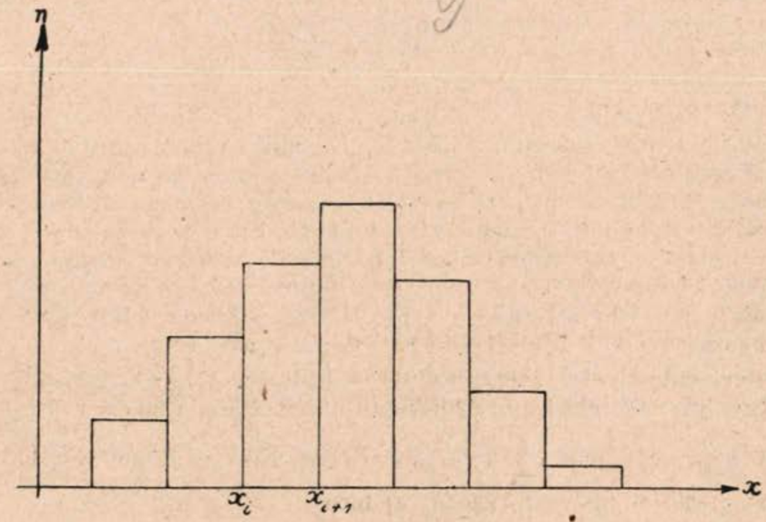
Ing. Abdulah Muminagić — Beograd

Anrijev pravac i Pirsonov kriterij u primeni na ocenu naše triangulacije I reda

Neka treba da ispitamo neku pojavu čiji nam je zakon raspodele poznat, tj. neka smo dobili zadatak da utvrdimo da li se ta pojava pokorava svom zakonu raspodele.

Na primer, imamo niz slučajeva iste pojave definisanih njihovim jedinicama mere. Grupišimo te slučajeve u jednake intervale, sračunajmo, na osnovu poznatog zakona raspodele, koliko slučajeva pada u svaki interval i nanesimo te intervale sukcesivno po meri porasta njihove apsolutne vrednosti na apscisnu os. Na ordinatnu os nanesimo broj slučajeva n' u datom intervalu. Dobićemo histogram koji će reprezentovati dati zakon raspodele. Smatrajući da je svaki interval $\varepsilon\,[x_i, x_{i-1}]$ beskonačno malen i da je prema tome verovatnoća unutar njega konstantna, za svako $x_i < x < x_{i+1}$ može da se sračuna na osnovu poznatog zakona raspodele odgovarajuće q'-broj povoljnih slučajeva date pojave. Ako je ukupan broj slučajeva N onda je verovatnoća (teoretska):

$$P = \frac{q'}{N}.$$



Sl. 1.

Stvarna, opažana učestalost neka je q. Općenito da bi se proučila zakonomernost opažane pojave treba naći razliku $q' - q$ i utvrditi, da li se ona kreće u dozvoljenim granicama normalnog kolebanja učestalosti oko njene verovatne vrednosti, dobijene na osnovu zakona raspodele.

Za rešenje ovog zadatka postoje različite metode. Izabrao sam ove dve, obzirom da su u našoj geodetskoj literaturi malo obrađene, a nisu bez interesa. Jedna je grafička, druga numerička.

1. — Anrijev pravac

Ovaj metod uveo je prof. artiljeriske aplikacione škole u Fonteneblo-u (Fontainebleau) pukovnik Anri (Henry). Može da se primeni u svakom slučaju kada se želi ispitati, da li se neki niz opažanja pokorava datom zakonu. Nas naravno ovdje interesuje ispitivanje geodetskih merenja — da li se ona pokoravaju Gaus-ovom zakonu verovatnoće, tj. da li se raspodela njihovih grešaka pokorava ovom zakonu.

Značaj metode je u tome, što se poznata Gaus-ova krivulja raspodele grešaka, koja je teška za konstruisanje, zamenjuje pravcem. Bazira se takođe na poznatoj Gaus-ovoj formuli:

$$P\begin{pmatrix} n \cdot m \\ o \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{\Pi}} \left(n - \frac{n^3}{6} + \frac{n^5}{40} - \frac{n^7}{336} + \frac{n^9}{3\,456} - \dots \right) \tag{1}$$

gde n ima značenje $\frac{a}{m}$, a — granica intervala (druga granica je nula), a m — srednja kvadratna greška. Prema tome n je interval za koji se traži verovatnoća P da će se u njemu pojaviti data greška, izražen u srednjoj kvadratnoj grešci kao jedinici. Ili, ova formula nam daje teoretsku verovatnoću da će se greška pojaviti u intervalu $\varepsilon\,[o,\ n \cdot m]$.

