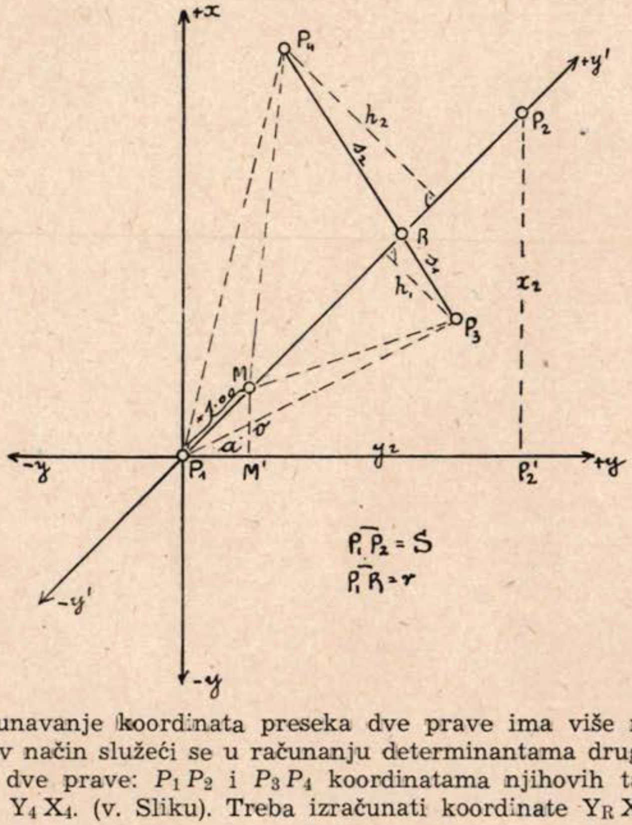
Ing. Marko Kačanski — Novi Sad

Koordinate preseka dve prave

Koordinate preseka dve prave, ili jedne prave sa više pravih, računamo onda, kada nam one treba da posluže kao kontrola snimanja, ili kada treba da obeležimo jednu pravu njenim presecima sa više pravih. Ovih slučajeva ima najčešće u gradovima, kada obeležavamo osu nove ulice njenim presecima sa poligonskim stranama. Isto se tako i kod melioracije zemljišta može obeležiti osa novog kanala, pod pretpostavkom da postoji dobra poligonska mreža.



Za izračunavanje koordinata preseka dve prave ima više načina. Ovde ćemo dati nov način služeći se u računanju determinantama drugog reda.

Date su dve prave: $P_1 P_2$ i $P_3 P_4$ koordinatama njihovih tačaka: $Y_1 X_1$, $Y_2 X_2$, $Y_3 X_3$, $Y_4 X_4$. (v. Sliku). Treba izračunati koordinate $Y_R X_R$ preseka R ove dve prave.

U pogledu oznake tačaka uzećemo za pravilo, da tačke na jednoj pravoj dobiju oznake P_1 i P_2, a na drugoj pravoj P_3 i P_4.

Koordinatni početak premestićemo u tačku P_1, tako što ćemo od koordinata svake tačke oduzeti koordinate tačke P_1. Na taj način koordinate tačke P_1 su ravne nuli, a ostale tačke P_2, P_3 i P_4 imaće redukovane koordinate: $y_2 x_2$, $y_3 x_3$ i $y_4 x_4$. Koordinate se ispusuju jedna ispod druge, čime su determinante naznačene

Sa P_3 označićemo tačku koja leži desno, a sa P_4 koja leži levo od pravca $P_1 P_2$. Pravac $P_1 P_2$ obeležićemo sa $+ y'$, a njemu suprotan pravac $-y'$.

Na pravcu $P_1 P_2$ t. j. na $+ y'$ osi zamislićemo pomoćnu tačku M na odstojanju 1,00 od početka koordinatnog sistema. Njene koordinate su: a, o. Njih ćemo izračunati iz sličnosti trouglova $\triangle\ P_1 M M'$ i $\triangle\ P_1 P_2 P_2'$, kada prethodno izračunamo odstojanje P_2 od P_1, koje dobijamo iz obrasca:

$$\overline{P_1 P_2} = S = \sqrt{y_2^2 + x_2^2} \qquad \ldots\ldots 1$$

Iz proporcija:

$$a : y_2 = 1.00 : S \text{ i}$$

$$o : x_2 = 1.00 : S$$

dobijamo koordinate a i o pomoćne tačke M:

$$a = \frac{y_2}{S},\ o = \frac{x_2}{S} \qquad \ldots\ldots 2$$

Predznaci koordinata a i o se slažu sa predznacima redukovanih koordinata tačke P_2.

