Prof. Dott. Giovanni Boaga — Roma

Applicazioni geodetiche della teoria di Tullio Levi Civita sui piccoli triangoli curvilinei

Una ventina di anni fa Tullio Levi-Civita in una elegante Memoria inserita nei »Compositio Mathematica[1]«, dal titolo »Terne di congruenze sopra una superficie ed estensione della trigonometria«, espose i principii fondamentali di una trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei tracciati su una superficie qualunque.

Questa Memoria venne particolarmente tenuta in considerazione in Italia specialmente dai professori Tonolo e Morelli ed anche da chi vi parla, i quali — sulla via indicata dal Levi-Civita — hanno voluto estendere la teoria sui triangoli in campi più vasti, estesi cioè ad ordini superiori, o estenderla a linee qualunque — e quindi non geodetiche — dell'ellissoide rotazionale considerando i fondamentali problemi della Geodesia, ed ancora indicare le risoluzioni di questi problemi per li nee qualunque tracciate su superficie pure qualunque.

Sono stati così compiuti i seguenti lavori, inseriti principalmente negli Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, dello Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, e nella Rivista L'Universo dello I. G. M.:

dal Prof. Tonolo:

— Il Teorema dei seni per i triangoli tracciati sopra una superficie[2];
— Studi di trigonometria dei triangoli tracciati sopra una superficie[3];
— Il teorema dei seni per i triangoli infinitesimi tracciati sopra una supperficie[4];
— Estensione di un teorema trigonometrico di Legendre[5];
— Sui polinomi di Frenet[6];
— Studi di trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei sopra una superficie[7];
— Estensione di un teorema trigonometrico di Gauss sui triangoli geodetici[8];
— Sviluppi di Puiseux-Weingarten generalizzati[9];

---

[1] Vol. I, 1934. In seguito lo stesso Autore riprese lo stresso argomento sviluppandolo in una Nota dal titolo: »*La trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei sopra una superficie*«, inserita negli Atti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, Vol. XII, 1938.

[2] Rend. Acc. Naz. Lincei Vol. XIX, 1934.

[3] Atti Istituto Veneto, Tomo XCIII, 1934.

[4] Compositio Mathematica, Vol. II, 1935.

[5] Rend. Acc. Naz. Lincei Vol. XXVIII, 1938.

[6] Atti Istituto Veneto, Tomo XCVIII, 1938.

[7] Rend. Seminario Matem. e Fisico di Milano, Vol. XIII, 1939.

[8] Rend. Acc. Naz. Lincei, Vol. XXIX 1939.

[9] Idem, Vol. XXIX, 1939.

Prof. Giovanni Boaga — Rim

Primjena teorije Tulia Levi Civita o malim sfernim trokutima u geodeziji*

Con benevolenza e concessione del autore ha tradotto il ing. Veljko Petković. Dozvolom autora sa talijanskog preveo ing Veljko Petković (Zavod za Višu geodeziju Zagreb.)

Pred dvadesetak godina Tullio Levi Civita u jednoj lijepoj studiji objelodanjenoj u »Compositio Mattematica (1)«, pod naslovom »Terne di congruenze sopra una superficie ed estensione della trigonometria«, iznio je osnovne principe trigonometrije malih sfernih trokuta, označenih na bilo koju površinu.

Ovo djelo su naročito cijenili u Italiji profesori Tonolo i Morelli kao i pisac ovog članka. Oni su htjeli — slijedeći put Levi Civita — proširiti ovu teoriju na trokute u širim područjima, to jest protegnuti je na više redove ili na bilo koje linije — rotacionog elipsoida — stoga ne samo geodetske —, uzevši u obzir osnovne probleme geodezije, a ujedno dati rješenja ovih problema za bilo koje linije povučene na bilo koju pvršinu.

Tako su objavljeni slijedeći radovi, obuhvaćeni prvenstveno u djelima Nacionalne Akademije Linceja, Venecijanskog instituta nauka, književnosti i umjetnosti, i u časopisu L' Universo — Vojno geografskog instituta.

Od Prof. Tonola:

Sinusov poučak za trokuteve na nekoj površini (2)

Trigonometrijska studija trokuteva povučenih na jednoj površini (3)

Sinusov poučak za beskrajno male trokuteve povučene na jednoj površini (4)

Proširenje Legendrovog trigonometrijskog teorema (5)

O Trentovim polinomima (6.

Trigonometrijska studija malih sfernih trokuteva na nekoj površini (7)

Proširenje jednog Gaussovog trigonometrijskog teorema o geodetskim trokutima (8)

Poopćeni razvoji Puiseux-Weingarten (9)

---

* Predavanje održano na Geodetskom Odjelu AGG fakulteta u Zagrebu 28.V.1957.

— Contributo alla trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei tracciati sopra una superficie[10];

— Trasporto delle coordnate geografiche e dell'azimut lungo un arco di linea qualunque di un ellissoide di rotazione[11];

dal Prof. Morelli

— Formule fondamentali per l'estensione alla quarta approssimazione della trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei sopra una superficie qualunque[12];

— Estensione alla quarta aprossimazione della trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei sopra una superficie qualunque[13];

— Formule introduttorie per l'estensione degli sviluppi di PuiseuxWeingarten generalizzati[14];

— Estensione degli sviluppi di Puiseux-Weingarten generalizzati[15];

— Il Teorema di Gauss generalizzato alla quarta approssimazione[16];

dal Prof. Boaga:

— Sul trasporto delle coordinate curvilinee lungo un arco di geodetica su una superficie qualunque con applicazioni al problema geodetico del trasporto delle coordinate geografice[17];

— Il trasporto delle coordinate curvilinee lungo un arco di geodetica in alcuni casi particolari interessanti la geodesia[18];

— Su alcuni recenti studi geometrici interessanti la geodesia[19];

Secondo la teoria sviluppata da Levi-Civita, a ciascun triangolo curvilineo, tracciato su una superficie qualunque, viene associato un triangolo geodetico, cioè formato da archi di linea geodetiche appartenenti alla superficie considerata e passanti naturalmente per i vertici del triangolo curvilineo.

