Ing. Izidor Palman — Zagreb

Izjednačenje trigonometrijske mreže metodom Pranis-Pranjevića u više grupa po posrednim opažanjima

Velike trigonometrijske mreže pretstavljaju ogroman posao, kako u pogledu opservacije, tako i u pogledu izjednačenja. Opservaciju jedne takve mreže može vršiti istodobno više lica nezavisno jedan od drugoga. Na taj način ubrza se rad na terenu. Međutim preostaje još problem izjednačenja takve mreže.

Za izjednačenje trig. mreže strogom metodom odjednom, pomoću posrednih opažanja, potrebno je riješiti dvostruki broj normalnih jednadžbi od broja traženih točaka. Kako broj računskih operacija s povećanjem broja normalnih jednadžbi raste vrlo brzo, to bi za izjednačenje jedne velike trig. mreže strogom metodom najmanjih kvadrata bilo potrebno riješiti toliki broj normalnih jednadžbi odjednom, da bi to postalo praktički gotovo nemoguće.

U težnji da se izjednačenje velikih mreža na neki način pojednostavi, mnogi su geodeti predložili svoje načine izjednačenja za koje je potreban manji broj računskih operacija. Neki od njih zadržavaju svu strogost metode najmanjih kvadrata (Krüger, Boltz), dok drugi daju približna rješenja (Gauss, Pinkvart, Svišćev). Tako je i ruski geodet Pranis-Pranjević predložio svoj način izjednačenja trig. mreže.

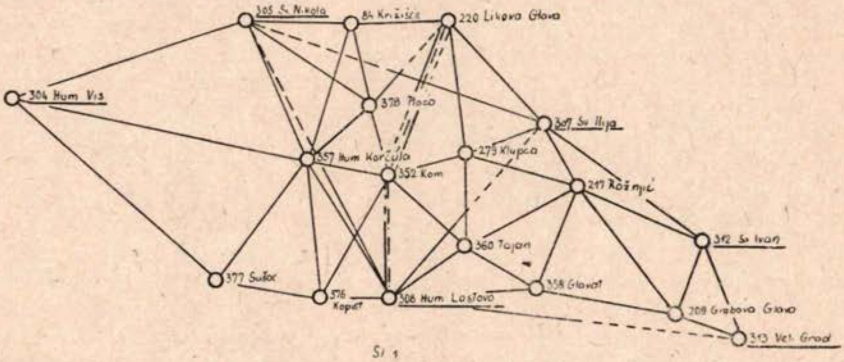
Princip ove metode sastoji se u tome, da se mreža podijeli u dvije ili više grupa, smatrajući svaku takvu grupu kao samostalnu i potpuno nezavisnu od ostalih djelova. Za svaku takvu grupu sastave se jedndžbe pogrešaka i normalne jednadžbe, čijim rješenjem i spajanjem treba dobiti rezultat ekvivalentan rezultatu dobivenom izjednačenjem, strogom metodom najmanjih kvadrata, odjednom.

Za spajanje grupa autor koristi osebine t. zv. ekvivalentnih jednadžbi Hansen-a i Andre-a.

Podjela mreže u grupe ovisi o tome, vršimo li izjednačenje načinom posrednih ili uvjetnih opažanja. Za izjednačenje po posrednim opažanjima podjelu je najbolje izvršiti tako, da u svaku grupu uđe jednak broj traženih točaka i što mane vezujućih točaka, bez obzira bile one date ili tražene, jer se time postiže minimum računskih operacija. Osim toga podjelu treba vršiti tako, da granični pravci ulaze samo u jednu grupu i dobiju samo jednu popravku (vidi sl. 1).

Kako u domaćoj stručnoj literaturi metoda Pranis-Pranjevića nije nigdje detaljnije obrađena, osim osnovnih principa ove metode i postupka za slučaj izjednačenja po uvjetnim opažanjima, koji su navedeni na str. 323—325 u knjizi: Dr. ing. Čubranić, Viša geodezija I., Zagreb 1954.; ja sam na osnovu navedenih principa i koristeći savjete Dr. ing. Čubranića izjednačio mrežu prikazanu na sl. 1 ovom metodom, pa ovdje navodim postupak izjednačenja.

