f_\beta = +00' 42''$	„	2' 39''	$f_d = 0,24$	„	= 1,01

U drugom slučaju dobivene su koordinatne vrednosti:

$y = 42797, 86_7, x = 50175, 06_6$	a uglovna i linearna otstupanja
vlaka br. 91 ... $f_\beta = -00' 48''$	dozvoljeno 2' 14'' $f_d = 0,22$ dozvoljeno $2/3 \text{ II} = 0,74$
„ „ 79 ... $f_\beta = +00' 32''$	„ 2' 39'' $f_d = 0,46$ „ = 1,11
„ „ 57 ... $f_\beta = +00' 37''$	„ 2' 39'' $f_d = 0,17$ „ = 1,01

Kako se vidi iz gornjeg prikaza, uglovna i linearna otstupanja u oba slučaja ulaze u granice dozvoljenog. Međutim dobivene koordinate otstupaju od vred-

nosti iz triangulacije  $y = 42797,83_4$ ,  $x = 50174,81_8$ , što je i grafički prikazano na skici u krupnoj razmeri. Čvorna tačka sračunata iz 5 vlakova odstupa linearno za 23, a druga koja je sračunata iz vlaka odstupa za 25 cm od položaja tačke određene triangulacijom. Vidi se i to, da se povećavanjem broja učvorenih vlakova ne postizava neko znatno poboljšanje položaja čvorne tačke, već da su za pravilno određivanje iste dovoljna 3—4 pružena i pravilno raspoređena vlaka, što je u stručnoj literaturi i naglašeno.

Primeru radi u vlak broj 79 ubacit će se jedna gruba dužinska greška i to skraćivanjem strane  $\odot 406 - \odot 407$  za 1 metar. Radi uprošćavanja s obzirom na gore rečeno, čvorna tačka sračunata samo iz tri vlaka i to iz vlaka broj 91, 79 i 57. Na pravac vlaka broj 79 ova greška nema uticaja iz razloga, što je vlak dovoljno pružen a nastalo je samo neznatno paralelno pomeranje od oko 1 cm. Srednja vrednost nagiba zajedničke strane  $\odot 124 - \triangle 118$  sračunata iz navedena tri vlaka odstupa svega za 5" od vrednosti dobivene iz svih 5 vlakova. I ova je razlika zanemarena, pošto je njen uticaj na koordinate  $\odot 124$  manji od 1 santimetra. Za koordinate čvorne tačke sračunate iz navedena tri vlaka (vlak broj 79 pogrešan!) dobivene su vrednosti  $y = 42797,81_2$  i  $x = 50174,83$ , Linearna ostupanja su:

za vlak broj 91 ...	$f_d = 0,15$	dozvoljeno $\frac{2}{3} II = 0,74$
" " " 79 ...	$f_d = 0,34$	" = 1,11 i
" " " 57 ...	$f_d = 0,18$	" = 1,01

Iz dobivenih rezultata vidi se da i ova linearna ostupanja ulaze u granice dozvoljenog, a pošto su još i znatno manja od ostupanja iz računanja sa nepromenjenom dužinom strane  $\odot 406 - \odot 407$ , moglo bi se zaključiti, da u izvornim podacima stvarno postoji neko ostupanje u stranama vlaka broj 79. Prema grafičkom prikazu, novi položaj čvorne tačke nalazi se na svega 2,6 cm od trig. tačke 124.

Iz računskih elaborata poslednjih godina vidi se, da su uglovna ostupanja pri računanju nagiba zajedničke strane u trig. obr. broj 21 obično oko 1" a često i manja, što je postignuto pažljivim radom i upotrebom boljih, preciznijih instrumenata. Ako se ima na umu, da je prema starom pravilniku pri određivanju naknadnih trig. tačaka do 1 km udaljenosti bilo dozvoljeno ostupnje od  $\pm 35''$  između opažanog i sračunatog pravca, onda se dolazi do zaključka, da bi se koordinate čvorne tačke mogle sa dovoljnom tačnošću odrediti presjecanjem dijagonala učvorenih vlakova, tj. presecanjem pravaca određenih početnim tačkama vlakova — koje su trigonometričke tačke — i neizravnatim krajnjim tačkama vlakova sračunatih u trećem odeljku trig. obr. broj 21.

Za koordinate krajnjih tačaka dobivene su sledeće vrednosti:

iz vlaka broj 90 ...	$y = 42\ 797,98_1$	$x = 50\ 175,31_4$
" " " 91 ...	$y = 42\ 797,95_7$	$x = 50\ 174,88_8$
" " " 79 ...	$y = 42\ 797,86_7$	$x = 50\ 175,52_7$
" " " 57 ...	$y = 42\ 797,71_1$	$x = 50\ 174,98_7$
" " " 58 ...	$y = 42\ 798,12_8$	$x = 50\ 174,76_3$ i

Iz koordinatnih razlika navedenih tačaka sračunati su direkcioni uglovi, koji će kao orijentisani pravci presecanjem odrediti položaj krajnje (čvorne) tačke.