Na osnovu (1) Jordan je izradio dateljnu tablicu verovatnoća (vidi Jordan — Eggert: HVK, I knjiga, prilog [21] — Pojava greške između nule i n-tostruke srednje kvadratne greške). Po podacima iz te tabele, nanoseći na apscisnu os vrednosti intervala, a na ordinatnu njenu verovatnoću, dobija se poznata Gaus-ova krivulja raspodele slučajnih grešaka.

Pukovnik Anri uzima isto koordinatni sistem pa na apscisnu os nanosi aritmetičku progresiju a, $2a$, $3a$, $4a$, ... a na ordinatnu takođe aritmetičku progresiju koja ima značeenje celih n ili okruglih delova od njih u ma kojoj razmeri. Pored vrednosti za n s druge strane ordinatne osi upisuje se teoretska verovatnoća P, uzeta iz pomenute tablice za datu vrednost n. Na ovaj način postiže se, prvo, teoretska razmera za verovatnoću u svakom intervalu za n odvojeno i, drugo, ta razmera se od intervala do intervala menja tako da je njen metrički izraz za jednake intervale n jednak. Ako bi sa ovakvom razmerom nanosili teoretske podatke za verovatnoću, ne bismo dobili Gaus-ovu krivulju, nego pravac koji prolazi kroz koordinatni početak.

Uzmimo sada stvarna merenja koja se ispituju. Za svaki interval od 0 do $i \cdot a$ sračunajmo učestalost promenljive, (u našem slučaju opažane greške). Ona je jednaka $\frac{q_i}{N}$, gde je q_i — broj opažanih grešaka u datom intervalu i. Za učestalost greške u intervalu $\varepsilon\,[o,\ i \cdot a]$ biće:

$$U_o^{i \cdot a} = \frac{\sum_1^i q_i}{N} = \frac{q_1 + q_2 + \ldots + q_i}{N},$$

gde je q_i ukupan broj grešaka u intervalu i (pozitivnih i negativnih).

Na osnovu Bernuli-jeve teoreme velikih brojeva znamo, da bi, ako se merenja pokoravaju Gaus-ovom zakonu, učestalosti grešaka bile jednake njihovim verovatnoćama. To će reći, kada bi učestalosti naneli na ordinate u razmeri ustanovljenoj za verovatnoću na gore objašnjeni način, onda bi se sve ordinate nalazile na istoj pravoj koja prolazi kroz koordinatni početak.

Ako se raspodela grešaka merenja ne pokorava tačno Gaus-ovu zakonu, na ovaj način nanete tačke nalaziće se na nekoj krivoj, koja će se, ako su greške slučajnog karaktera, moći aproksimirati pravcem. Ako su greške sistematske, krivulja će se konstantno otklanjati od pravca, divergiraće, tj. njen prvi izvod će se u uzastopnim tačkama ili stalno povećavati ili stalno smanjivati.

U prvom slučaju kažemo da se radi o normalnoj fluktuaciji slučajnih grešaka, pa se onda merenja mogu smatrati normalnim tj. da se pokoravaju Gausovu zakonu raspodele. U drugom slučaju — da se ne pokoravaju ovom zakonu.

Dalje, na ovaj način vrlo lako dobijamo srednju kvadratnu grešku merenja. Znamo da ordinate imaju značenje $n = \frac{a}{m}$. Za značnje $n = 1$, $a = m$. To znači, ako na pravcu, kojim se definišu stvarna merenja, uzmemo tačku sa ordinatom 1, presek njene ordinate sa apscisnom osom daće nam odmah srednju kvadratnu grešku merenja.