Navedeni primjer imamo kod izjednačenja trig. mreže II. reda srednjedalmatinskog otočja



Sl. 1

Za izjednačenje ove mreže metodom Pranis-Pranjevića po posrednim opažanjima, izvršena je podjela u dvije grupe presjekom kroz datu točku △ 308 Hum Lastovo i tražene točke △ 352 Kom i △ 220 Likova Glava. Ovdje su kao granični pravci ušli jednostrano opažani Hum Lastovo—Kom i obostrano opažani Kom—Likva Glava. Prvi je uzet samo u prvoj grupi, dok je obostrano opažani pravac Kom—Likova Glava podijeljen na dva jednostrana prvaca od kojih je jedan Likova Glava—Kom ušao u prvu, a drugi Kom—Likova Glava u drugu grupu. Na taj način dobivene su dvije potpuno nezavisne grupe sa po 7 nepoznatih točaka, od kojih su dvije △ 325 Kom i △220 Likova Glava vezujuće točke, odnosno one pripadaju obim grupama.

Ako u izjednačenje ulazi koja od datih točaka kao vezujuća točka, kao što je to ovdje bio slučaj sa točkom △ 308 Hum Lastovo, onda je još potrebno izvršiti i pravilnu podjelu orjentacionih pravaca u grupe. Smatrajući svaku grupu kao samostalnu trig. mrežu zaključujemo, prema sl. 1., da pravac Hum Lastovo—Sv. Nikola pripada prvoj, a ostala dva pravca Hum Lastovo—Sv. Ilija i Hum Lastovo—Veli Grad pripadaju drugoj grupi. Na taj način dobivamo orjentaciju ekvivalentnu onoj dobivenoj izjednačenjem odjednom strogom metodom najmanjih kvadrata, i ostaje sačuvana jednakost težina za obe orjentacije.

Kod izjednačenja trig. mreže po posrednim opažanjima treba odrediti tri puta veći broj nepoznanica nego što ima traženih točaka, plus broj datih točaka, jer je za svaku datu točku potrebno računati nepoznanicu *do*. Da bi smanjili broj normalnih jednadžbi, prije sastava normalnih jednadžbi izvrši se eliminacija nepoznanice *do*.

Kako nepoznanica dx i dy vezujućih točaka dobivamo rješenjem vezujućih normalnih jednadžbi, odnosno spajanjem grupa, isto tako treba i nepoznanice *do* vezujućih točaka računati kao nepoznanice vezujućih normalnih jednadžbi, jer su zajedničke za obe grupe. U tu svrhu potrebno je povećati broj normalnih jednadžbi za toliko, koliko ima vezujućih točaka datih i traženih. I radi toga, kako je prije rečeno, kod podjele mreže u grupe treba voditi računa o tome, da imamo što manje vezujućih točaka. Zato kod izjednačenja trig. mreže metodom Pranis-Pranjevića, gdje se mreža dijeli u grupe, eliminacija nepoznanica *do* smije se izvršiti, samo na onim točkama, koje ulaze samo u jednu grupu, dok se na vezujućim točkama eliminacija nepoznanice *do* ne smije izvršiti.

Prema tome za izjednačenje trig. mreže na sl. 1. potrebno je bilo u svakoj grupi riješiti 14 normalnih jednadžbi za nepoznanice dx i dy, i 3 normalne jednadžbe za nepoznanice *do* na vezujućim točkama. Dakle je u svakoj grupi trebalo riješiti ukupno 17 normalnih jednadžbi odjednom, izvršiti spajanje grupa, i tako dobiven novi sistem od 7 normalnih jednadžbi riješiti, da bi se dobile gore navedene nepoznanice vezujućih točaka.

Ako su nepoznanice *do* vezujućih točaka zajedničke obim grupama, onda mora na svakoj vezujućoj točki postojati i zajednička orjentacija za obe grupe. Zbog toga ne može na vezujućim točkama, u svakoj grupi mreže, Σl biti jednaka nuli.

