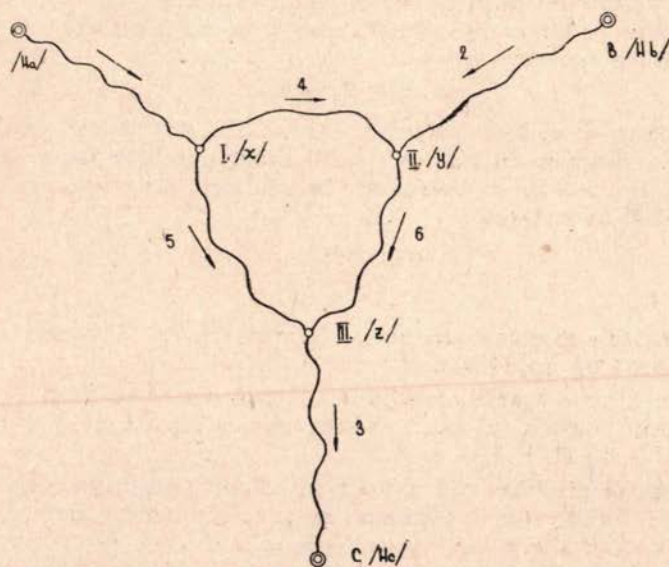


Ing. Boris Filatov, Zagreb

Izjednačenje nivelmanskih i poligonskih višestrukih čvornih točaka metodom postupnog približavanja

Dvostruke nivelmanske i poligonske čvorne točke obično se izjednačuju po principu opće aritmetičke sredine metodom t. zv. svedenih vlakova. Istom metodom mogu biti izjednačene i višestruke čvorne točke. Međutim u takvom slučaju svođenje vlakova može da bude dosta komplicirano. Jednostavnije i brže



Sl. 1.

možemo doći do traženih rezultata, ako mjesto metode svedenih vlakova primijenimo metodu postupnog približavanja. Suština ove metode sastoji se u ovom:

Uzmemo, na primjer, nivelmansku mrežu s tri čvorne točke I, II i III; ona je prikazana na sl. 1. Ova mreža uvrštena je između repera A, B i C sa zadanim visinama H_a , H_b i H_c . U vlakovima 1, 2, ..., 6 izmjerene su visinske razlike h_1' , h_2' , ..., h_6' s težinama p_1 , p_2 , ..., p_6 .

Pretpostavimo, da smo ovu mrežu izjednačili odjednom po načinu posrednih mjerenja i prema tome odredili najvjerojatnije vrijednosti x , y i z visina čvornih točaka I, II i III.

Ako uzmemo sada, da su y i z zadani, onda x možemo odrediti kao opću aritmetičku sredinu iz vrijednosti dobivenih po vlakovima 1, 4 i 5 t. j.

$$x = \frac{(H_a + h_1') p_1 + (y + h_4') p_4 + (z + h_5') p_5}{p_1 + p_4 + p_5} \quad (1)$$

Smatramo li, da su x i z zadani, onda se y određuje kao opća aritmetička sredina iz vrijednosti dobivenih po vlakovima 2, 4 i 6 t. j.

$$y = \frac{(H_b + h_2') p_2 + (x + h_4') p_4 + (z + h_6') p_6}{p_2 + p_4 + p_6} \quad (2)$$

Isto tako, ako su x i y zadani, odredit će se z kao opća aritmetička sredina iz vrijednosti dobivenih po vlakovima 3, 5 i 6 t. j.

$$z = \frac{(H_c + h_3') p_3 + (x + h_5') p_5 + (y + h_6') p_6}{p_3 + p_5 + p_6} \quad (3)$$

Dakle imamo tri jednadžbe s tri nepoznanice x , y i z . Ove nepoznanice određujemo postupnim približavanjem na idući način.

U prvom približavanju određujemo x pomoću visinske razlike izmjerene od zadanog repera, t. j.

$$x = H_a + h_1'$$

Nepoznanicu y možemo odrediti kao običnu aritmetičku sredinu iz vrijednosti dobivenih pomoću visinskih razlika izmjerenih od zadanog repera i od čvorne točke I, pri čemu za visinu ove čvorne točke uzimamo prethodno određenu vrijednost za x . Dakle

$$y = \frac{(H_b + h_2') + (x + h_4')}{2}$$

Nepoznanicu z možemo odrediti po formuli (3). Pri tome za x i y uzimamo prethodno određene vrijednosti.