Il Levi-Civita ha stabilito opportune relazioni analitiche che legano le lunghezze dei lati e le ampiezze degli angoli dei due triangoli, curvilineo e geodetico; tali relazioni contengono oltre a tali elementi anche le curvature geodetiche γ dei lati curvilinei con le loro derivate intrinseche

$$\dot\gamma,\ \ddot\gamma,\ \dddot\gamma, \dots$$

e la curvatura totale K della superficie con la sua derivate prima in trinseca $\dot K$.

I parametri $\gamma, \dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma, \dots$ vanno calcolati secondo il Levi-Civita nel punto M di mezzo dell'arco curvilineo che si considera.

Adoperando le seguenti notazioni:

Triangolo	*lunghezze lati*	*ampiezze angoli*
curvilineo	$l_h \ l_{h+1} \ l_{h+2}$	$\psi_h \ \psi_{h+1} \ \psi_{h+2}$
geodetico	$a_h \ a_{h+1} \ a_{h+2}$	$\alpha_h \ \alpha_{h+1} \ \alpha_{h+2}$

[10] Atti, II Congresso della U. M. I., 1940.
[11] Rend. Acc. Naz. Lincei. Vol. XXIX, 1939.
[12] Atti R. Acc. d'Italia, Vol. XIII, 1942.
[13] Idem, Vol. III 1942.
[14] Idem, Vol. IV, 1943.
[15] Idem, Vol. IV, 1943.
[16] Rivista L'Universo, 1942.
[17] Idem, 1942.
[18] Rend. Ist. Lombardo di Scienze e Lettere, Vol. LXXV, 1942.
[19] Rivista L'Universo. 1940.

Prilog trigonometriji malih sfernih trokuteva povučenih na jednu površinu (10)

Prenos geografskih koordinata i azimuta duž luka bilo koje linije rotacionog elipsoida (11)

Od Prof. Morelli-a:

Osnovne trigonometrijske formule razvijene do četvrte aproksimacije za male fserne trokuteve na bilo kojoj površini (12)

Razvoj do četvrte aproksimacije u trigonometriji malih sfernih trokuteva na bilo kojoj površini (13)

Uvodne formule za proširenje općeg razvoja Puiseux-Weingarten (14)

Proširenje općih razvoja Puiseux-Weingarten (15)

Gaussov teorem primjenjen na četvrtu aproksimaciju (16)

Od Prof. Boage:

O prenosu sfernih koordinata duž luka geodetske linije na bilo koju površinu primjenjen na geodetski problem transformacije geografskih koordinata (17).

Prenos sfernih koordinata duž jednog luka geodetske linije za neke slučajeve naročito interesantne za geodeziju (18)

O nekim nedavno objevljenim geometrijskim studijama važnim za geodeziju (19)

Prema teoriji Levi-Civita, svaki sferni trokut, koji je povučen na bilo kojoj površini, može se nadomjestiti geodetskim trokutom, čije su stranice lukovi geodetskih linija, a koje pripadaju razmatranoj površini, i prolaze vrhovima sfernog trokuta.

Levi-Civita je odredio prikladne analitičke izraze koji vezuju duljini strana i veličinu kuteva dvaju trokuta, sfernog i geodetskog: ti izrazi sadrže osim tih elemenata također i zakrivljenosti geodetskih linija γ sfernih strana sa njihovim derivacijama.

$$\dot{\gamma},\ \ddot{\gamma},\ \dddot{\gamma},$$

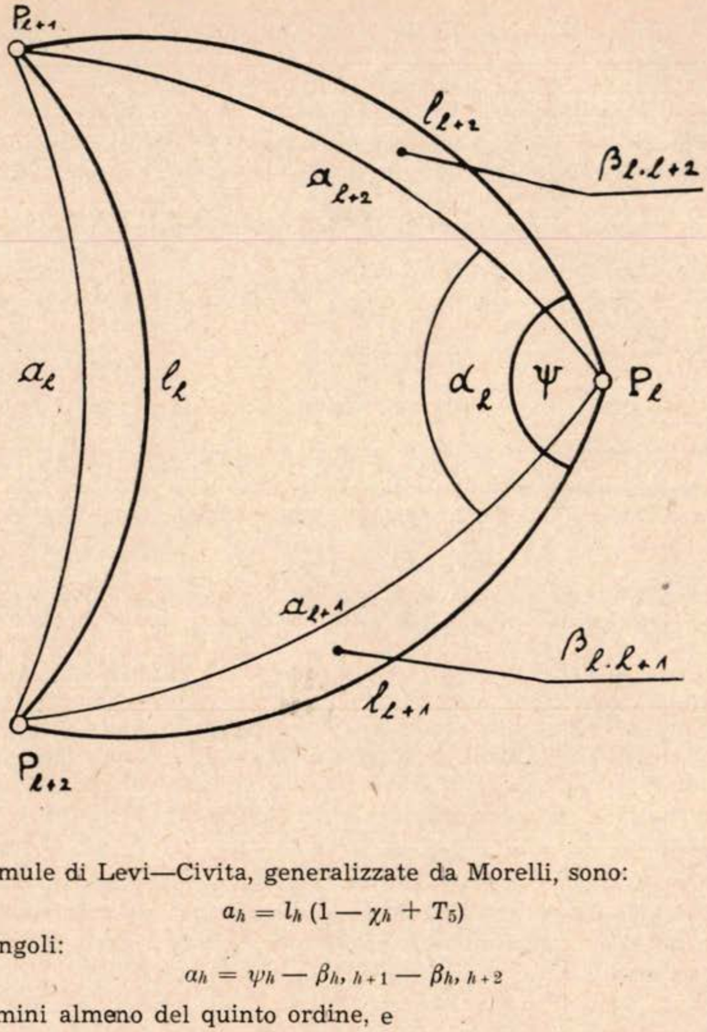
i totalnu zakrivljenost K površine sa svojom prvom derivacijom $\dot{K}$.