Kako se kod izjednačenja trig. mreže ovom metodom ne smije eliminirati nepoznanica do vezujućih točaka, to je za ovaj slučaj bolje primijeniti način pisanja jednadžbi pogrešaka za svako stajalište posebno, nego Schreiberov način. Za ovaj način pisanja jednadžbi pogrešaka, eliminacija nepoznanice *do* na točkama unutar grupa vrši se tako, da se koeficijenti jednadžbi pogrešaka $a, b, c, d, \cdots$ reduciraju na svakoj točki na nulu. Tako dobivene jednadžbe zovemo reduciranim jednandžbama pogrešaka. One na vezujućim točkama zadržavaju svoj prvobitan oblik. Kod sastava jednadžbi pogrešaka treba paziti da nepoznanice vezujućih točka dođu na kraju jednadžbi pisane istim redoslijedom u obim grupama i to, najprije za koordinate, a onda za orjentacije.

Pokažimo sada na koji se način vrši spajanje grupa. Uzmimo na pr. jednu grupu jednadžbi pogrešaka koje u općem obliku glase:

$$\begin{aligned}
V_1 &= a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 + d_1 x_4 + e_1 z_1 + f_1 z_2 + g_1 z_3 + h_1 z_4 + l_1 \\
V_2 &= a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 + d_2 x_4 + e_2 z_1 + f_2 z_2 + g_2 z_3 + h_2 z_4 + l_2 \\
V_3 &= a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 + d_3 x_4 + e_3 z_1 + f_3 z_2 + g_3 z_3 + h_3 z_4 + l_3 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
V_n &= a_n x_1 + b_n x_2 + c_n x_3 + d_n x_4 + e_n z_1 + f_n z_2 + g_n z_3 + h_n z_4 + l_n
\end{aligned}$$

i drugu grupu jednadžbi pogrešaka koje u općem obliku glase:

$$\begin{aligned}
V_1' &= a_1' y_1 + b_1' y_2 + c_1' y_3 + d_1' y_4 + e_1' z_1 + f_1' z_2 + g_1' z_3 + h_1' z_4 + l_1' \\
V_2' &= a_2' y_1 + b_2' y_2 + c_2' y_3 + d_2' y_4 + e_2' z_1 + f_2' z_2 + g_2' z_3 + h_2' z_4 + l_2' \\
V_3' &= a_3' y_1 + b_3' y_2 + c_3' y_3 + d_3' y_4 + e_3' z_1 + f_3' z_2 + g_3' z_3 + h_3' z_4 + l_3' \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
V_n' &= a_n' y_1 + b_n' y_2 + c_n' y_3 + d_n' y_4 + e_n' z_1 + f_n' z_2 + g_n' z_3 + h_n' z_4 + l_n'
\end{aligned}$$

gdje broj jednadžbi n mora biti veći od broja nepoznanica.

Svaka od ovih grupa sadrži one nepoznanice, koje ulaze samo u jednu grupu, i one koje su zajedničke obim grupama, kao na pr. ovdje za prvu grupu x_1, x_2, x_3, x_4; za drugu grupu y_1, y_2, y_3, y_4; i zajedničke nepoznanice obim grupama z_1, z_2, z_3 i z_4.

Ovaj sistem treba riješiti uz uvjet da $[vv] + [v'v']$ bude minimum.

Za tako postavljen uvjet dobili bismo jedan sistem od dvije grupe normalnih jednadžbi, od kojih prva grupa u skraćenom obliku izgleda:

$$
\begin{aligned}
[aa]x_1 + [ab]x_2 + [ac]x_3 + [ad]x_4 + [ae]z_1 + [af]z_2 + [ag]z_3 + [ah]z_4 + [al] &= 0\\
[bb]x_2 + [bc]x_3 + [bd]x_4 + [be]z_1 + [bf]z_2 + [bg]z_3 + [bh]z_4 + [bl] &= 0\\
[cc]x_3 + [cd]x_4 + [ce]z_1 + [cf]z_2 + [cg]z_3 + [ch]z_4 + [cl] &= 0\\
[dd]x_4 + [de]z_1 + [df]z_2 + [dg]z_3 + [dh]z_4 + [dl] &= 0\\
[ee]z_1 + [ef]z_2 + [eg]z_3 + [eh]z_4 + [el] &= 0\\
[ff]z_2 + [fg]z_3 + [fh]z_4 + [fl] &= 0\\
[gg]z_3 + [gh]z_4 + [gl] &= 0\\
[hh]z_4 + [hl] &= 0
\end{aligned}
$$