Dakle, pored izvanredne elegancije, duhovitosti i jednostavnosti kojom osvaja ovaj metod, on ne samo omogućava ocjenu, da li se neka merenja pokoravaju zakonu slučaja, nego se pomoću njega može izvršiti i očigledna ocena njihove tačnosti, bez kvadriranja, sabiranja, delenja, korenovanja itd. Dalje, pomoću njega možemo uporediti slična merenja. Ako ih obradimo na gornji način i u istoj razmeri — položeniji pravac će se odnositi na manje tačna merenja.

Zatim, ovim načinom se može oceniti homogenost merenja. Velika otstupanja od reprezentativnog pravca ukazuju na njihovu nehomogenost.

Kao primer uzećemo našu mrežu triangulacije I reda. Za njenu ocenu posmatraćemo greške zatvaranja trouglova. Ujedno ćemo j uporediti sa novom francuskom triangulacijom.

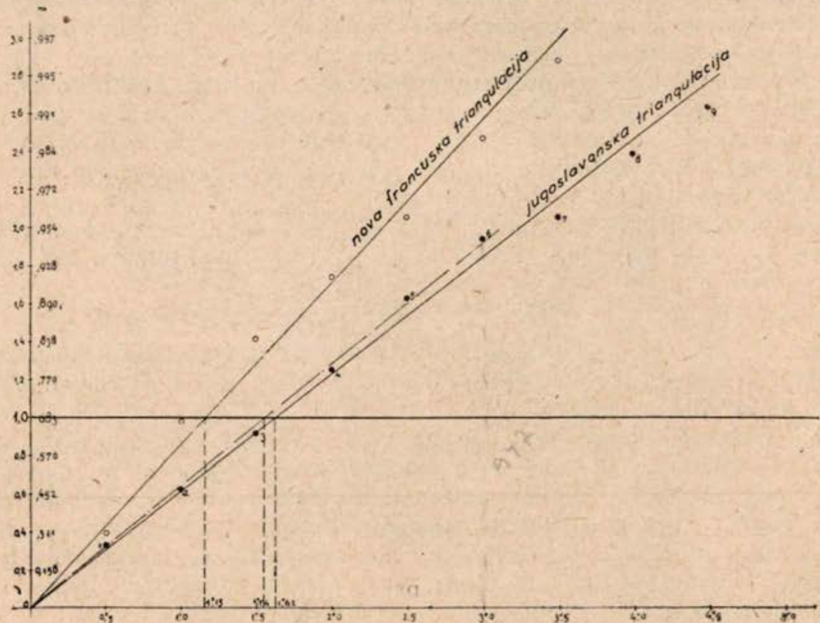
Podaci za našu triangulaciju:

Intervali	0",5	1",0	1",5	2"0	2",5	3",0	3",5	4",0	4",5	5",0
$q_i =$	161	128	106	96	62	32	14	8	5	5
$\sum_1^i q_i =$	161	289	395	491	553	585	599	607	612	617
$U_o^{i \cdot a} = \frac{\sum_1^i q_i}{N} =$	0,261	0,468	0,640	0,795	0,895	0,947	0,960	0,984	0,992	1,00

N = 617

Podaci za novu francusku triangulaciju:

$q_i =$	251	206	110	53	28	19	6	3		
$\sum_1^i q_i =$	251	457	567	620	648	667	673	676		
$U_0^{i \cdot a} = \frac{\sum_1^i q_i}{N} =$	0,372	0,676	0,840	0,918	0,959	0,987	0,996	1,00		



Sl. 2.

Na ordinatnoj osi ispišemo intervale n i pored njih, iz Jordanove tablice, njihove teoretske verovatnoće, a na apscisnoj osi intervale u kojima se pojavljuju opažane greške. Učestalost $U_0^{i \cdot a}$ iz prednje tablice nanosimo u razmeri verovatnoće. Dobićemo niz tačaka 1, 2, 3, ... 10. Vidimo da se greške zatvaranja trouglova do 3″ u našoj mreži gotovo idealno pokoravaju Gaus-ovu Zakonu. Preko 3″ nastaje skok, kao neki prekid krivulje, ili paralelno pomeranje pravca. To nam ukazuje na to, da trouglovi sa otstupanjem od 3″ nisu homogeni sa ostalom mrežom, da verovatno nisu opažani pod istim uslovima, ili je signalizacija bila loša, ili su opažali neiskusni opažači. Svakako bi te trouglove trebalo ponovo opažati. Osobito ako su grupisani u istom otseku mreže.