Parametri γ, $\dot{\gamma}$, $\ddot{\gamma}$, $\dddot{\gamma}$ računaju se prema Levi-Civita u točki M sredine sfernog luka kojega promatramo.

Služeći se slijedećim oznakama:

Trokut	*duljina strana*	*veličina kuteva*
sferni	$l_h\ l_{h+1}\ l_{h+2}$	$\psi_h\ \psi_{h+1}\ \psi_{h+2}$
geodetski	$a_h\ a_{h+1}\ a_{h+2}$	$\alpha_h\ \alpha_{h+1}\ \alpha_{h+2}$

con $P_h\ P_{h+1}\ P_{h+2}$, vertici in comune di due triangoli e opposti ai lati di indici h, $h+1$, $h+2$ (vedi figura):



Le formule di Levi—Civita, generalizzate da Morelli, sono:

$$a_h = l_h\,(1 - \chi_h + T_5) \qquad [1]$$

e per gli angoli:

$$\alpha_h = \psi_h - \beta_{h,\,h+1} - \beta_{h,\,h+2}$$

con T_5 termini almeno del quinto ordine, e

$$\chi_h = \frac{1}{24}\gamma_h^2\, l_h^2 - \frac{1}{10}\left(\frac{1}{192}\,\gamma_h^2 + \frac{1}{8}\,K_h^2\,\gamma_h^2 - \frac{1}{8}\,\gamma_h\,\ddot{\gamma}_h - \frac{1}{6}\,\dot{\gamma}_h^2\right) {}^{4}_{h}l \qquad [2]$$

$$\beta_{h,\,h+1} = \frac{1}{2}\,\gamma_{h+2}\, l_{h+2} - \frac{1}{12}\,\dot{\gamma}_{h-2}\, l^2_{h+2} + \frac{1}{48}\,(\ddot{\gamma}_{h+2} + 2\,K_{h+2}\,\gamma_{h+2})\, l^3_{h+2} -$$

$$\frac{1}{240}\left(\frac{1}{2}\,\dddot{\gamma}_{h+2} + \frac{1}{3}\,\gamma^2_{h+2}\,\dot{\gamma}_{h+2} + \frac{1}{3}\,K_{h+2}\,\dot{\gamma}_{h+2} + 9\,\dot{K}_{h+2}\,\gamma_{h+2}\right) l^4_{h+2} + T_5 \qquad [3]$$

ed analoga ponendo $h+2$ al posto di $h+1$, cambiando però di segno al secondo ed all'ultimo addendo del secondo membro. Tale cambiamento di segno viene

P_h, P_{h+1} P_{h+2} su zajednički vrhovi dvaju trokuta nasuprot stranama sa oznakama h, $h + 1$, $h + 2$ (vidi sliku):

Formule Levi-Civita kojima je Prof. Morelli dao opću formu jesu:

1)

a za kuteve

T_5 su izrazi barem 5 reda i

2)

3)

i stavljajući analogno $h + 2$ na mjesto $h + 1$, mijenjat ćemo tako oznaku drugom i zadnjem adendu drugog člana. Takova promjena znakova opravdana je giustificato dai segni che assumono le derivate successive delle curvature avuto riguardo del senso positivo della circolazione sul perimetro del triangolo.

Ponendo

$$\delta_h = \beta_{h,\,h+1} + \beta_{h,\,h+2} \tag{4}$$

si ricava

$$\alpha_h = \Psi_h - \delta_h \tag{5}$$

Le formule [1] e [5] con le posizioni [2], [3] e [4] e quelle che si ottengono da queste circolando opportunamente gli indici sono molto importanti in quanto *permettono il passaggio dagli elementi del trianglo curvilineo a quelli omologhi del triangolo geodetico.*

E' interessante il fatto che la curvatura K della superficie non interviene nelle formule quando si considerano soltanto i termini di primo e secondo ordine; essa interviene con i termini di terzo ordine e la sua derivata intrinseca $\dot{K}$ appare nei termini del quarto ordine. Nei calcoli parziali che abbiamo eseguito — e che per brevità non si riportano — sia K, sia $\dot{K}$ risultano messe in evidenza anche nei termini di ordine inferiore, però esse si elidono operando la riduzione dei termini simili. Interpretando geodeticamente questo fatto possiamo dire che nel caso che si considerino soltanto i termini di primo e di secondo ordine la superficie — nell'intorno in cui è tracciato il piccolo triangolo curvilineo che si considera — si confonde col piano ad essa tangente (campo topografico); nel caso che si considerino anche gli altri termini — di terzo e quarto ordine — l'intorno si confonde con una sfera (campo geodetico).

E' ovvio che in tutte queste ricerche è necessaria la conoscenza della legge analitica o geometrica che governa l'andamento dei lati curvilinei l_h sulla superficie.