a druga grupa:

$$
\begin{aligned}
[a'a']y_1 + [a'b']y_2 + [a'c']y_3 + [a'd']y_4 + [a'e']z_1 + [a'f']z_2 + [a'g']z_3 + [a'h']z_4 + [a'l'] &= 0\\
[b'b']y_2 + [b'c']y_3 + [b'd']y_4 + [b'e']z_1 + [b'f']z_2 + [b'g']z_3 + [b'h']z_4 + [b'l'] &= 0\\
[c'c']y_3 + [c'd']y_4 + [c'e']z_1 + [c'f']z_2 + [c'g']z_3 + [c'h']z_4 + [c'l'] &= 0\\
[d'd']y_4 + [d'e']z_1 + [d'f']z_2 + [d'g']z_3 + [d'h']z_4 + [d'l'] &= 0\\
[e'e']z_1 + [e'f']z_2 + [e'g']z_3 + [e'h']z_4 + [e'l'] &= 0\\
[f'f']z_2 + [f'g']z_3 + [f'h']z_4 + [f'l'] &= 0\\
[g'g']z_3 + [g'h']z_4 + [g'l'] &= 0\\
+ [h'h']z_4 + [h'l'] &= 0
\end{aligned}
$$

Kako su nepoznanice z_1, z_2, z_3 i z_4 zajedničke obim grupama, to je za njihovo računanje potrebno u svakoj grupi najprije eliminirati prve četiri nepoznanice. Nakon te eliminacije dobijemo novi sistem od dvije grupe normalnih jednadžbi, koji glasi:

$$
\begin{aligned}
[ee\cdot 4]\,z_1 + [ef\cdot 4]\,z_2 + [eg\cdot 4]\,z_3 + [eh\cdot 4]\,z_4 + [el\cdot 4] &= 0\\
[ff\cdot 4]\,z_2 + [fg\cdot 4]\,z_3 + [fh\cdot 4]\,z_4 + [fl\cdot 4] &= 0\\
[gg\cdot 4]\,z_3 + [gh\cdot 4]\,z_4 + [gl\cdot 4] &= 0\\
[hh\cdot 4]\,z_4 + [hl\cdot 4] &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[e'e'\cdot 4]\,z_1 + [e'f'\cdot 4]\,z_2 + [e'g'\cdot 4]\,z_3 + [e'h'\cdot 4]\,z_4 + [e'l'\cdot 4] &= 0\\
[f'f'\cdot 4]\,z_2 + [f'g'\cdot 4]\,z_3 + [f'h'\cdot 4]\,z_4 + [f'l'\cdot 4] &= 0\\
[g'g'\cdot 4]\,z_3 + [g'h'\cdot 4]\,z_4 + [g'l'\cdot 4] &= 0\\
[h'h'\cdot 4]\,z_4 + [h'l'\cdot 4] &= 0
\end{aligned}
$$

Na taj način, kako se vidi iz prednjih izraza, dobivene su dvije grupe normalnih jednadžbi, koje u sebi sadrže samo zajedničke nepoznanice obih grupa, i to z_1, z_2, z_3 i z_4. Sada je postupak kod daljnjeg rješavanja vrlo jednostavan.

Za računanje ovih nepoznanica potrebno je izvršiti spajanje grupa. Spajanje grupa vrši se tako, da se koeficijenti pred istim nepoznanicama iz obih grupa zbroje i tako dobije novi sistem od 4 normalne jednadžbe, čijim rješenjem dobijemo konačno nepoznanice z_1, z_2, z_3 i z_4. Uvrštenjem ovih vrijednosti u četvrtu, treću, drugu i prvu reduciranu jednadžbu svake grupe, dobijemo preostale nepoznanice x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3 i y_4.

