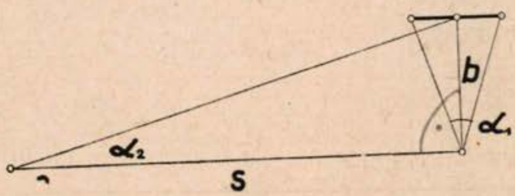
Dr. Nikola Neidhardt — Zagreb

Dužina stranice i dužina pomoćne baze u paralaktičnoj poligonometriji

U broju 9—10 Geodetskog Lista iz 1956 štampan je originalan i interesantan članak Ing. A. Zlatkovića »Odnos dužine strane prema dužini pomoćne baze u paralaktičnoj poligonometriji«.

Širina ulice kod gradske izmjere katkada uslovi dužinu pomoćne baze b. Autor se u vezi toga pita, ako se želi postići odgovarajuća relativna točnost



Sl. 1.

mjerene strane S (sl. 1), koliko dugačka ta strana treba da bude za određenu dužinu pomoćne baze b. Uz pretpostavku, da je baza b na kraju strane S i i okomita na nju te da se paralaktički kutevi mjere jednakom točnošću t. j. da je srednja pogreška m_1 paralaktičkog kuta α_1 ista kao i srednja pogreška m_2 paralaktičkog kuta α_2, za odnos S i b izvodi formulu:

$$S = \frac{b}{2} \sqrt{K - b^2} \quad (1)$$

gdje je:

$$K = \frac{4\,\varrho^2}{m_2^2} \left(\frac{m_s}{S} \right)^2$$

a m_s srednja pogreška u dužini strane S.

Na osnovu formule (1) za slučaj $m_1 = m_2 = 0''5$ i $m_s : S = 1 : 25000$ konstruira grafikon (krivulju, krivu), pomoću koje se može očitati, koliki određenom b odgovara S.

Članak završuje riječima: »Ako prilikom merenja poligonske strane uvek vodimo računa o tome, da veličine strana i osnovice budu u odnosu koji daje gornja kriva, cela mreža će imati homogenu tačnost t. j. svaka strana će biti izmerena sa približno istom relativnom tačnošću. Znači da ako pri merenju jedne strane imamo mogućnosti da uzmemo dužu osnovicu, nećemo to učiniti, već ćemo uzeti onu njenu dužinu, koju nam daje

$$S = \frac{b}{2}\sqrt{K - b^2}.$$

Na taj način postižemo homogenu tačnost poligonometrijske mreže i pravilnu raspodelu grešaka posle izravnanja«.

Neka je na pr. oblik neke ulice takav, da S može biti baš samo određena dužina, ali b da može biti i duži nego li odgovara prikazanoj formuli. Po autoru spomenutog članka u takvom slučaju ne treba uzeti pomoćnu bazu veću nego li odgovara formula. Dakle, da ne bi trebalo uzeti veću pomoćnu bazu ni u slučaju, kad bi takova veća baza — uz isti utrošak truda, novca i energije — i povećala točnost mjerene stranice S? Ili, u težnji, da sve stranice mreže budu približno jednakom relativnom točnošću izmjerene, da li je baš opravdano eventualno i manje točno mjeriti one stranice, koje se bez poteškoća mogu mjeriti i točnije?

Pokušati ću na ta pitanja odgovoriti i nešto nadopuniti primjenu formule i krivulje Ing. Zlatkovića.

Upotrebit ću slijedeće aproksimacije:

$$b = l \cdot \frac{\varrho}{a_1} \quad \text{i} \quad \boxed{S = b\,\frac{\varrho}{a_2} = l\,\frac{\varrho^2}{a_1 a_2}} \qquad (2)$$

Premda su to samo aproksimacije, za dobivanje glavne slike mogu da posluže.

Uzmimo l u formuli (2) konstantnim, a a_1 i a_2 promjenljivima. Diferenciranjem se dobiva:

$$dS = -\frac{d a_2}{a_1 a_2^2}\, l\,\varrho^2 - \frac{d a_1}{a_1^2 a_2}\, l\,\varrho^2$$

$$dS = -\frac{d a_2}{a_2}\, S - \frac{d a_1}{a_1}\, S$$

$$\frac{dS}{S} = -\frac{d a_1}{a_1} - \frac{d a_2}{a_2} \qquad (3)$$

Relativna pogreška tražene stranice S jednaka je z b r o j u relativnih pogrešaka obaju paralaktičkih kuteva.