Nel caso particolarissimo in cui per superficie, dove si sviluppano i triangoli curvilinei, si considera il piano, gli archi di geodetica colleganti i vertici $P_h\ P_{h+1}\ P_{h+2}$ del triangolo curvilineo diventano segmenti di retta; la curvatura K risulta di valore nullo e così la sua derivata *intrinseca*. Con questa osservazione le formule in precedenza indicate forniscono le *relazioni generali intercedenti fra gli elementi del triangolo curvilineo e quelli del triangolo delle corde rettilinee, aventi in comune i vertici.*

Le formule che ne risultano possono venire ulteriormente ridotte; ciò si realizza introducendo il valore della curvatura γ anzichè nel punto di mezzo M come indicatô da Levi civiti nel punto C che divide l'arco in due parti proporzionali ai numeri 1 e 2.

Trasportando — con lo sviluppo di Mac Laurin — la curvatura γ e le sue derivate $\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dddot{\gamma}, \ldots$ da M, come è stato assunto in precedenza, a C si ottengono le:

$$\gamma_c = \gamma - \frac{1}{6}\,\dot{\gamma}\, l + \frac{1}{72}\,\ddot{\gamma}\, l^2 - \frac{1}{1296}\,\dddot{\gamma}\, l^3 + \ldots$$

$$\dot{\gamma}_c = \dot{\gamma} - \frac{1}{6}\,\ddot{\gamma}\, l + \frac{1}{72}\,\dddot{\gamma}\, l^2 - \ldots$$

znakovima, koje dobijaju sukcesivne derivacije krivina, s obzirom na pozitivni smisao kretanja perimetra trokuta.

Stavljajući

4)

dobija se

5)

Formule 1) i 5) sa 2), 3) i 4) i one koje se dobiju iz ovih mijenjajući postepeno indekse, *važne su ukoliko dozvoljavaju prelaz sa elemenata sfernog trokuta na one homologne geodetskog trokuta.*

Zanimljiva je činjenica da krivina K površine ne ulazi u formule kada se uzimaju samo članovi prvog i drugog reda. Ona dolazi tek sa članovima trećeg reda a njezina derivacija K dolazi u izrazima četvrtog reda. U pojedinim računima koje smo izveli — a koje radi ograničenog vremena ne izvodimo ponovno — bilo K, ili K pojavljuje se također i u izrazima nižih redova, ali oni se ukidaju redukcijom sličnih izraza. Ako promatramo ovu činjenicu sa stanovišta geodezije možemo reći, da u slučaju kada se uzimaju u obzir samo članovi prvog i drugog reda može se površina — u neposrednoj blizini promatranog malog sfernog trokuta zamjeniti sa tangentonom ravninom (ravnina snimanja): u slučaju kada se uzimaju i drugi članovi — trećeg i četvrtog reda — okolna površina se može zamjeniti sfernom (geodetskom ravninom).

Jasno je prema tome da je u svim ovim raspravama neophodno potrebno poznavanje zakona analitike ili geometrije koja određuje tek krivulje l_h na površini.

U izuzetnom slučaju u kojem se za površinu, gdje se razvijaju sferni trokuti, uzima ravnina, lukovi geodetske linije koji vezuju vrhove P_h, P_{h+1}, P_{h+2} sfernog trokuta, postaju isječci pravaca: krivina K dobija veličinu nula, a tako i njezina derivacija. Uz ovu primjedbu prije spomenute formule daju *opće odnose među elementima sfernog i ravnog trokuta, koji imaju zajedničke vrhove.*

Tako dobijene formule možemo zatim reducirati. To se postiže prije nego uvedemo vrijednosti zakrivljenosti γ u srednju točku M kako je pokazao Levi-Civita u točki C, koja dijeli luk u dva dijela proporcionalna brojevima 1 i 2.

Predstavljajući — pomoću Mac Laurin-ovog reda — zakrivljenost γ i njegove derivacije $\dot{\gamma}$, $\ddot{\gamma}$, $\dddot{\gamma}\ldots$ za M kako je prije objašnjeno, u C dobijamo

$$\gamma_c = \dddot{\gamma} - \frac{1}{6} \dddot{\gamma} l + \dots$$

$$\dddot{\gamma}_c = \dddot{\gamma} - \dots$$

$$\dots\dots$$

Con queste, eliminando dalla [3] le γ, $\dot{\gamma}$, $\ddot{\gamma}$, $\dddot{\gamma}, \dots$ nel caso particolare ora considerato ($K = O$, $\dot{K} = O$) si giunge alla:

$$\beta = \frac{1}{2} \gamma_c l^3 + \frac{1}{72} \ddot{\gamma}_c l^3 - \frac{1}{1620} \dddot{\gamma}_c l^4 - \frac{1}{720} \gamma_c^2 \dot{\gamma}_c l^4 + T_5' \qquad [6]$$

dove per brevità di scrittura non si sono indicati gli indici h, $h + 1$, $h + 2$ a β, γ_c ed l.

Si osservi che la [6] è ora priva del termine in l^2.

Se i lati curvilinei, sempre sul piano, sono archi di cerchi, ossia archi di curvatura costante, valgono sempre le [1] e [5] però con i seguenti termini correttivi:

$$\delta_h = \frac{1}{2} (\gamma_{h+1} l_{h+1} + \gamma_{h+2} l_{h+2})$$

$$\chi_h = \frac{1}{24} \gamma_h^2 l_h^3 (1 - \frac{1}{80} \gamma_h^3 l_h^2)$$

E' questo il caso di triangoli curvilinei piani con lati assimilabili ad archi di circonferenze di raggi diversi o eguali.