Uvedemo li slijedeće oznake:

$$
\begin{aligned}
&[ee\cdot 4] + [e'e'\cdot 4] = [AA]\,; && [ef\cdot 4] + [e'f'\cdot 4] = [AB]\,;\\
&[el\cdot 4] + [e'l'\cdot 4] = [AL]\,; && [ff\cdot 4] + [f'f'\cdot 4] = [BB]\,;\\
&[fl\cdot 4] + [f'l'\cdot 4] = [BL]\,; && [gg\cdot 4] + [g'g'\cdot 4] = [CC]\,;\\
& && [hh\cdot 4] + [h'h'\cdot 4] = [DD]\,;
\end{aligned}
$$

$$[eg \cdot 4] + [e'g' \cdot 4] = [AC]\,; \qquad [eh \cdot 4] + [e'h' \cdot 4] = [AD]\,;$$
$$[fg \cdot 4] + [f'g' \cdot 4] = [BC]\,; \qquad [fh \cdot 4] + [f'h' \cdot 4] = [BD]\,;$$
$$[gh \cdot 4] + [g'h' \cdot 4] = [CD]\,; \qquad [gl \cdot 4] + [g'l' \cdot 4] = [CL]\,;$$
$$[hl \cdot 4] + [h'l' \cdot 4] = [DL]\,;$$

pa će spojene, odnosno vezujuće, normalne jednadžbe u svojem konačnom obliku izgledati:

$$\begin{aligned}
[AA]z_1 + [AB]z_2 + [AC]z_3 + [AD]z_4 + [AL] &= 0\\
[BB]z_2 + [BC]z_3 + [BD]z_4 + [BL] &= 0\\
[CC]z_3 + [CD]z_4 + [CL] &= 0\\
[DD]z_4 + [DL] &= 0
\end{aligned}$$

Metodom Pranis-Pranjevića, po posrednim opažanjima u dvije grupe izjednačena je trig. mreža II. reda srednje-dalmatinskog otočja, pa usporedbe radi navesti ću rezultate dobivene ovom metodom i strogom metodom izjednačenja odjednom.

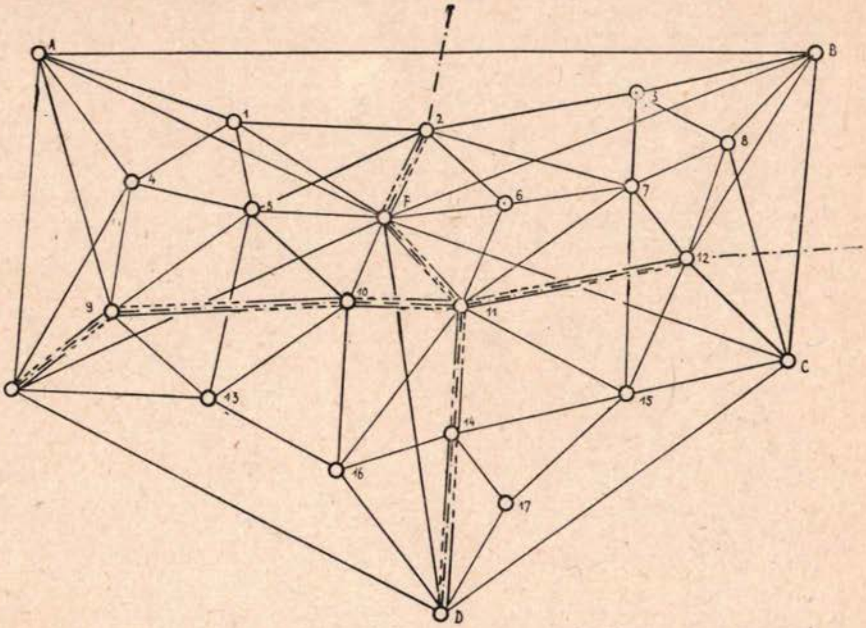
Stroga metoda odjednom			Stajalište	Metoda Pranis-Pranjevića		
dx	dy	do		dx	dy	do
— 0,19 798	+ 0,15 972	— 0,“33	Hum L.	— 0,19 791	+ 0,15 973	— 0,“33
+ 0,11 291	+ 0,21 699	+ 0,“42	Sušac	+ 0,11 288	+ 0,21 689	+ 0,“42
+ 0,02 047	+ 0,18 624	+ 0,“29	Kopist	+ 0,02 046	+ 0,18 625	+ 0,“29
— 0,09 579	+ 0,11 684	— 0,“94	Kom	— 0,09 572	+ 0,11 685	— 0,“94
— 0,19 313	+ 0,11 936	— 0,“15	Ploča	— 0,19 304	+ 0,11 937	— 0,“14
— 0,12 542	+ 0,06 675	+ 0,“40	Križišće	— 0,12 531	+ 0,06 672	+ 0,“40
— 0,24 704	+ 0,07 080	— 0,“12	Likova Gl.	— 0,24 689	+ 0,07 085	— 0,“12
+ 0,02 382	+ 0,16 396	— 0,“59	Klupca	+ 0,02 388	+ 0,16 396	— 0,“59
+ 0,08 514	+ 0,16 935	— 0,35	Tajan	+ 0,08 516	+ 0,16 935	— 0,“35
— 0,00 446	+ 0,03 114	— 0,“24	Ražnjić	— 0,00 443	+ 0,03 108	— 0,“25
+ 0,09 771	+ 0,18 492	— 0,“53	Glavat	+ 0,09 773	+ 0,18 485	— 0,“53
+ 0,05 534	— 0,01 350	+ 0,“42	Grabova Gl.	+ 0,05 534	— 0,01 351	+ 0,“42