Posve analogno je na pr. relativna pogreška površine P nekog pravokutnika jednako zbroju relativnih pogrešaka pojedinih njegovih stranica a i b t. j. ako je:

$$P = a \cdot b$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b}$$

Ako iz diferencijala u formuli (3) prijeđemo na srednje pogreške, dobivamo:

$$\frac{m_S^2}{S^2} = \frac{m_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{m_2^2}{\alpha_2^2}$$

$$\frac{m_S}{S} = \sqrt{\left(\frac{m_1}{\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{\alpha_2}\right)^2} \tag{4}$$

Relativna pogreška mjerene stranice to je manja, što su paralaktički kutevi veći a njihove pogreške manje, odnosno, što manje su r e l a t i v n e p o g r e š k e tih paralaktičkih kuteva t. j. što manji su iznosi m_1/α_1 i m_2/α_2.

Opravdana je težnja za što manjim srednjim pogreškama m_1 i m_2, ali još opravdanija u konkretnom slučaju za manjim omjerima $m_1 : \alpha_1$ i $m_2 : \alpha_2$. T. j. po mogućnosti bi trebalo m a n j e p a r a l a k t i č k e k u t e v e m j e r i t i t o č n i j e n e g o l i v e ć e.

Ovo je opet analogno kao kod mjerenja širine i dužine pravokutnika za dobivanje njegove površine. Manju dimenziju t. j. širinu pravokutnika trebalo bi proporcionalno točnije mjeriti nego li veću dimenziju (dužinu), jer je kod pravokutnika:

$$dP = a \cdot db + b \cdot da$$

t. j. pogreška (diferencijalna promjena db) kraće dimenzije (širine b) množi se s većom dimenzijom a i tako djeluje na pogrešku dP površine P.

Kad bismo mjerenja mogli vršiti s razmjerno većim srednjim pogreškama m_1 i m_2 a ipak dobivati dovoljno točne rezultate za traženu stranicu, svakako bi to bilo povoljno. Po formuli (4) može se to postići tako, da se povećaju paralaktički kutevi.

Paralaktički kut α_2 povećaje se s povećanjem pomoćne baze b. Ali istovremeno se smanjuje paralaktički kut α_1. Povećanje pomoćne baze djeluje dakle s jedne strane povoljno a sa druge nepovoljno. To je kao prelijevanje točnosti s jedne strane u drugu, iz čaše u čašu. A gdje je teoretski najpovoljniji odnos?

Opet uzmimo analogiju s pravokutnikom. Formula (4) daje kao neku dijagonalu pravokutnika, kome je jedna stranica $\frac{m_1}{\alpha_1}$, druga $\frac{m_2}{\alpha_2}$. Želimo da stranice budu uglavnom što veće, a dijagonala što manja. Uzmimo, da su stranice a i b, a dijagonala c. Pita se, za $a + b = k$ = konstantno, kada je dijagonala c u minimumu. Uvrsti li se $a = k - b$ u formulu za dijagonalu pravokutnika:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

dobiva se:

$$c^2 = (k - b)^2 + b^2$$

Derivacija po b daje:

$$-2k + 4b$$

Minimum nastupa, kad je to nula, dakle:

$$-k + 2b = 0$$

$$b = \frac{k}{2} = \frac{a + b}{2}$$

$$b = a$$

Minimum dužine rezultante nastupa, kad su komponente a i b međusobno jednake.

Primijenimo to na formulu (4). Dobivamo kao razmjerno najpovoljnije, kad je:

$$\frac{m_1}{\alpha_1} = \frac{m_2}{\alpha_2}$$

t. j. kad se paralaktički kutevi mjere s i s t o m relativnom točnošću. Ili u formuli (3), kad je:

$$\frac{d\alpha_1}{\alpha_1} = \frac{d\alpha_2}{\alpha_2}$$

Pošto je približno:

$$\alpha_1 = \frac{l}{b} \quad \text{i} \quad \alpha_2 = \frac{b}{S}$$

izlazi:

$$\frac{b}{l}\, d\alpha_1 = \frac{S}{b}\, d\alpha_2$$

Uz pretpostavku $d\alpha_1 = d\alpha_2$ izlazi:

$$\frac{l}{b} = \frac{b}{S}$$

odnosno:

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

Prema tome, ako se paralaktički kutevi mjere j e d n a k o m točnošću, najpovoljnija je dužina pomoćne baze po poznatoj formuli:

$$\boxed{b = \sqrt{lS}}$$

ili kod $l = 2\,m$:

$$\boxed{b = \sqrt{2S}} \tag{5}$$

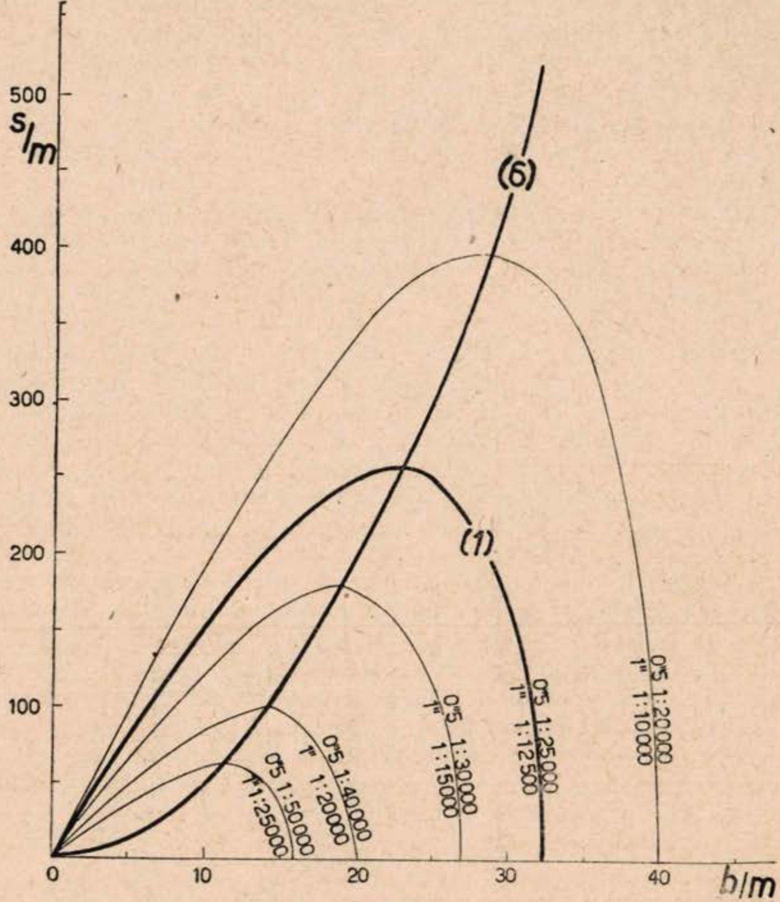
odnosno kod zadane baze najpovoljnija dužina strane:

$$\boxed{S = \frac{b^2}{2}} \tag{6}$$

U slici 2 uspoređene su krivulje po formuli (1) i formuli (6). Po formuli (6) je S to veće što je baza b veća i obratno, dok je to kod formule (1) samo do kulminacije krivulje (1), a kod većih b treba po njoj uzimati manje S.

Krivulja (1) postiže za $m_1 = m_2 = 0''5$ i $m_s : S = 1 : 25\,000$ za stranu S svoj maksimum kod b cca 22 m. Zatim naglo p a d a. Krivulja (6) obratno. Iza $b = 20$ m razmjerno naglo r a s t e. Na prvi pogled kao da se te dvije krivulje isključuju. Ali tome nije tako. One se nadopunjuju. Krivulja (1) u sl. 2 daje odnos uz pretpostavku, da je $m_s : S = 1 : 25\,000$ a $m_1 = m_2 = 0''5$. Krivulja (6) daje odnos uz pretpostavku $m_1 = m_2$ bez obzira na relativnu točnost strane S. Gdje se obe krivulje (1) i (6) sijeku, za pripadnu točku vrijedi i za krivulju (6) odnos $m_s : S = 1 : 25\,000$. Za sve točke krivulje (6) ispod presjecišta s krivuljom (1) odnos $m_s : S$ je p o v o l j n i j i, manji od $1 : 25\,000$, t. j.

točnost v e ć a, a za točke iznad presjeka ona je manja. Ako se po formuli (1) konstruiraju krivulje i za slučajeve na pr. $m_s : S = 1 : 20\,000$, $1 : 30\,000$, $1 : 40\,000$ i t. d. (a $m_1 = m_2 = 0''5$), dobivaju se dalnje krivulje, koje su također nacrtane (tanje) u slici 2. Dakle, točke u n u t a r p o v r š i n e, što ju krivulja (1) zatvara s apscisnom osi (b), daju takav odnos između b i S, da je



Sl. 2.

relativna srednja pogreška stranice S manja od $1 : 25\,000$ t. j. točnost v e ć a od $1 : 25\,000$. Analogno svaka točka izvan krivulje (1) u sl. 2 daje srednju točnost m a n j u od toga iznosa.

Krivulja (6) u sl. 2 siječe ostale krivulje u točkama njihovih maksimuma. Ona definira te maksimume.