Međutim u prvom približavanju y i z možemo odrediti na isti način kao i x , t. j. samo pomoću visinskih razlika izmjerenih od datih repera. Dakle, $y = H_b + h_2'$ i $z = H_c + h_3'$.

U drugom približavanju x , y i z određujemo po formulama (1), (2) i (3). Pri tome kod određivanja x uzimamo za y i z vrijednosti dobivene u prvom približavanju. Kod određivanja y uzimamo x iz drugog, a z iz prvog približavanja, dok kod određivanja z uzimamo x i y iz drugog približavanja.

U trećem približavanju postupamo na isti način kao i u drugom. Dakle, kod određivanja x uzimamo y i z iz drugog približavanja. Kod određivanja y uzimamo x iz trećeg, a z iz drugog približavanja. I kod određivanja z uzimamo x i y iz trećeg približavanja.

I tako produžujemo dalje, dok konačno ne dobijemo za svaku nepoznanicu iste vrijednosti (u granicama tražene točnosti) kao i u prethodnom približavanju.

Izjednačenje ove nivelmanske mreže s numeričkim podacima prikazano je u tablici br. 1.

Izjednačenje visina čvornih točaka I, II, III

Br. čvorne točke	Br. vlaka	Računski točka		Njema vid razlika h_m	Duž vlaka S_m	Težina $P = \frac{S}{L}$		1. približavanje		2. približavanje		3. približavanje		4. približavanje		v	pv	pvv																																																							
		Br.	Visina H_m			$P = \frac{S}{L}$	$P = \frac{S}{L}$	H'	ΔH_0	$\Delta H_0 P'$	H''	ΔH_0	$\Delta H_0 P'$	H'''	ΔH_0				$\Delta H_0 P'$	H''''	ΔH_0	$\Delta H_0 P'$																																																			
I.	1 4 5	A II III	125,378	x 6,438 x 7,765 x 5,464	4,2	0,24 0,16 0,13	0,45	121,076	28 49 0	12,6 14,7 0,0	721,876 837 788	22 0 7	8,1 0,0 2,1	124,672 649 665	23 0 16	8,5 0,0 4,8	-10 +13 -3	-1,7 -2,3 1,04	1,0 2,3 11,4																																																						
																				B I III	118,529	6,743 2,835 x 8,333	5,5	0,78 0,16 0,15	0,37	124,672	0 0 0	12,6 0,0 6,6	721,876 837 788	22 0 7	8,1 0,0 2,1	124,672 649 665	23 0 16	8,5 0,0 4,8	-10 +13 -3	-1,7 -2,3 1,04	1,0 2,3 11,4																																				
																																						C I II	127,456	x 4,868 4,536 1,667	4,8	0,21 0,13 0,15	0,43	126,384	0 27 3	12,6 14,7 0,0	721,876 837 788	22 0 7	8,1 0,0 2,1	124,672 649 665	23 0 16	8,5 0,0 4,8	-10 +13 -3	-1,7 -2,3 1,04	1,0 2,3 11,4																		
																																																								3	4,868	x 4,868	4,8	0,21	0,43	126,384	0	12,6	721,876	22	8,1	124,672	23	8,5	-10	-1,7	1,0
6	1,667	1,667	4,8	0,15	0,31	126,384	3	0,0	6,6	788	7	2,1	665	16	4,8	-3	1,04	11,4																																																							

$\Sigma \frac{1}{2} (2,5 - 3) = 1,25$
 $\frac{1}{2} (2,5 - 3) = 1,25$
 $\frac{1}{2} (2,5 - 3) = 1,25$
 $\frac{1}{2} (2,5 - 3) = 1,25$
 $\frac{1}{2} (2,5 - 3) = 1,25$
 $\frac{1}{2} (2,5 - 3) = 1,25$

U 1., 2., 3., 4. i 5. stupac upisujemo broj čvorne točke, brojeve vlakova, iz kojih se točka određuje, broj početne točke u svakom vlaku i njezinu zadanu visinu (za date repere), izmjerene visinske razlike h' (negativne vrijednosti upisujemo izražene u dekadskoj dopuni) i dužine vlakova s u km.