Iz ove tablice se vidi, da se rezultati dobiveni izjednačenjem metodom Pranis-Pranjevića i strogom metodom najmanjih kvadrata odjednom, razlikuju u petoj decimali što je praktički beznačajno. Ove razlike nastale su kao posljedice zaokruživanja kod eliminacije nepoznanica.

Ovdje smo objasnili postupak za slučaj izjednačenja trig. mreže u dvije grupe. Međutim kod izjednačenja velikih trig. mreža češće će doći u obzir izjednačenje u 3 i više grupa. Kada bi imali jednu veliku trig. mrežu, za čije bi izjednačenje bilo potrebno izvršiti podjelu u više od dvije grupe, onda bi sav napred navedeni postupak, osim spajanja grupa, ostao isti.

Pokažimo sada kako bi se vršilo spajanje grupa, ako bi trig. mreža bila podjeljena u više od dvije grupe. Uzmimo na pr., da imamo jednu trig. mrežu, kao na sl. 2.

Ovdje je između datih točaka *A*, *B*, *C*, *D*, *E* i *F* umetnuto još 17 točaka nižeg reda. Za izjednačenje ove mreže neka je izvršena podjela u 4 grupe. Iz slike 2. se vidi, da će za računanje nepoznanica vezujućih točaka biti potrebno izvršiti spajanje grupa više puta, jer svaka vezujuća točka pripada samo dvjema grupama, to ćemo njene nepoznanice računati spajanjem dviju grupa. Iznimku čini centralna vezujuća točka, a to je u našem primjeru točka 11. Kako ona pripada svim grupama, to ćemo njene koordinate i orjentaciju dobiti spajanjem svih grupa. Ako bi kao centralna vezujuća točka bila jedna od datih točaka, onda bi za nju trebalo odrediti samo nepoznanicu do također spajanjem svih grupa.



Sl. 2

Kratkoće radi uzmimo da je za svaku točku potrebno odrediti samo jednu nepoznanicu. Tako ćemo za mrežu prikazanu na sl. 2. nakon sastava jednadžbi pogrešaka izvršiti sastav normalnih jednadžbi, koje u skraćenom obliku glase:

$$
\begin{aligned}
[aa]\,x_1 + [ab]\,x_4 + [ac]\,x_5 + [ad]\,x_9 + [ae]\,x_{10} + [af]\,x_2 + [ag]\,x_{11} + [al] &= 0\\
[bb]\,x_4 + [bc]\,x_5 + [bd]\,x_9 + [be]\,x_{10} + [bf]\,x_2 + [bg]\,x_{11} + [bl] &= 0\\
[cc]\,x_5 + [cd]\,x_9 + [ce]\,x_{10} + [cf]\,x_2 + [cg]\,x_{11} + [cl] &= 0\\
[dd]\,x_9 + [de]\,x_{10} + [df]\,x_2 + [dg]\,x_{11} + [dl] &= 0\\
[ee]\,x_{10} + [ef]\,x_2 + [eg]\,x_{11} + [el] &= 0\\
[ff]\,x_2 + [fg]\,x_{11} + [fl] &= 0\\
[gg]\,x_{11} + [gl] &= 0
\end{aligned}
$$