Ciò premesso e considerato ci proponiamo una applicazione geodetica e precisamente immaginiamo che la legge atta a governare l'andamento degli archi curvilinei sui piano sia quella della rappresentazione conforme — la più generale — dell'ellissoide rotazionale terrestre sul piano. E' ovvio che così operando ad ogni triangolo geodetico ellissoidico si viene ad associare un triangolo piano; pertanto la risoluzione del triangolo geodetico ellissoidico si potrà ottenere tramite quello curvilineo, per mezzo del triangolo piano trilatero ad esso associato con giudiziosa applicazione delle formule ricordate.

Indicando con U la latitudine isoterma (o crescente) e con λ la longitudine geografica dei punti P delli superficie obbiettiva (ellissoide terrestre), il quadrato dell'elemento lineare dg di tale superficie risulta — come è noto — della forma isoterma:

$$dg^2 = r^2 (dU^2 + d\lambda^2)$$

con r raggio del parallelo passante per il punto considerato U come è noto è definito dalla:

$$U = \int_0^\varphi \frac{\varrho}{r} \cdot d\varphi$$

con φ latitudine geografica di P e ϱ raggio di curvatura della sezione meridiana pure in P.

Sa ovim eliminirajući 3) $\gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dddot{\gamma} \ldots$ za poseban slučaj kada imamo ($K = O$, $K = O$ dolazi se do

6)

gdje radi kratkoće pisanja nisu označeni indeksi h, $h + 1$, $h + 2$ kod β, γ_c, i φ.

Vidi se da je 6) sada bez izraza u l^2.

Ako su zakrivljene strane, uvjek u ravnini, lukovi kruga ili lukovi konstantne zakrivljenosti, vrijede uvjek 1) i 5) samo uz slijedeće korekcione članove.

To je slučaj ravnih sfernih trokuta sa stranicama, koje mogu primiti oblik lukova kružnice različitih ili jednakih polumjera.

Nakon što je ovo pretpostavljeno i razmatrano ističemo geodetsku primjenu i jasno zamišljamo, da je zakon konformne projekcije zemaljskog rotacionog elipsoida na ravnini — najopćenitije — onaj, koji je u stanju da obrađuje tok sfernih lukova u ravnini. Prirodno je da postupajući tako na svakom elipsoidnom trokutu dolazi se do prilagođavanja sfernog trokuta ravnom. Prema tome će se rješenje sferoidnog trokuta moći obaviti putem ovog sfernog, posredstvom ravnog trokuta, koji se njemu prilagođuje uz primjenu spomenutih formula.

Ako označimo sa U širinu a sa λ geografsku duljinu točaka P promatrane površine (terestričkog elipsoida), kvadrat linearnog elementa dg takove površine — kako je poznato — dobija se iz jednačbe:

gdje je polumjer paralele koja prolazi kroz točku U, kako je poznato definiran iz:

φ = geografska širina točke P i ϱ polumjer zakrivljenosti presjeka meridijana također u točki P.

Con riferimento ad un sistema cartesiano ortogonale, il quadrato dell'elemento lineare $d\,l$ del piano risulta della forma:

$$d\,l^2 = d\,x^2 + d\,y^2$$

Le equazioni di corrispondenza fra le coordinate piane $x \cdot y$ dei punti P' del paino e quelle ellissoidiche $U \cdot \lambda$ dei punti omologhi P dell'ellissoide, sono in generale rappresentate dalle funzioni:

$$x = x\,(U, y) \quad y = y\,(U, \lambda) \qquad [7]$$

che supponiamo continue, assieme a tutte le loro derivate prime e succesive che si considereranno.

E' pure noto, che la rappresentazione piana conforme dell'ellissoide sul piano, porta alla seguente relazione fra i parametri $x \cdot y$ che determinano i punti del piano e quelle $U \cdot \lambda$ dei punti omologhi dell'ellissoide:

$$x \pm i\,y = f\,(U + i\,\lambda) \qquad [8]$$

con i unità immaginaria.

Ogni arco g di geodetica ellissoidica trova sul piano un arco l di curva corrispondente (omologo). Tale arco chiameremo *archo di curva tra trasformata della geodetica per rappresentazione confome*, o più semplicemente *trasformata*.

Il triangolo geodetico ellissoidico ed il corrispondente triangolo delle trasformate (ottenuto per rappresentazione conforme), hanno eguali gli angoli omologhi, ed il rapporto $\frac{d\,l}{d\,g}$ fra gli elementi lineari infinitesimi omologhi rispettivamente dei lati del triangolo curvilineo e del triangolo geodetico risulta indipendente dalla direzione (azimut) degli elementi infinitesimi $d\,g$. Indicando con m tale raporto (modulo di deformazione lineare) si ha simbolicamente:

$$m = \frac{d\,l}{d\,g} \qquad [9]$$

Si faccia presente ora che le coordinate curvilinee ellissoidiche

$$U = costante \quad \lambda = costante$$

determinano sul piano due congruenze fra loro ortogonali; esse rappresentano rispettivamente le trasformate piane dei paralleli e dei meridiani.

L'angolo ε che la tangente in P' alla curva $\lambda = costante$ forma con la parallela dell'asse delle x chiamasi *convergenza del meridiano in* P'. Essa risulta anche eguale all'angolo che la tangente alla $U = cost.$ passante per lo stesso punto P' forma con a parallela dell'asse delle y, esso eppertanto si può valutare mediante la

$$\text{tang}\ \varepsilon = \frac{d\,x}{d\,y} = \frac{d\,x}{d\,\lambda} : \frac{d\,y}{d\,\lambda}$$

tenendo conto delle [7].