U 6. stupac upisujemo težine $p = \frac{1}{s}$ i zatim izračunamo za svaku čvornu točku njihovu sumu $[p]$.

U 7. stupcu izračunamo (radi lakšeg računanja opće aritmetičke sredine) kvocijente $p' = \frac{p}{[p]}$. Za kontrolu mora da bude $[p'] = 1$.

U 8. stupcu određujemo visine čvornih točaka u prvom približavanju.

Najprije u lijevom dijelu stupca upišemo pojedine približne visine čvornih točaka, koje se određuju pomoću datih repere (na pr. za I. čvornu točku $125,378 + \times 6,438 = 121,816$ i t. d.).

Ove približne visine u svim približavanjima ostaju iste.

U našem primjeru približne visine uzete su za visine čvornih točaka u prvom približavanju i kao takve upisane su još i dolje ispod crte.

U 9. stupcu određujemo visine čvornih točaka u drugom približavanju na već prije opisani način po formulama (1), (2) i (3).

Prvo odredimo visinu čvorne točke I.

U lijevom dijelu stupca upisujemo pojedine približne visine

$$(121,816; 124,672 + \times 7,165 = 121,837; 126,324 + \times 5,464 = 121,788).$$

U srednjem dijelu stupca upisujemo razlike δH_0 (u mm) između najmanje vrijednosti i pojedinih vrijednosti približnih visina (na pr. $121,816 - 121,788 = 28$ mm i t. d.).

U desnom dijelu stupca izračunamo logaritmarom produkte $\delta H_0 \cdot p'$. Produkte računamo na desetinke milimetra (na pr. $28 \times 0,45 = 12,6$ i t. d.).

Sumu izračunatih produkata (27,3) upisujemo dolje ispod crte, a zatim ovu sumu zaokružavamo na cijele milimetre i pribrajamo najmanjoj približnoj visini ($121,788 + 27$ mm = 121,815). Dobivena vrijednost bit će visina I. čvorne točke u drugom približavanju. Ona se upisuje ispod crte u lijevom dijelu stupca. Dolje upisujemo popravku visine, t. j. razliku između vrijednosti visine dobivene u drugom i u prvom približavanju ($121,814 - 121,815 = -1$ mm).

Kada računamo računskim strojem, onda srednji i desni dijelovi stupca nisu potrebni. U ovom slučaju opću aritmetičku sredinu određujemo ovako. Strojem množimo varijabilne dijelove vrijednosti približnih visina s odgovarajućim kvocijentima p' ($816 \times 0,45; 837 \times 0,30; 788 \times 0,25$). Tokom računanja rezultatni dio stroja ne brišemo. U njemu se automatski određuje suma produkata. Ova će suma (815,30) biti varijabilni dio vrijednosti opće aritmetičke sredine. Dakle, visina I. točke u drugom približavanju (zaokružena na mm) bit će 121,815.

Zatim po istom postupku određujemo visinu II. čvorne točke, a onda i III. točke.

U 10. stupcu računamo visine čvornih točaka u trećem približavanju, i to na isti način kao i u drugom približavanju.

Ovdje pojedine približne visine određujemo tako, da približnoj visini, koja je određena u prethodnom približavanju dodamo odgovarajuću popravku visine početne točke u vlaku. Na pr. za I. čvornu točku približna visina po 4. vlaku u drugom približavanju je 121,837. Popravka visine početne točke u vlaku, t. j.

II. čvorne točke u drugom približavanju je — 12 mm. Dakle će približna visina u trećem približavanju po 4. vlaku biti $112,837 - 12 \text{ mm} = 127,825$, a po 5. vlaku $121,788 + 8 \text{ mm} = 121,796$. I t. d.

Za III. čvornu točku dobili smo u ovom približavanju istu visinu kao i u prethodnom približavanju.

U 11. stupcu računamo visine u četvrtom približavanju.

Za I. čvornu točku dobili smo istu visinu kao i u trećem približavanju.

Za II. čvornu točku nismo računali, jer se unaprijed vidi, da ćemo dobiti istu vrijednost kao i u trećem približavanju (popravke visina I. točke u četvrtom približavanju i III. točke u trećem približavanju jednake su nuli).