Kao što se vidi srednja kvadratna greška je 1″,54 kada bi uzeli samo grešaka. Neka je n_t teoretski broj slučajeva u svakoj grupi računato po

Nova francuska triangulacija daje strmiji pravac, te su opažanja, uzeta u celini, tačnija, što se vidi iz srednje kvadratne greške (1″,15). Ali su i otstupanja od pravca veća, što ipak ukazuje na bolju homogenost naše mreže.

2. — Pirsonov kriterij

Ovaj metod nam omogućava da brojno odredimo meru pokoravanja ili nepokoravanja raspodele grešaka merenja Gausovu zakonu. Da bi se to moglo učiniti svakako je potrebno da se i odstupanja od ovog zakona pokoravaju nekom zakonu. Treba odrediti prirodu toga zakona i verovatnoću da će se dato otstupanje pojaviti u određenoj grupi. Sasvim je razumljivo da će se kod ispravnih opažanja i ova otstupanja pokoravati takođe Gaus-ovu zakonu, jer će i to biti slučajne veličine.

Neka imamo neka opažanja. Podelimo ih u grupe po veličinama njihovih grešaka. Neka je n_t teoretski broj slučajeva u svakoj grupi računato po Gausov-u zakonu, određen na način upotrebljeni kod Anrijeva pravca, a n_o — učestalost, tj. opažani broj slučajeva u svakoj od tih grupa.

Pirson je uočio da je zgodno posmatrati, kako se ponaša veličina

$$\sum_{1}^{s'} \frac{(n_o - n_t)^2}{n_t} = \varkappa^2,$$

gde je s' broj nezavisnih grupa na koje smo podelili naša opažanja. Ustanovio je da se zakon verovatnoće veličine $\varkappa^2$ izražava formulom:

$$P(\varkappa) = \frac{\int_{-\infty}^{\varkappa} \varkappa^{s'-1} \cdot e^{-\frac{\varkappa^2}{2}} \, d\varkappa}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varkappa^{s'-1} \cdot e^{-\frac{\varkappa^2}{2}} \, d\varkappa}$$

što jasno napominje Gaus-Laplasov zakon. Na osnovu ove formule Pirson je izradio tablicu verovatnoće u kojoj kao argumenti služe s' i $\varkappa^2$. Izvod iz te tablice dat je niže:

s' \ P	0,99	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05
12	3,571	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026
13	4,107	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362
14	4,660	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685
15	5,229	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996
16	5,812	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296
17	6,408	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587
18	7,015	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869
19	7,633	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144

Opažanja prvo delimo na s grupa, ali kao argumenat u tablicama ne služi s nego $s' < s$, jer su n_o i n_t međusobno povezani izvesnim odnosima, tako da svih s grupa nisu međusobno zavisne. A podvučeno je da Pirsonova pretpostavka polazi od nezavisnog broja grupa. Zbilja, između n_o i n_t imamo logičnu vezu $\Sigma n_o = \Sigma n_t$. Odavde uvek možemo sračunati n u jednoj grupi, ako su ostali poznati. Tj. u ovom slučaju $s' = s - 1$. Sa ovom vrednošću se i ulazi u Pirsonove tablice. Općenito, ako su n_o i n_t povezani sa u uslova, $s' = s - u$.

Što se po ovim tablicama za neke eksperimentalne radove dobija veća vrednost $P(\varkappa)$, kažemo da se oni bolje pokoravaju svom teoretskom zakonu.

Kada $P(\varkappa)$ padne ispod neke usvojene granice, kažemo da je saglasnost prakse sa teorijom vrlo slaba (kao granica se obično uzima 5%).

Treba naglasiti da ovaj metod nije sasvim strog i daje dobre rezultate samo u očiglednim slučajevima. Ipak njegovu korisnost za primenu ne treba umanjivati, jer daje meru za upoređenje i objektivnu ocenu makar i očiglednih radova.