Dvostruku površinu trougla $\triangle\ P_1 P_3 P_4$, čije je jedno teme u početku koordinatnog sistema, napisana u obliku determinante drugog reda glasi:

$$2F = \begin{vmatrix} y_3 & x_3 \\ y_4 & x_4 \end{vmatrix} = y_3 x_4 - x_3 y_4 \qquad \ldots\ldots 3$$

Isto tako dvostruka površina $2F_1$ trougla $\triangle\ P_1 P_3 M$ je:

$$2F_1 = \begin{vmatrix} y_3 & x_3 \\ a & o \end{vmatrix} = o\, y_3 - a\, x_3$$

Dvostruka površina $2F_2$ trougla $\triangle\ P_1 M P_4$ je:

$$2F_2 = \begin{vmatrix} a & o \\ y_4 & x_4 \end{vmatrix} a\, x_4 - o\, y_4$$

Dvostruke površine $2F_1$ i $2F_2$ možemo izraziti produktom osnovice i visine. Visina trougla $\triangle\ P_1\ P_3\ M$ je h_1, trougla $\triangle\ P_1\ M\ P_4$ h_2. Osnovica im je zajednička : 1.00 (v. sl.).

$$2F_1 = 1.00 \cdot h_1$$

$$2F_2 = 1.00 \cdot h_2$$

Zamenom ovoga u gornje determinante imamo:

$$1{,}00 \cdot h_1 = \begin{vmatrix} y_3 & x_3 \\ a & o \end{vmatrix}$$

$$1{,}00 \cdot h_2 = \begin{vmatrix} a & o \\ y_4 & x_4 \end{vmatrix}$$

Odakle je:

$$h_1 = \begin{vmatrix} y_3 & x_3 \\ a & o \end{vmatrix} : 1{,}00 = o\, y_3 - a\, x_3 \qquad \ldots\ldots\ 4$$

$$h_2 = \begin{vmatrix} a & o \\ y_4 & x_4 \end{vmatrix} : 1{,}00 = a\, x_4 - o\, y_4 \qquad \ldots\ldots\ 5$$

Delenjem determinante sa 1,00 dobijamo h_1 i h_2 u dužinskoj jedinici, pošto same determinante pretstavljaju površine.

Odstojanje preseka R od P_1 označićemo sa $\overline{P_1 R} = r$.

Površina trougla $\triangle P_1 P_3 P_4$ može se izraziti zbirom površina trouglova $\triangle P_1 P_3 R$ i $\triangle P_1 R P_4$, čija je zajednička osnovica nepoznato r.

$$F = \frac{1}{2}\, r\, h_1 + \frac{1}{2}\, r\, h_2$$

$$2\,F = r\,(h_1 + h_2).$$

Odavde je

$$r = \frac{2\,F}{(h_1 + h_2)} \qquad \ldots\ldots\ 6$$

Ovim smo dobili udaljenost preseka R od P_1.

Iz sličnosti trouglova možemo napisati proporcije:

$$a : y_r = 1.00 : r$$

$$o : x_r = 1.00 : r$$

Iz gornjih proporcija redukovane koordinate $y_r\, x_r$ preseka R su:

$$y_r = a\, r \qquad \ldots\ldots\ 7$$

$$x_r = o\, r \qquad \ldots\ldots\ 8$$

Da smo redukovane koordinate preseka R dobro izračunali kontrola je:

Zbir dvostrukih površina $2 f_1$ i $2 f_2$ trouglova $\triangle P_1 P_3 R$ i $\triangle P_1 R P_4$ ravan je dvostrukoj površini $2 F$ trougla $\triangle P_1 P_3 P_4$ izračunatoj po obrascu pod 1.