Determinata la tg ε, l'ampiezza della convergenza espressa in secondi potrà essere valutata con la:

$$\varepsilon'' = (\text{tg}\,\varepsilon - \frac{1}{3}\ \text{tg}^3\,\varepsilon + \frac{1}{5}\ \text{tg}^5\,\varepsilon - \ldots)\ \frac{1}{\text{arc}\,1''}$$

S obzirom na jedan pravokutni koordinatni sistem, kvadrat linearnog elementa dl ravnine dobija se iz:

odgovarajuće jednačbe između koordinata x, y točaka P' ravnine, i elipsoidnih koordinata U, λ homolognih točaka P elipsoida predstavljene su funkcijama:

7)

za koje možemo pretpostaviti da su iste za sve njihove derivacije kako prve tako i one slijedeće:

Poznato je, da ravna konformna projekcija elipsoida na ravninu ima slijedeći odnos između parametra x, y, koji određuju točke ravnine, i onih U, λ homolognih točaka elipsoida.

8)

gdje je i imaginarna vrijednost.

Svakom luku g geodetske linije na elipsoidu odgovara u ravnini luk l odgovarajuće zakrivljenosti (homologno). Takav luk ćemo zvati *luk preslikane krivine geodetske linije za konformnu projekciju* ili jednstavno *preslikani luk* (slika u projekciji).

Sferoidni trokut i njemu odgovarajući trokut (komformno preslikan), koji imaju iste homologne kuteve i odnos $\frac{dl}{dp}$ među malim linearnim elementima homolognim s obzirom na strane sfernog i geodetskog trokuta, je neovisan od nagiba (azimuta) veoma malih elemenata dg. Ako označimo sa m takav odnos (modul linearne deformacije) imamo simbolički:

9)

Sada podvlačimo da elipsoidne koordinate

$$U = \text{konstantno}; \quad \lambda = \text{konstantno}$$

određuju na ravnini dvije sukladnosti među njihovim okomicama. One predstavljaju ravne transformacije paralele i meridijane.

Kut ε koga čini tangenta u P' na krivulju $\lambda =$ konstanta sa paralelom osi x zove se *konvergencija meridijana u* P'. Ona je jednaka kutu kojega tangenta na $U =$ konstanta čini, prolazeći kroz istu točku P; sa paralelom osovine Y i možemo je izraziti:

imajući u vidu 7).

Pošto smo odredili izraz tg ε, veličinu konvergencije izraženu u sekundama možemo dobiti iz:

mentre il modulo m, per quanto detto, può essere calcolato considerando un elemento lineare lunglo la curva $U =$ cost. Si ottiene con ciò, come facilmente si verifica:

$$m = \frac{1}{r} \cdot \frac{d\,y}{d\,\lambda} \cdot \cdot \sec \varepsilon$$

Qualunque sia il particolare tipo di rappresentazione conforme che viene adottato nel campo cartografico, si può sempre porre:

$$y = \lambda'' \text{ arc } 1'' \cdot N \cos \varphi + \ldots$$

$$\varepsilon'' = \lambda'' \text{ sen } \varphi + \ldots$$

con N gran normale ellissoidica alla latitudine φ, e poichè

$$\sec \varepsilon = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} + \ldots$$

si trae per la precedente:

$$m = 1 + \frac{y^2}{2\,N^2} + \ldots$$

Introducendo questo valore nella [9] ed integrando, si può assumere per m_h, valevole per elementi finiti la:

$$m_h = \frac{l_h}{g_h} = 1 + \frac{y^2_{h+1} + y_{h+1}\, y_{h+2} + y^2_{h+2}}{6 \cdot N_{m2}} \qquad [10]$$

con N_m gran normale computata alla latitudine media $\frac{1}{2}$ $(\varphi_{h+1} + \varphi_{h+2})$.

Tenendo conto della [10] della [1] e simili per $h = h + 1$ e $h = h + 2$, rimane provato che la risoluzione del triangolo geodetico ellissoidico si può far dipendere da quella del triangolo delle corde delle trasformate, per mezzo di semplici operazioni.

La curvatura γ dell'arco della trasformata è data dalla formula di SCHOLZ

$$\gamma = - \frac{y \cos \alpha}{N^2} \qquad [11]$$

dove α indica l'angolo di direzione della corda $P'_{h+1}\, P'_{h+2}$ definito da una delle tre seguenti relazioni:

$$\text{tang } \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad a_h = \frac{\Delta y}{\text{sen } \alpha} = \frac{\Delta x}{\cos \alpha} \qquad [12]$$

con

$$\Delta y = y_{h+2} - y_{h+1} \quad \Delta x = x_{h+2} - x_{h+1}$$

La χ_h definita dalle [2], che entra nella [1] risulta almeno del secondo ordine, perciò tenendo conto della [11] si ricava:

$$|\chi_h| \leq \frac{1}{24} \cdot \frac{y^2}{N_m^4} \cdot a^2$$

Imponendo la condizione, generalmente ammessa in Geodesia

$$|\chi_h| \leq 1 \cdot 10^{-6}$$

međutim modul m kako je rečeno možemo računati uzevši u obzir jedan linearni elemenat duž krivulje $U =$ konstantno. Dobija se, kako se lako vidi iz:

Kakav god bio način konformne projekcije koji se uzima u kartografiji može se uvjek staviti

sa N je označena velika eliopseidna normala na širinu φ budući da dobija se za predhodno

Ako uvrstimo ovu vrijednost u 9) i integriramo, može se dobiti za m_h, koji vrijedi za konačne elemente:

10)

gdje je normala preračunata za srednju širinu $\frac{1}{2}$ $(\varphi_{h+1} + \varphi_{h+2})$

Imajući u vidu 10) i 1) i slične za $h = h + 1$ i $h + 2$, vidljivo je da rješenje sferoidnog trokuta možemo učiniti zavisnim o preslikanom trokutu služeći se običnim operacijama.