Vrednosti direkcionih uglova i dužine dijagonala jesu:

za vlak broj 90 ...	$\nu_{72}^{124} = 219^{\circ} 12' 53''$	$d = 1644, 33_3$
„ „ „ 91 ...	$\nu_{86}^{124} = 288^{\circ} 28' 16''$	942, 12 <sub>0</sub>
„ „ „ 79 ...	$\nu_{88}^{124} = 14^{\circ} 09' 57''$	1560, 43 <sub>1</sub>
„ „ „ 58 ...	$\nu_{85}^{124} = 102^{\circ} 09' 04''$	978, 04 <sub>1</sub> i
„ „ „ 57 ...	$\nu_{71}^{124} = 147^{\circ} 47' 36''$	1389, 16 <sub>1</sub>

Pošto se u prvom odeljku trig. obr. broj 21 pri računanju srednje vrednosti nagiba zajedničke strane već vodilo računa o težinama približnih vrednosti — prema broju merenih uglova u vlaku — vrednosti direkcionih uglova dijagonala mogu se bez daljeg upotrebiti za računanje preseka. Da bi se tačnost merenih uglova na čvornoj tački te prema tome i tačnost pravaca dijagonala povećala, preporučuje se, da se za zjedničku stranu uzima vizura na neku udaljenu tačku, za koju međutim ne moraju biti određene koordinate.

Položaj čvorne tačke za koju su koordinate  $y = 42\ 797, 71$ ,  $x = 50\ 174, 91_0$  dobivene izravnanjem preseka pravaca dijagonala svih 5 vlakova, odstupa linearno za 15 cm, a položaj sračunat iz preseka dijagonala samo tri vlakova (broj 91, 79 i 57)  $y = 42\ 797, 71_1$ ,  $x = 50\ 174, 96_5$  odstupa za 19 cm od položaja  $\Delta 124$ , dakle približno isto toliko kao u slučaju 5 vlakova. Nesigurnost pravca je  $\pm 11''$  a najveća popravka iznosi  $14''$ . Pravci ovih dijagonala naneti su pomoću uglomera i kako je iz grafičkog prikaza vidljivo, pravci dijagonala vlakova broj 91, 79 i 57 seku se u jednoj tački — B — a pravac vlaka broj 90 prolazi na svega 2,5 cm pored nje. Međutim pravac vlaka broj 58 prolazi pored ovoga preseka na 11 cm udaljenosti. Pravci dijagonala vlakova broj 91, 79, 57 i 90 daju dobre preseke iako su na početnim tačkama  $\Delta 86$ ,  $\Delta 88$ ,  $\Delta 71$  i  $\Delta 72$  orijentisani prema raznim okolnim trig. tačkama i to: prvi prema  $\Delta 118$ , drugi prema  $\Delta 118$ , treći prema  $\Delta 74$  a četvrti prema  $\Delta 73$ . Moglo bi se pomisliti, da su koordinate  $\Delta 124$  neispravne. Što pravac dijagonale vlaka broj 58 prolazi pored same trig. tačke 124 moglo bi se objasniti time, što je ovaj vlak na početnoj tački  $\Delta 85$  orijentisan prema samoj  $\Delta 124$  i da presek B leži približno na periferiji kruga opisanog oko trig. tačaka 85, 124 i 118. No ova pretpostavka ne mora biti osnovana, jer podudarnost preseka kod tačke B može biti i slučajnog karaktera. Pravci koji se seku u tački B ili prolaze u neposrednoj blizini pored nje obrazuju male trouglove grešaka a izravnati položaj preseka mogao bi se ucertati prostim ocenjivanjem.

Pravci dijagonala vlakova broj 79, 58 i 57 međutim obrazuju poveći trougao grešaka, unutar kojega se nalazi izravnati položaj preseka, čije su koordinate  $y = 42\ 797, 73_3$ ,  $x = 50\ 174, 86_4$  sračunate u trig. obr. broj 10. No koordinate preseka nebi se morale računati — izravnati — u trig. obr. broj 10, već se mogu mnogo brže i očigledno izravnati grafičkim putem. Za ovo grafičko izravnanje dolaze u obzir samo stroge metode po principu najmanjih kvadrata. Ove su metode jednostavno samo u slučaju 3 pravca, dok je pri većem broju pravaca grafičko izravnanje po strogoj metodi komplikovano i gubi svoju prednost pred numeričkom metodom izravnjanja.