za I. grupu,

$$
\begin{aligned}
[a'a']x_3 + [a'b']\,x_6 + [a'c']\,x_7 + [a'd']\,x_8 + [a'e']\,[f,v] + {}^{gl}x\,x_2 + [a'g']\,x_{11} + [a'l'] &= 0\\
[b'b']\,x_6 + [b'c']\,x_7 + [b'd']\,x_8 + [b'e']\,x_{12} + [b'f']\,x_2 + [b'g']\,x_{11} + [b'l'] &= 0\\
[c'c']\,x_7 + [c'd']\,x_8 + [c'e']\,x_{12} + [c'f']\,x_2 + [c'g']\,x_{11} + [c'l'] &= 0\\
[d'd']\,x_8 + [d'e']\,x_{12} + [d'f']\,x_2 + [d'g']\,x_{11} + [d'l'] &= 0\\
[e'e']\,x_{12} + [e'f']\,x_2 + [e'g']\,x_{11} + [e'l'] &= 0\\
[f'f']\,x_2 + [f'g']\,x_{11} + [f'l'] &= 0\\
[g'g']\,x_{11} + [g'l'] &= 0
\end{aligned}
$$

za II. grupu

$$[a''a'']x_{13}+[a''b'']x_{16}+[a''c'']x_9+[a''d'']x_{10}+[a''e'']x_{14}+[a''f'']x_{11}+[a''l'']=0$$
$$[b''b'']x_{16}+[b''c'']x_9+[b''d'']x_{10}+[b''e'']x_{14}+[b''f'']x_{11}+[b''l'']=0$$
$$[c''c'']x_9+[c''d'']x_{10}+[c''e'']x_{14}+[c''f'']x_{11}+[c''l'']=0$$
$$[d''d'']x_{10}+[d''e'']x_{14}+[d''f'']x_{11}+[d''l'']=0$$
$$[e''e'']x_{14}+[e''f'']x_{11}+[e''l'']=0$$
$$[f''f'']x_{11}+[f''l'']=0$$

za III. grupu i

$$[a'''a''']x_{15}+[a'''b''']x_{17}+[a'''c''']x_{12}+[a'''d''']x_{14}+[a'''e''']x_{11}+[a'''l''']=0$$
$$[b'''b''']x_{17}+[b'''c''']x_{12}+[b'''d''']x_{14}+[b'''e''']x_{11}+[b'''l''']=0$$
$$[c'''c''']x_{12}+[c'''d''']x_{14}+[c'''e''']x_{11}+[c'''l''']=0$$
$$[d'''d''']x_{14}+[d'''e''']x_{11}+[d'''l''']=0$$
$$[e'''e''']x_{11}+[e'''l''']=0$$

za IV. grupu.

Kod sastava jednadžbi pogrešaka, odnosno normalnih jednadžbi treba paziti na to, da nepoznanice, koje želimo računati spajanjem grupa, budu stavljene na kraj jednadžbi istim redom u odgovarajućim grupama. Za dati primjer imamo slijedeće: Najprije ćemo izračunati nepoznanicu x centralne vezujuće točke, i to spajanjem svih grupa.

Eliminacijom nepoznanica x_1, x_4, x_5, x_9, x_{10}, x_2, x_3, x_6, x_7 itd. iz I. II. III. i IV. grupe dobijemo u svakoj grupi jednu reduciranu jednadžbu koja glasi:

$$[gg\cdot 6]x_{11}+[gl\cdot 6]=0 \qquad \text{za I. grupu}$$
$$[g'g'\cdot 6]x_{11}+[g'l'\cdot 6]=0 \qquad \text{za II. grupu}$$
$$[f''f''\cdot 5]x_{11}+[f''l''\cdot 5]=0 \qquad \text{za III. grupu}$$
$$[e'''e'''\cdot 5]x_{11}+[e'''l'''\cdot 4]=0 \qquad \text{za IV. grupu}$$

Zbrajanjem koeficijenata pred nepoznanicom x_{11}, i slobodnih članova iz sve četiri jednadžbe dobivamo jednu jednadžbu sa jednom nepoznanicom x_{11}, koju kada rješimo dobivamo veličinu x_{11}, koja je zajednička svim grupama.