Primer:

Uzmimo opet našu mrežu. Raspored grešaka zatvaranja V_Δ po grupama dat je niže. Izračunajmo njihov teoretski raspored po intervalima $\varepsilon\,[o, i \cdot 0''5]$. Intervale izrazimo u srednjoj kvadratnoj grešci $m = 1'',54$. Iz pomenute Jordanove tablice vadimo $P(_o^{n \cdot m})$ za dato n, a $n_t = N \cdot P(_o^{n \cdot m})$, gdje je N ukupan broj opažanja (617). Ostalo se vidi iz tabele.

$V_\Delta =$	0″	0″,5	1″,0	1″,5	2″,0	2″,5	3″,0	3″,5	4″,0	5″,0
$n = \frac{V_\Delta}{m} =$	0	0,325	0,650	0,974	1,299	1,624	1,949	2,275	2,599	2,921
$P\left(_o^{n \cdot m}\right) =$	0	0,255	0,484	0,670	0,806	0,897	0,948	0,977	0,991	1,000
$2n_t = N \cdot P\left(_o^{n \cdot m}\right)$	0	157	298	413	496	553	585	602	611	617
$\Delta 2n_t$		157	141	115	83	57	32	17	9	6

Treba napomenuti da vrednosti dobijene u gornjoj tablici ulaze u dalje računanje prepolovljenje, jer Gaus-ov zakon predviđa podjednak broj pozitivnih i negativnih grešaka, a formula kojom se izražava taj zakon daje, kao što znamo, njihov ukupan broj. Osim toga sva računanja za ocenu tačnosti vrše se iz pojedinačnih grešaka otstupanja, pa to moramo primeniti i ovde. Tako imamo:

$V_{\Delta i}$	n_o +	n_o —	n_t	$n_o - n_t$ +	$n_o - n_t$ —	$(n_o - n_t)^2$ +	$\frac{(n_o - n_t)^2}{+n_t}$	$(n_o - n_t)^2$ —	$\frac{(n_o - n_t)^2}{n_t}$ —
0″,0	78	83	78	0	+ 5	0	0,000	25	0,321
0″,5	72	56	71	+ 1	— 15	1	0,014	225	3,165
1″,0	50	56	58	— 8	— 2	64	1,104	4	0,069
1″,5	48	48	42	+ 6	+ 6	36	0,858	36	0,858
2″,0	31	312	28	+ 3	+ 3	9	0,321	9	0,321
2″,5	16	16	16	0	0	0	0,000	0	0,000
3″,0	7	7	8	— 1	— 1	1	0,125	1	0,125
3″,5	2	6	4	— 2	+ 2	4	1,000	4	1,000
4″,0	6	4	3	+ 3	+ 1	9	3,000	1	0,333
5″,0									
	310	307	308				6,422		6,192

Da bi smo odredili s' rezonujemo ovako: merenja smo podelili u $s = 18$ grupa. Ove grupe povezane uslovom $\Sigma n_o = \Sigma n_t$. Osim toga su n_o i n_t povezane veličinom srednje kvadratne greške, koju smo odredili iz opažanja (1″,54), a ona ulazi u račun za određivanje n_t. Prema tome n_o i n_t su povezani sa dva uslova. Onda je $s' = s - u = 18 - 2 = 16$.

Sada u redu 16 u tablicama za Pirsonov kriterij tražimo veličinu $\varkappa^2 = 12,614$. Nalazimo da je $P \approx 0,70$, ili da se raspodela grešaka zatvaranja trouglova u našoj mreži I reda pokorava Gaus-ovu zakonu sa 70%. Kako je donja granica za prihvatanje rezultata kao povoljnih 5%, možemo zaključiti da su naša opažnja vrlo dobra. (Nova francuska triangulacija daje 13%).

Posmatrajući tablicu za računanje $\varkappa^2$, vidimo da greške iznad 3″,5 čine skoro polovicu veličina za određivanje $\varkappa^2$. To znači opet da one kvare merenja i da ih treba ponovo opažati. Time bi se: prvo smanjila srednja kvadratna greška, što bi izazvalo novu raspodelu n_t; drugo, verovatno bi se poboljšao raspored n_o i procenat slaganja sa zakonom verovatnoće sigurno bi bio povoljniji.

RÉSUMÉ. — Dans l'article ci-dessus deux procédés connus d'évaluation de precision sont exposés appliqués sur notre triangulation de I. ordre.