U iznetom primeru izravnanje preseka nije potrebno jer su trouglovi grešaka mali. Međutim primera radi i s obzirom na izravnanje lučnih preseka, koje se može izvesti po analognom postupku izneće se praktična primena ove metode. Teorno obrazloženje nalazimo u II knjizi Jordan-ove »Geodezije«.

Za primer je uzet gore označeni trougao grešaka ABC koji je nastao presekom pravaca dijagonala vlakova broj 79, 58 i 57. Na grafičkom prikazu

Grafičko izravnanje preseka pravaca dijagonala vlakova br

(79) (58) (57)

Trougao grešaka ABC

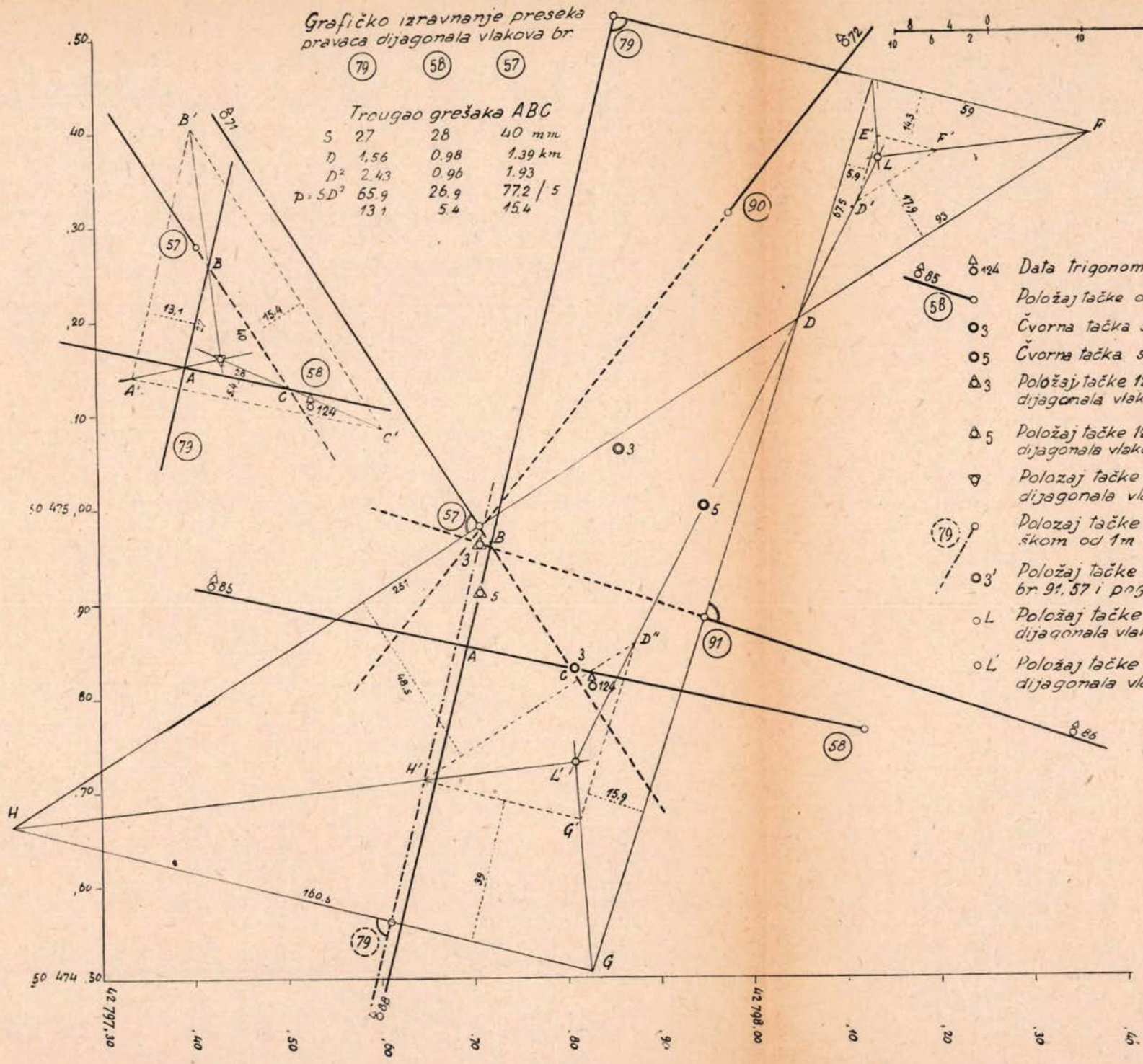
S	27	28	40 mm
D	1,56	0,98	1,39 km
D <sup>2</sup>	2,43	0,96	1,93
p = SD <sup>2</sup>	65,9	26,9	77,2 / 5
	13,1	5,4	15,4