Iza toga prelazimo na računanje nepoznanice x_2, koju računamo spajanjem I. i II. grupe. Za dati primjer te bi jednadžbe glasile ovako:

$$[ff\cdot 5]x_2+[fg\cdot 5]x_{11}+[fl\cdot 5]=0 \qquad \text{za I. grupu}$$
$$[f'f'\cdot 5]x_2+[f'g'\cdot 5]x_{11}+[f'l'\cdot 5]=0 \qquad \text{za II. grupu}$$

Zbrajanjem koeficijenata pred istim nepoznanicama i uvrštenjem u gornje jednadžbe, nepoznanice x_{11} dobivamo jednu jednadžbu sa nepoznanicom x_2.

Tako na isti način računamo nepoznanicu x_{14} spajanjem III. i IV. grupe.

Iza toga prelazimo na računanje nepoznanica x_9 i x_{10} spajanjem I. i III. grupe. Kada u jednadžbe:

iz I. grupe

$$[dd\cdot 3]x_9+[de\cdot 3]x_{10}+[df\cdot 3]x_2+[dg\cdot 3]x_{11}+[dl\cdot 3]=0$$
$$[ee\cdot 3]x_{10}+[ef\cdot 3]x_2+[eg\cdot 3]x_{11}+[el\cdot 3]=0$$

iz III. grupe

$$[c''c''\cdot 2]x_9+[c''d''\cdot 2]x_{10}+[c''e''\cdot 2]x_{14}+[c''f''\cdot 2]x_{11}+[c''l''\cdot 2]=0$$
$$[d''d''\cdot 2]x_{10}+[d''e''\cdot 2]x_{14}+[d''f''\cdot 2]x_{11}+[d''l''\cdot 2]=0$$

uvrstimo do sada sračunate nepoznanice i zbrojimo koeficijente pred istim nepoznanicama dobivamo dvije jednadžbe sa nepoznanicama x_9, i x_{10}. Još nam je preostalo jedino računanje nepoznanice x_{12}, koje računamo spajanjem II. i IV. grupe na isti način kao i u naprijed navedenim slučajevima spajanja.

Time bi bilo završeno spajanje grupa.

Tako sračunate nepoznanice vezujućih točaka uvrštavamo redom u preostale reducirane jednadžbe pojedinih grupa i dobivamo nepoznanice onih točaka, koje dolaze samo u jednoj grupi.

Pogledajmo sada kako raste broj računskih operacija s povećanjem broja normalnih jednadžbi. Terzić u knjizi Viša geodezija I. Beograd 1934. na strani 302 daje formulu koja glasi:

$$n = \frac{K(K+1)(K+8)}{6}$$

gdje je n broj računskih operacija, a k broj normalnih jednadžbi.

Na pr. za izjednačenje trig. mreže II. reda srednje-dalmatinskog otočja, koja je prikazana na sl. 1., strogom metodom najmanjih kvadrata odjednom, trebalo je riješiti 24 normlane jednadžbe i izvršiti prema gornjoj formuli 3200 računskih operacija; dok je za izjednačenje ove iste mreže metodom Pranis-Pranjevića u dvije grupe trebalo riješiti dvije grupe po 17 i jednu grupu od 7 normalnih jednadžbi i prema gornjoj formuli izvršiti ukupno 2550 računskih operacija.

Ovo već i ovdje pretstavlja izvjesnu prednost, iako ovu mrežu ne možemo smatrati velikom trig. mrežom; dok je kod velikih trig. mreža ova prednost daleko veća. Osim toga metoda Pranis-Pranjevića, uz svu strogost metode najmanjih kvadrata, omogućuje istodobno rad većem broju kalkulatora i može se koristiti bilo načinom posrednih, bilo uvjetnih opažanja.