Isto tako iza III. čvornu točku dobili bismo prethodnu vrijednost (popravke visina I. i II. čvorne točke u četvrtom približavanju jednake su nuli).

Dakle za sve točke dobili smo iste vrijednosti visina kao i u prethodnom približavanju, te prema tome možemo ih smatrati izjednačenim vrijednostima. Ove definitivne visine (121,814; 124,662 i 126,332) u tablici su podvučene.

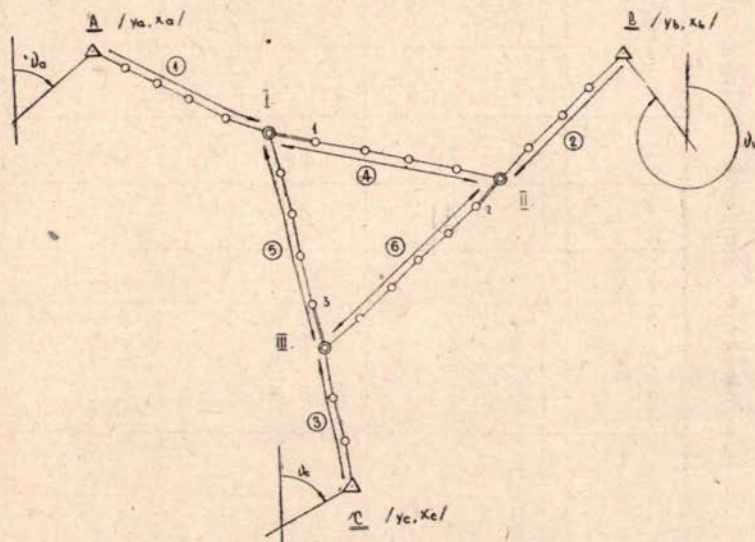
U 12. stupcu računamo popravke v . Za vlakove, koji se računaju u oba smjera, popravke v iste su apsolutne vrijednosti, ali suprotnog predznaka.

U 13. stupcu računamo produkte $p \cdot v$. Za kontrolu mora da bude $[p \cdot v] = 0$.

U 14. stupcu računamo produkte $p \cdot v^2$, zatim $[p \cdot v^2]$ i na kraju srednju pogrešku m .

Poligonske čvorne točke izjednačujemo na isti način kao i nivelmanske.

Za ilustraciju navodimo izjednačenje poligonske mreže sa tri čvorne točke I, II i III; ta je mreža prikazana na sl. 2.



Sl. 2.

U tablici br. 2. prikazano je izjednačenje smjernih kutova zajedničkih stranica I—1, II—2 i III—3 u čvornim točkama I, II i III.

U 1., 2., 3. i 4. stupcu upisujemo broj čvorne točke, broj vlaka, broj početne točke u vlaku, zadani početni smjerni kut (ν_a , ν_b i ν_c) i sumu lijevih kutova u

Poligonska mreža

Tablica br. 2.

Izjednačenje smjernih kutova stranica: I-1, II-2, III-3.

1	Br. dvorane ločke	2		Br. vliaka	3	Površina ilačka V	Suma kutova [Σ]	Br. kutova m	Težina $\rho \cdot \frac{m}{n}$	1. približ.			2. približ.			3. približ.			4. približ.			v	pv	pVV
		o	'							''	o	'	''	o	'	''	o	'	''	o	'			
I	1	52	257				1129	6	0,17	101	33,1	101	33,1	101	33,1	101	33,1	101	33,1	+ 0,2	+ 0,03	0,006		
	4						778	5	0,20		5,7		3,9		3,9		4,1		- 0,8	0,16	0,428			
	5						1043	5	0,20		1,7		2,7		2,7		2,7		+ 0,6	+ 0,42	0,072			
										0,52	101	33,5	101	33,5	101	33,5	101	33,5			- 0,01			
												+ 0,4		- 0,3				+ 0,1						
II	2	319	384				803	5	0,20	222	47,9	222	47,9	222	47,9	222	47,9	222	47,9	- 1,6	- 0,32	0,519		
	4						1021	5	0,20		5,7		5,4		5,4		5,5		+ 0,8	+ 0,16				
	6						955	6	0,17		4,5		5,5		5,5		5,5		+ 0,8	+ 0,14	0,142			
									0,57	222	46,1	222	46,3	222	46,3	222	46,3	222	46,3		- 0,02			
												- 1,8		+ 0,2				0,0						
III	3	62	168				645	4	0,25	347	32,2	347	32,2	347	32,2	347	32,2	347	32,2	+ 1,0	+ 0,25	0,250		
	5						786	5	0,20		4,0		3,7		3,7		3,8		- 0,6	- 0,12	1,080			
	6						1204	6	0,17		3,8		4,0		4,0		4,0		- 0,8	- 0,14	$\frac{1,080}{0,3}$			
									0,82	347	33,2	347	33,2	347	33,2	347	33,2	347	33,2		- 0,01	$\frac{1,080}{0,3}$ = 0,6'		
											+ 1,0		0,0				0,0							