Dvostruka površina trougla $\triangle P_1 P_3 R$ je

$$2\, f_1 = \begin{vmatrix} y_3 & x_3 \\ y_r & x_r \end{vmatrix} = y_3\, x_r - x_3\, y_r \qquad \ldots\ldots\ 9$$

a trougla $\triangle P_1 R P_4$:

$$2 f_2 = \begin{vmatrix} y_r & x_r \\ y_4 & x_4 \end{vmatrix} = y_r x_4 - x_r y_4 \quad \ldots\ldots\; 10$$

te je obrazac za kontrolu:

$$2 f_1 + 2 f_2 = 2 F$$

Zbrajanjem redukovanih koordinata $y_r\, x_r$ preseka R sa neredukovanim koordinatama tačke P_1 imamo neredukovane koordinate preseka R:

$$Y_R = Y_1 + y_r$$
$$X_A = X_1 + x_r$$

Na isti način možemo da izračunamo koordinate preseka kad jedna prava seče više pravih. U tom slučaju možemo da iskoristimo koordinate iste pomoćne tačke M za sve preseke.

Ako se presek nalazi na negativnom kraku ose $-y'$ postup je isti, samo što će visine h_1 i h_2 a prema tome i r imati negativne predznake, što je znak da se presek nalazi na negativnom kraku pravca $P_1 P_2$.

Ako je prava $P_3 P_4$ poligonska strana pa je potrebno da se presek R na licu mesta obeleži, iz koordinata P_3, R i P_4 izračunaćemo dužine $P_3 R = s_1$, $R P_4 = s_2$ i $P_3 P_4$. Zbir $(s_1 + s_2)$ treba da se slaže sa dužinom poilggnske strane $P_3 P_4$, što je kontrola da su koordinate preseka R dobre. Na licu mesta dužina $P_3 P_4$ malo će se razlikovati od računate dužine. Zato ćemo prvo iz P_3 odmeriti s_1, a potom iz P_4 s_2. Ako kraj dužine s_1 ne padne ujedno sa krajem dužine s_2, razliku ćemo podeliti srazmerno njihovim dužinama i onda obeležiti presek R.

Primer (v. Formular R).

Prava $P_1 P_2$ seče dve druge prave u tačkama R_1 i R_2. Koordinate točaka P_1, P_2, P_3 i P_4 unesene su u 3. i 4. kolonu formulara. Sa P_3 i P_4 obeležili smo tačke koje leže na one dve prave, koje prava $P_1 P_2$ seče.

Prvo ćemo izračunati koordinate preseka R_1 pod red. br. 1. formulara. Koordinatni početak premestićemo u tačku P_1, tako što ćemo oduzeti koordinate tačke P_1 od koordinata tačaka P_2, P_3 i P_4 i te redukovane koordinate upisati u kolone 5. i 6. U tim kolonama će biti naznačene sve determinante koje ćemo rešavati. Koordinate tačke P_2 ćemo podvući.

Po obrascu pod 1. izračunaćemo u koloni 7. dužinu $S = P_1 P_2$. Koordinate a i o pomoćne tačke M izračunaćemo po obrascima pod 2.:

$$a = \frac{y_2}{S} = \frac{751{,}91}{1362{,}60} = 0{,}551\,82$$

$$o = \frac{x_2}{S} = \frac{1136{,}36}{1362{,}60} = 0{,}833\,96$$

Ove vrednosti unosimo u četvrti red kolona 5. i 6.

Dvostruku površinu trougla $\triangle P_1 P_3 P_4$ izračunaćemo iz koordinata u kolonama 5. i 6. po obrascu pod 3. i unesti u prva tri reda kolone 9.

Visine h_1 i h_2 trouglova $\triangle P_1 P_3 M$ i $\triangle P_1 M P_4$ izračunaćemo po obrascima 4. i 5. i uneti u kolonu 8.

Zbir $(h_1 + h_2)$ pišemo u 4. red kolone 9. U istu kolonu pišemo i količnik $r = \dfrac{2F}{h_1 + h_2}$, a to je odstojanje preseka R od P_1.