Zakrivljenost γ luka u projekciji data je formulom SCHOLZ

11)

gdje α označava smjerni kut tetive $P'_{h+1}\ P'_{h+2}$ definiran po jednom od tri slijedeća izraza:

12)

sa

χ_h definirana sa 2) koja ulazi u 1) rezultira barem iz veličina drugog reda, pa imajući u vidu 11) dobija se:

Koristeći uvjet, koji je opće poznat u geodeziji per un lato a di 100 km, risulta che il punto di mezzo M del lato $P'_{h+1}\ P'_{h+2}$ non deve risultare dall'asse delle x ad una distanza y maggiore di 2.000 Km, limite questo ampiamente contenuto nelle ordinarie rappresentazioni conformi in uso nelle cartografie dei vari Stati.

Con questa osservazione la [1] formisce la:

$$l_h = a_h \qquad [13]$$

e quindi: *ai fini geodetici è possibile sostituire alle lunghezze dei lati curvilinei delle trasformate le lunghezze delle corrispondenti corde rettilinee.*

Un teorema simile si ha in geodesia per le lunghezze di archi di sezioni normali ed archi di geodetica passanti per gli stessi estremi.

Tenendo conto della terza delle [12], la [11] fornisce la:

$$\gamma_c = - \frac{y_c\,(x_{h+1} - x_h)}{N_c^2} \cdot \frac{1}{a_{h+2}}$$

con

$$y_c = \frac{2\,y_h + y_{h+1}}{3}$$

Tenendo conto di tutti questi risultati per la riduzione angolare β, trascurando i termini in γ^2 e di ordine superiore, si trae dapprima:

$$\beta_{h\,\cdot\,h+1} = \frac{1}{2}\,\gamma_c \cdot a_{h+2}$$

indi

$$\beta_{h\,\cdot\,h+1} = \frac{(x_h - x_{h+1})\ (2\,y_h + y_{h+1})}{6\,N_c^2\ \text{arc}\ 1''} \qquad [14]$$

Nell'ordine di approssimazione seguito è lecito porre $\varrho \cdot N$ al posto di N_c^2 con ϱ ed N calcolati per una latitudine mediana corrispondente ad un punto qualunque del campo in cui è compreso il triangolo. Posto

$$\frac{1}{6\,\varrho_m\,N_m\ \text{arc}\ 1''} = C_\beta$$

si trae:

$$\beta_{h,\,h+1} = (x_h - x_{h+1})\,(2\,y_h + y_{h+1}) \cdot C_\beta$$

dalla quale si può osservare che scambiando fra di loro gli indici h, $h+1$ della riduzione β'', questa cambia di segno e di valore. β'' risulta nullo nei seguenti casi:

$$\begin{cases} x_h = x_{h+1} \\ 2\,y_h = -\,y_{h+1} \end{cases}$$

Il contributo che è stato trascurato per la determinazione di β (secondo addendo) risulta dell'importo:

$$\frac{(x_{h+1} - x_h)^3\ (y_{h+1} + y_h)\ (2\,y_h + y_{h+1})^2}{6480\,N_c^6 \cdot \text{arc}\ 1''}$$

del tutto trascurabile ai fini geodetici.

za jednu stranu a od 100 km dobijamo da točka M u polovini strane $P'_{h+1} P'_{h+2}$ ne smije prolaziti od osi x na veću udaljenost od 2000 km, granica određena za primjenu komfornih projekcija u kartografijama raznih država.

Sa ovom opaskom formula 1) čini:

13)

a zatim: *u geodeziji je moguće zamjenit duljinu sfernih strana u projekciji sa duljinom odgovarajućih tetiva.*

Sličan teorem imamo u geodeziji za duljinu lukova normala i lukova geodetskih linija koje prolaze kroz iste točke.

Uzimajući u račun treći član 12), jednačba 11) daje:

gdje je

Imajući u vidu sve ove rezultate za redukciju kuteva β zanemarujući članove γ^2 i višeg reda, dabija se prvo

a odatle

14)

Po zakonu aproksimacije možemo staviti ϱN na mjesto N_c^2 gdje su ϱ i N računati za jednu srednju širinu koja odgovara bilo kojoj točki područja u kojoj se nalazi trokut. Stavimo

dobijamo

iz koje se može viditi da mijenjajući indekse h i $h+1$ za redukciju β'', ova mijenja i znak i vrijednost. U slijedećim slučajevima postaje $\beta = O$.

Vrijednost zanemarena pri određivanju β (drugi član) dobija se iz izraža:

koji se može u geodeziji zanemariti.

Raccogliendo quanto esposto, potremo così concludere:

La risoluzione del triangolo geodetico ellissoidico dipende dalla risoluzione del triangolo piano delle corde del corrispondente triangolo curvilineo ottenuto per rappresentazione conforme ed i cui angoli provengono dagli angoli del triangolo geodetico apportandovi la riduzione angolare δ_h *definita dalla:*

$$\delta = \beta_{h,\, h+1} + \beta_{h,\, h+2} = \{(x_h - x_{h+1})\ (2\, y_h + y_{h+1}) + (x_h - x_{h+2})\ (2\, y_h + y_{h+2})\}\ C_\beta$$

e reciprocamente: mentre i lati sono legati dalle:

$$a_h = g_h \left\{ 1 + \frac{y^2_{h+1} + y_{h+1}\ y_{h+2} + y^2_{h+2}}{6\, \varrho_m N_m} \right\}$$

o dalle reciproche

$$g_h = a_h \left\{ 1 - \frac{y^2_{h+1} + y_{h+1}\ y_{h+2} + y^2_{h+2}}{6\, \varrho_m N_m} \right\}$$