vlak. Kod vlakova 4, 5 i 6, koji se računaju u oba smjera, sume lijevih kutova u jednom i drugom smjeru međusobno se dopunjuju do $n \cdot 360^\circ$, gdje je n broj kutova u vlaku.

U 5., 6. i 7. stupcu upisujemo broj kutova n u vlaku, pomoću kojih se smjerni kut zajedničke stranice računa, težine $p = \frac{1}{n}$ i kvocijenti $p' = \frac{p}{[p]}$.

U 8. stupcu određujemo smjerne kutove zajedničkih stranica u prvom približavanju.

Za njihove vrijednosti uzete su približne vrijednosti dobivene pomoću početnih smjernih kutova v_a , v_b i v_c i sume kutova u vlakovima 1, 2 i 3. (na pr. za I. točku $52^\circ 25,7' + 1129^\circ 07,4' - 6 \cdot 180^\circ = 101^\circ 39,1'$ i t. d.)

U 9., 10. i 11. stupcu određeni su smjerni kutovi u drugom, trećem i četvrtom približavanju. Računanje je izvršeno strojem na gore opisan način.

Za smjerne kutove u točkama II. i III. dobili smo u četvrtom približavanju iste vrijednosti, kao i u trećem približavanju. Prema tome unaprijed znamo, da ćemo u petom približavanju dobiti za smjerni kut u točki I. istu vrijednost kao i u četvrtom približavanju.

Dakle, definitivne vrijednosti smjernih kutova bit će: $101^\circ 33,3$; $222^\circ 46,3'$ i $347^\circ 33,2'$. Ove su vrijednosti podcrtane.

Ostali stupci isti su kao i u tablici br. 1.

U tablici br. 3. prikazano je izjednačenje ordinata čvornih točaka I, II i III.

U 1., 2., 3., 4., 5. i 6. stupcu upisujemo broj čvorne točke, broj vlaka, broj početne točke u vlaku, ordinate y_a , y_b i y_c trigonometrijskih točaka A, B i C, sumu ordinatnih razlika, dužinu vlaka u m i kategoriju terena.

U 7. i 8. stupcu određene su težine $p = \frac{1}{\Delta^2}$ (gdje je Δ dozvoljeno odstupanje prema prijedlogu Pravilnika za detaljnu izmjeru) i kvocijenti $p' = \frac{p}{[p]}$.

U 9. stupcu određene su ordinate čvornih točaka u prvom približavanju.

Za njihove vrijednosti uzete su približne ordinate dobivene po vlakovima 4, 5 i 6 od trigonometrijskih točaka A, B i C.

U 10., 11. i 12. stupcu određujemo ordinate u drugom, trećem i četvrtom približavanju. Računanje je izvršeno računskim strojem.

Za II. i III. točku dobivene su u četvrtom približavanju iste vrijednosti ordinata kao i u trećem približavanju. Prema tome ćemo u petom približavanju dobiti za ordinatu I. točke istu vrijednost kao i u četvrtom približavanju.

Dakle će definitivne ordinate biti: 88 479,31; 89 719,66 i 88 738,81.

Ostali stupci isti su kao i u tablici br. 1.

Srednju pogrešku m ordinata u vlaku dužine 1 km, a u 1. kategoriji terena računamo po formuli

$$m = \pm \Delta \sqrt{\frac{[p v v]}{n - 3}}$$

gdje je Δ dozvoljeno odstupanje za vlak dužine 1 km u 1. kategoriji terena.

Izjednačenje apsisa ni u čemu se ne razlikuje od izjednačenja ordinata, pa zato ovdje i nije navedeno.