KOORDINATE PRESEKA DVE PRAVE

OBRAZAC R

$y_r = a \cdot r$, $x_r = o \cdot r$; $Y_R = Y_1 + y_r$, $X_R = X_1 + x_r$

$S = \sqrt{y_2^2 + x_2^2}$; $a = y_2 : S$; $o = x_2 : S$

$2F = \begin{vmatrix} y_3 & x_3 \\ y_4 & x_4 \end{vmatrix}$

$h_1 = \begin{vmatrix} y_3 & x_3 \\ a & o \end{vmatrix} : 1{,}00$; $h_2 = \begin{vmatrix} a & o \\ y_4 & x_4 \end{vmatrix} : 1{,}00$

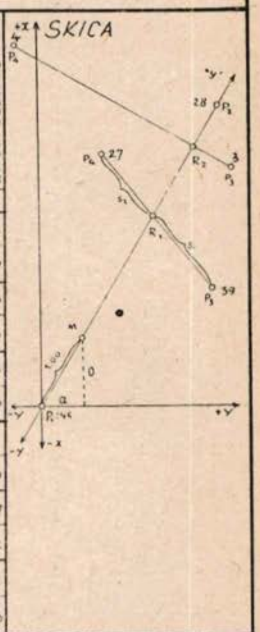
$r = \dfrac{2F}{h_1 + h_2}$

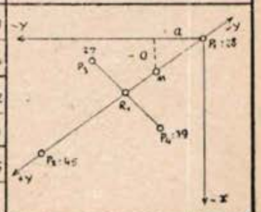
$2f_1 = \begin{vmatrix} y_3 & x_3 \\ y_r & x_r \end{vmatrix}$; $2f_2 = \begin{vmatrix} y_r & x_r \\ y_4 & x_4 \end{vmatrix}$; $2f_1 + 2f_2 = 2F$ (Kao kontrola)

$r = \overline{P_1R}$

Red. Br. preseka	Red. Br. tačke	±	Y_n	devet ostatak	±	X_n	devet ostatak	±	$Y_n - Y_1 =$ y_n	devet ostatak	±	$X_n - X_1 =$ x_n	devet ostatak	y_2^2 / x_2^2 / $y_2^2 + x_2^2 = S^2$ / S	devet ostatak	±	$o \cdot y_3 - a \cdot x_3$ / $a \cdot x_4 - o \cdot y_4$ / h_1 / h_2	devet ostatak	±	$y_3 \cdot x_4 - x_3 \cdot y_4$ / $2F$ / $h_1 + h_2$ / r / $2F$	devet ostatak	±	$y_3 \cdot x_r - x_3 \cdot y_r$ / $y_r \cdot x_4 - x_r \cdot y_4$ / $2f_1$ / $2f_2$	devet ostatak
1	2		3			4			5			6		7			8			9			10	
1.	P1:45	+	9 893.02	4	+	17 395.23	3		0.00			0.00		565 368.65	8	+	579.57	6	+	784 915	7	+	502 185	3
	P2:28	+	10 644.93	0	+	18 531.59	5	+	751.91	5	+	1136.36	2	1 291 314.05	8	−	255,00	3	−	64 481	5	−	202 148	7
	P3:39	+	10 587.98	2	+	17 857.33	7	+	694.96	4	+	462.10	4	1 856 682,70	7	+	623.25	0	+	720 434	2	+	540 030	3
	M		—			—		+	0,551 82	3	+	0.83 396	2	1 362.60	0	−	116.37	0	+	831,45	3	−	100 833	6
	R1	+	10 371.16	1	+	18 117.84	3	+	478.14	6	+	722,61	0			+	324,57	3	+	866,48	5	+	281 237	5
	P4:27	+	10 032.56	8	+	18 524,67	6	+	139.54	4	+	1129.44	3			+	506,88	0		720 434	2	+	439 197	6
2.	P1:45		kao gore													+	792.26	8	+	1 300 000	7	+	976 942	1
	P2:28															−	496 64	2	+	90 000	0	−	612 405	0
	P3:3	+	10 843,02	0	+	18 295,23	3	+	950,00	5	+	900,00	0			+	772 55	8	+	1 420 000	7	+	952 630	7
	M		—			—		+	0.55182	3	+	0,83396	2			+	83.40	6	+	1151,57	7	+	102 836	2
	R2	+	10 573,47	0	+	18 423,59	5	+	680,45	5	+	1028,36	2			+	295,62	6	+	1233,10	1	+	364 537	1
	P4:4	+	9 793,02	3	+	18 795,23	8	−	100,00	1	+	1 400,00	5			+	855,95	5	+	1 420 003	1	+	1 055 466	0
3.	P1:28	+	10 644,93	0	+	18 531,59	5		0,00			0,00		565 368,65	8	+	510.69	3	+	412 897	4	+	253 368	0
	P2:45	+	9 893,02	4	+	17 395,23	3	−	751,91	5	−	1136,36	2	1 291 314,05	8	−	3.82	4	−	394	7	−	1 894	4
	P3:27	+	10 032,56	8	+	18 524,67	6	−	612,37	1	−	6,92	8	1 856 682,70	7	+	372,06	0	+	412 503	6	+	184 592	2
	M		—			—		−	0,55182	3	−	0,83396	2	1362,60	0	−	47,49	6	+	831,44	2	−	23 563	1
	R1	+	10 371,16	1	+	18 117,84	3	−	273,77	8	−	413,75	2			+	506,87	8	+	496,13	5	+	251 474	5
	P4:39	+	10 587,98	2	+	17 857,33	7	−	56,95	7	−	674,26	7			+	324,57	3	+	412 503	6	+	161 029	1