Prema tome, koji bi odnosi između b i S bili najpovoljniji? Uz pretpostavku, da se paralaktički kutevi mjere jednakom točnošću i da je $m_1 = m_2 = 0''5$, a želi se za stranicu S relativna srednja pogreška do $1 : 25\,000$, najpovoljniji odnos je po krivulji (6) sve do presjeka s krivuljom (1). Preko toga presjeka točnost je manja od $1 : 25\,000$. Analogno, ako se želi srednja relativna pogreška do 1 : 20 000, onda po krivulji (6) do presjeka s krivuljom 0″5 i 1 : 20 000 i t. d.

Sve je to uz pretpostavku $m_1 = m_2$ t. j. da se paralaktički kutevi mjere podjednakom točnošću. A zapravo bi trebalo — kako je već rečeno — manje paralaktičke kuteve razmjerno točnije mjeriti nego li veće.

Po formuli (1) krivulje na pr. za $m_1 = m_2 = 1''$ identične su s analognim krivuljama za $m_1 = m_2 = 0''5$ ali za dvostruko manje relativne odnose $m_s : S$. Krivulja za 1″ i 1 : 10 000 identična je onoj za 0″5 i 1 : 20 000, krivulja 1″ i 1 : 15 000 identična onoj za 0″5 i 1 : 30 000 i t. d.

Čitaoc neka gornja moja izlaganja primi s izvjesnom rezervom. Kod operiranja sa srednjim pogreškama moramo naime biti oprezni. Srednje pogreške nisu isto što i konkretne kakove dimenzije, dužine ili slično, koje možemo po volji zbrajati, odbijati, grafički prikazivati i t. d. Srednja pogreška ima predznak ± t. j. uz pretpostavku vrlo velikog broja opažanja je 68% vjerojatnosti, da će konkretna pogreška biti između $+m$ i $-m$, a 997‰ da će biti unutar granica $+3m$ i $-3m$. Manje pogreške su vjerojatnije od od većih, odnosno, pogreške blizu nule vjerojatnije od onih dalje od nule. Prema tome, ako je srednja pogreška na pr. kuteva u nekoj mreži recimo $\pm m$, znači, da ima kuteva, koji su eventualno gotovo i bespogrešni, čak i više takovih nego koji imaju baš pogrešku $\delta = m$ i t. d. Osim toga teorija slučajnih pogrešaka i zakona njihovog gomilanja i razdiobe bazira uglavnom na pretpostavci, da nema sistematskih pogrešaka. To gdjekada otupljuje primjenu zakona izvedenih uz pretpostavku samo slučajnih odnosno neizbježivih pogrešaka. Osim toga kod konkretnih mjerenja obično imamo malo opažanja a primijenjujemo zakone, koji su izvedeni uz pretpostavku vrlo velikog broja čak i beskonačno mnogo opažanja (k tome bez sistematskih pogrešaka). To dalje otupljuje zakone slučajnih pogrešaka u njihovoj primjeni. Usprkos svemu tome te zakone primijenjujemo, jer nam naprosto drugo ne preostaje. Želim s time istaknuti, da i problem povoljnog odnosa pomoćne baze i tražene stranice u gornjem slučaju treba uzeti ne kao nešto matematski posve jednoznačno određeno već samo načelno, teoretski, unutar izvjesnih granica, i to uz izvjesne pretpostavke, za koje unaprijed znamo, da zapravo nikad nisu baš posve ispunjene. Napose to vrijedi za minimume funkcija srednjih pogrešaka. I obične matematske funkcije, praktički uzeto, obično imaju za ekstreme čitave široke zone, a kamoli ne funkcije srednjih pogrešaka, koje su već same po sebi zapravo čitave zone.

Još nešto o homogenosti mjerenja, homogenosti mreže i slično. Smatram, da je neka mreža po točnosti homogena onda, kad je mjerena jednakom mjerom opreza, podjednakim instrumentom i metodom, a projektirana tako, da u raznim dijelovima ima podjednake izglede (šance) na točnost. Mjerenje svake mreže sastoji iz mjerenja niza komponenata. Sve te komponente ne mogu se mjeriti baš s posve istim pogreškama. Ako se neke mogu s istom ekonomičnošću mjeriti i točnije tako, da su im pogreške manje nego li pogreške ostalih komponenata, treba ih tako i izmjeriti t. j. točnije. Mislim, da se homogenost sistema bitno ne narušava, ako u njemu ima točnijih elemenata **više** nego li manje točnih. Prvenstveno je za homogenost, obratno, mjerodavna točnost najnetočnijih elemenata. Stoga i propisi o maksimalno dozvoljenim odstupanjima i igraju u geodeziji tako važnu ulogu. Što su uže granice, unutar kojih leže otstupanja, to homogenija je izmjera.