Poligonska mreža

Tablica br. 3

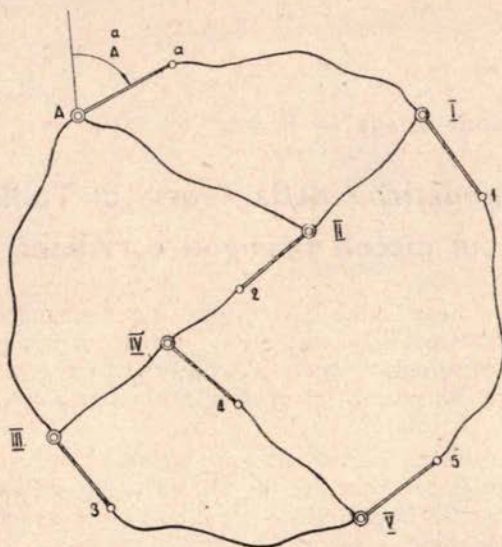
Izjednačenje ordinata čvornih točaka: I, II, III

Br. čvorne točke	Br. vlaka	Početna točka		Ordinatska razlika [Δy]	Duž vlaka S _m	Kategorija	Težina		1. približ		2. približ		3. približ		4. približ		v	pv	pvv
		p · $\frac{1}{S}$	p · $\frac{p}{[m]}$				y'	y''	y''	y'''	y'''	y'''	y'''	y'''					
1	2	Br.	y	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15				
I	1	A	87542,68	936,69	1042	I	7,29	0,39	88479,37	479,37	479,37	479,37	479,37	-0,44	0,026				
	4	II		x 8759,47	1266	I	5,43	0,29		8,92	9,15	9,13	9,13	+0,98	0,176				
	5	III		x 740,60	1204	I	5,95	0,32		9,52	9,41	9,41	9,41	-0,59	0,059				
							18,67	1,00	88479,37	479,29	479,32	479,31	479,31	-0,05					
										-0,08	+0,03	-0,01							
II	2	B	90397,20	x 322,25	942	I	8,48	0,44	89719,45	719,45	719,45	719,45	719,45	+1,72	0,364				
	4	I		1240,53	1266	I	5,43	0,29		9,82	9,85	9,84	9,84	-0,98					
	6	III		980,99	1305	I	5,15	0,27		9,91	9,80	9,80	9,80	-0,72	0,101				
							18,76	1,00	89719,45	719,68	719,66	719,66	719,66	+0,02					
										+0,23	-0,02	0,00							
III	3	C	88877,70	x 861,22	728	I	11,90	0,52	88738,92	738,92	738,92	738,92	738,92	-1,31	0,034				
	5	I		259,40	1204	I	5,95	0,26		8,69	8,72	8,71	8,71	+0,59	0,757				
	6	II		x 019,01	1305	I	5,15	0,22		8,69	8,67	8,67	8,67	+0,72					
							23,00	1,00	88738,92	738,81	738,81	738,81	738,81	0,00					
										-0,11	0,00	0,00							

$m = \pm 0,35 \sqrt{\frac{287}{6-3}}$
 $= \pm 0,48 \text{ m‰}$

U slučaju izjednačenja slobodne nivelmanske ili poligonske mreže, na pr. mreže prikazane na slici 3., postupamo ovako.

Jednu po volji odabranu čvornu točku, na pr. točku A smatramo zadanom, t. j. uzmemo proizvoljnu visinu H_a ili početni smjerni kut ν_A^a i koordinate y_a x_a .



Sl. 3.

Odredimo za ostale čvorne točke od I—V približne vrijednosti traženih veličina. Približne vrijednosti određujemo ili direktno od točke A (na pr. za I, II i III), ili preko drugih čvornih točaka (na pr. za IV i V). Ove približne vrijednosti uzimamo za vrijednosti traženih veličina u prvom približavanju.

Ostali postupak je isti kao i u slučaju zavisne mreže.

LITERATURA:

Ermolov i dr.: Geodezija I i II, Moskva 1954.

Filatov: Izjednačenje nivelmanske mreže metodom postupnih približavanja, Geodetski list br. 5—8, Zagreb 1954.

S pravočnik po markšejderskomu delu, Moskva 1955.

Svečnikov: Račun izravnjanja, Beograd 1951.