E' facile altresì provare — entro i limiti delle approssimazioni geodetiche — che: *le aree dei due triangoli geodetico e piano delle corde risultano eguali e che l'eccesso sferico del triangolo geodetico è dato dalla somma*

$$\delta_h + \delta_{h+1} + \delta_{h+2}$$

Qualora un arco di geodetica elissoidica di lunghezza s e di azimut, esca da un punto P di coordinate geografiche φ e λ, calcolata la latitudine crescende U si determineranno con le formule di corrispondenza [7] le coordinate cartesiane x, y di P', avute queste con una delle formule accennate si calcolerà la convergenza dei meridiani in P'; l'angolo di direzione della trasformata di s cioè l'angolo che compie la parallela all'asse delle x condotta per P' con la tangente alla trasformata è rappresentata dalla differenza:

$$a - \varepsilon$$

ne consegue che l'angolo di direzione della corda che sottende la trasformata risulta definito dalla

$$a - \varepsilon + \beta$$

Attribuendo alla corda provvisoriamente la lunghezza s della geodetica, le coordinate approssimate x e y dell'altro estremo P'' della trasformata risultano dalle

$$\begin{cases} x^x = x + s \cdot \cos\,(a - \varepsilon + \beta) \\ y^x = y + s \cdot \text{sen}\,(a - \varepsilon + \beta) \end{cases}$$

con le coordinate di P' e quelle approssimate di P'' è possibile determinare m e conseguentemente la lunghezza della corda viene data dalla

$$s \cdot m$$

Le coordinate definitive del punto P'' risultano allora espresse dalle:

$$x^x = x + s\, m \cdot \cos\,(a - \varepsilon + \beta)$$
$$y^x = y + s\, m \cdot \text{sen}\,(a - \varepsilon + \beta)$$

Note le coordinate x^x y^x riesce possibile determinare i valori φ e λ che le caratterizzano. *Risulta così il fondamentale problema geodetico del trasporto della latitudine lungo un arco di geodetica.*

Nakon ovog izlaganja možemo zaključiti: *rješenje sferoidnog trokuta zavisi o rješenju ravnog trokuta sastavljenog od tetiva odgovarajućeg sfernog trokuta, dobijenog putem komfornog preslikavanja, čiji se kutevi dobijaju iz kuteva geodetskog trokuta kutnom redukcijom* δ_h *definirane sa:*

i recipročno; dok su strane vezane sa:

ili iz recipročnog izraza:

Lako je također utvrditi — unutar granica geodetskih aproksimacja — da: *površine dvaju kuteva geodetskog i ravnog su iste i da sferni eksces geodetskog trokuta je dat sumom*

U slučaju da jedan luk geodetske linije duljine S i azimuta, izlazi iz jedne točke geografskih koordinata φ i λ uzimajući u obzir širinu koja raste U odredit će se formulama koje odgovaraju formulama 7) ortogonalne koordinate x, y točke P. Kad dobijemo koordinate jednom od označenih formula, računat će se konvergencija meridijana u P'; kut nagiba preslikanog luka s tj. kut što ga čini paralela sa osi x koja prolazi točkom P' sa tangentom na preslikani dio luka u projekciji, dobija se iz razlike: Ne dobija se nego kut nagiba tetive koja zamjenjuje preslikan luk deformiranu izrazom

Dajući tetivi privremeno duljinu s geodetske linije, približno koordinate x i y druge točke P'' preslikanog luka, dobijaju se iz:

Sa koordinatama P' i onim približnim od P'' moguće je odrediti m i onda dužinu tetive dobijamo iz:

Definitivne koordinate točke P'' dobijaju se onda iz:

Kada su nam poznate koordinate x^x y^x lako je odrediti vrijednosti φ i λ koje ih karakteriziraju. *Na taj način proizlazi konačno rješenje osnovnog problema geodezije prenošenja širine duž jednog luka geodetske linije.*

Operando in modo simile si possono risolvere tutti i problemi della geodesia ellissoidica.

I conteggi vengono grandemente facilitati disponendo di una tabella a piccolo passo dalla quale sia possibile ricavare x, y definitive dalle [7] in funzione di φ, λ e reciprocamente.

Tutti i problemi si risucono così dal punto di vista calcolativo ad una successione di semplici interpolazioni.

Dal punto di vista economico i calcoli così condotti sono di gran lunga più convenienti rispetto a quelli classici, ed è perciò che in Italia i grandi Uffici topografici si sono orientati su questi procedimenti, costruendo a tale scopo opportune tavole numeriche, dopo di aver particolarizzato le formule di corrispondenza assumendo come proiezione conforme o la rappresentazione di Gauss[20] o la rappresentazione di Lambert.

[20] I. G. M. — Tavole ausiliarie per i calcoli sul piano della proiezio ne di Gauss-Boaga — ellissoide internazionale. Ed. I. G. M. Firenze, 1954. pagg. 368.

Ako postupimo na sličan način možemo riješiti sve probleme geodezije, koji se odnose na elipsoid.

Računanja se mnogo pojednostavljuju ako raspolažemo jednom tabelom iz koje je moguće vaditi definitivne veličine x i y prema 7) kao funkcije φ, λ i obratno.

Svi se problemi u računskom pogledu tako svode na jednostavne interpolacije.

Sa stanovišta ekonomije ovakav način računanja je daleko korisniji od onog klasičnog. Stoga su se u Italiji veliki geodetski uredi orjentirali na ovaj računski postupak. Za tu svrhu konstruirali su numeričke tablice, prethodno raščlanivši odgovarajuće formule, usvojivši komformnu Gaussovu 20) ili Lambertovu projekciju.

20 I. G. M. Pomoćne tabele za računanje na ravninu projekcije Gauss-Boaga internacionalni elipsoid. Ed. I. G. M. Firenza 1954. pagg. 368.