Grafičko izravnanje lučnog preseka L vlakova broj

(91) (79) (57)

Trougao grešaka EFD

S	67,5	59	93
D	0,94	1,56	1,39
D <sup>2</sup>	0,88	2,43	1,93
SD <sup>2</sup>	59,4	143,3	179,4 / 10



- △<sub>124</sub> Data trigonom. tačka
- <sub>58</sub> Položaj tačke o<sub>124</sub> sračunate iz vlaka br 58
- <sub>3</sub> Čvorna tačka sračunata iz vlakova br 91, 79 i 57
- <sub>5</sub> Čvorna tačka sračunata iz vlakova br 91, 79, 58, 57 i 90
- △<sub>3</sub> Položaj tačke 124 određene presecanjem pravaca dijagonala vlakova br 91, 57 i 79
- △<sub>5</sub> Položaj tačke 124 određene presecanjem pravaca dijagonala vlakova br 91, 79, 58, 57 i 90
- ▽ Položaj tačke 124 određene presecanjem pravaca dijagonala vlakova br 79, 58 i 57
- <sub>79</sub> Položaj tačke 124 sračunate iz vlaka br 79 sa greškom od 1m u strani o<sub>406</sub>-o<sub>407</sub>
- <sub>3'</sub> Položaj tačke 124 određene kao čvorna iz vlakova br 91, 57 i pogrešnog vlaka br 79
- <sub>L</sub> Položaj tačke 124 određene lučnim presekom dijagonala vlakova br 91, 57 i 79 (ispravnog)
- <sub>L'</sub> Položaj tačke 124 određene lučnim presekom dijagonala vlakova br 91, 57 i pogrešnog vlaka br 79

Grafičko izravnanje lučnog preseka L' vlakova broj

(91) (79) (57)

Trougao grešaka DGH

S	181	160,5	251
D <sup>2</sup>	0,88	2,43	1,93
SD <sup>2</sup>	159	390	485 / 10



ovaj je trougao nacrtan izdvojeno u levom gornjem uglu formata. Razmernikom se izmeri dužina strana AB, BC i CA do na milimetar. Ove vrednosti (s) pomnože se kvadratom dužina dijagonala (samo na 2 dec. mesta km). Proizvodi predstavljaju upravna otstojanja (p) od odgovarajućih strana trougla grešaka. Na ovom otstojanju treba povući paralelu sa dotičnom stranom trougla i na taj način dobija se sličan trougao u centralnom položaju prema prvom. Veličina proizvoda p nije bitna već samo njihov međusobni odnos, te prema tome oni se mogu pomnožiti pogodnim faktorom da bi se mogao konstruirati sličan trougao, manji ili veći od trougla grešaka, već prema potrebi. Na preseku prava AA', BB' i CC' nalazi se izravnati položaj tačke preseka, koji se do na santimetar podudara sa položajem dobivenim numeričkim izravnanjem koordinata preseka.

Koordinate čvorne tačke mogu se odrediti i presekom krugova opisanih oko polaznih trig. tačaka, a sa poluprečnikom koji je ravan dužini dijagonale. Srednji položaj preseka konstruiše se analogno gore opisanom postupku.

U krajnjim tačkama dijagonala vlakova broj 91, 79 i 57 podižu se upravne koje predstavljaju delove kružnih lukova. Presekom ovih upravnih nastaje trougao grešaka koji je sličan trouglu grešaka preseka pravaca ali je zaokrenut za 90°. Daljni postupak je isti kao pri iznalaženju srednjeg položaja preseka pravaca. Na grafičkom prikazu ova je konstrukcija dva put izvedena, jednom za lučni presek dijagonala vlakova broj 91, 79 i 57 u trouglu greška DEF, a drugi put za lučni presek dijagonala istih vlakova ali sa dužinskom greškom od 1 metra u vlaku broj 79 (trougao DGH).

Iz grafičke pretstave vidi se:

1. da će trouglovi grešaka za presecanje pravaca i grešaka lučnih preseka biti približno iste veličine u slučaju kada tačnost merenja strana odgovara tačnosti merenja uglova i

2. da će se u slučaju ispravnog merenja uglova i strana, trouglovi barem delimično preklapati.

U slučaju kada su trouglovi razmaknuti, iz pravca njihovog razmaka i nje-gove veličine može se ustanoviti u kome su vlaku neispravno određene dužine.

Prikazane konstrukcije su jednostavne i mogu se izvesti sa dovoljnom tačnošću i na običnoj kariranoj hartiji te bi njihova primena mogla služiti za ocenu tačnosti položaja čvorne tačke pre no što se pristupi računanju definitivnih koordinata poligonih tačaka učvorenih vlakova.