SKICA





Redukovane koordinate preseka R_1 dobijamo po obrascima 7. i 8. i unosimo ih u peti red kolona 5. i 6.

Da smo redukovane koordinate preseka R dobro izračunali izračunaćemo dvostruke površine trouglova $\triangle P_1 P_3 R$ i $\triangle P_1 R P_4$ po obrascima 9. i 10. i uneti u kolonu 10. Zbir $2f_1 + 2f_2$ treba da se slaže sa $2F$ iz trećeg reda kolone 9 i unećemo ga u 6. red kolone 9. Malo odstupanje koje dolazi od zaokrugljivanja brojeva je bez značaja.

Kad redukovanim koordinatama preseka R_1 dodamo neredukovane koordinate tačke P_1 dobijemo konačne koordinate preseka R_1 po obrascima 11. i 12.

$$Y_R = Y_1 + y_r = 9\,893{,}02 + 478{,}14 = 10\,371{,}16$$
$$X_R = X_1 + x_r = 17\,395{,}25 + 722{,}61 = 18\,117{,}84$$

Ove su vrednosti unesene u peti red kolona 3. i 4.

Računanje koordinata preseka R_2 izvedeno je pod red. br. 2 formulara. U ovom slučaju otpada računanje za S, a i o, jer je isto kao pod red. br. 1. Koordinate tačaka P_1 i P_2 ne moramo još jednom upisivati, jer su iste kao pod red. br. 1. Kod ovog slučaja tačka P_4 se nalazi u IV. kvadrantu (posle pomeranja koordinatnog sistema), zato ima negativnu ($-y_4$) ordinatu) što se mora imati u vidu kod rešavanja determinante (zbog predznaka).

Pod red. brojem 3. još jednom smo izračunali koordinate preseka R_1 iz red. br. 1. Kod prvog računanja preseka R_1 pod red. br. 1. Koordinatni početak smo premestili u tačku br. 45 (P_1), a tačku br. 28 smo označili sa P_2. Kod ovog slučaja koordinatni početak smo premestili u tačku 28, a tačku br. 45 označili smo sa P_2. Isto tako oznake P_3 i P_4 su promenile mesto.

Koordinate preseka R_1 su iste kao pod red. br. 1.

Primer pod red. br. 1. uzeo sam iz knjige »Dr. F. G. Gausz: Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmeszpunst« iz 1906. god., gde je isti primer izračunat drugim metodama na dva načina (str. 113 i 114).

Po jednom načinu koordinate za R_{1u}	: $y = 10\,371{,}16$, $x = 18\,117{,}83$,
po drugom	: $y = 10\,371{,}15$, $x = 18\,117{,}84$.
Po našem načinu	: $y = 10\,371{,}16$, $x = 18\,117{,}84$.

Kao što se vidi rezultat se slaže.

Ako determinante računamo mašinom za računanje ne moramo sve produkte upisivati u formular, već samo njihove zbirove i diferencije, koje dobijamo u rezultatu mašine za računanje. Tako ubacujući u mašinu potrebne faktore u rezultatu mašine dobijamo : S^2, h_1, h_2, $2\,F$, $2f_1$, $2f_2$. Na taj način ćemo brže doći do rezultata.