

Sistematski uticaj nivelmanske refrakcije

O NIVELMANSKOJ REFRAKCIJI UOPSTE

Poslednjih godina se sve više usavršavaju nivelmanski instrumenti i pribor, pa se i tačnost nivelanja naglo povećava. Nivelmanska refrakcija je jedan od faktora koji onemogućuju postizanje veće tačnosti u nivelmanu, a što je s obzirom na kvalitet instrumentarija moguće. S druge pak strane ne postoje dovoljno pouzdani metodi rada, kojima bi se eliminisao njen uticaj. U sledećem će na osnovu postojećeg materijala biti ocenjen uticaj pojedinih faktora, od kojih zavisi nivelmanska refrakcija, na njenu veličinu, kao i uticaj refrakcije na zatvaranje nivelanskog poligona, a s tim u vezi biće data analiza obavljenog nivelmana visoke tačnosti u našoj zemlji.

1. MIKROKLIMATSKI USLOVI I DRUGI FAKTORI OD KOJIH ZAVISI NIVELMANSKA REFRAKCIJA

Sunce svojim zracima u toku dana zagrejava zemlju, koja kao neprovidno i rapavo telo apsorbuje ogromnu količinu sunčeve toplote, a prekonoc zemlja ispušta ovu toplotu. U zavisnosti od ove periodične pojave upijanja i ispuštanja toplote, odnosno zagrevanje i hlađenje zemlje, temperatura prizemnog vazduha se menja, a što je najvažnije menja se temperaturni gradijent vazduha, tj. priraštaj temperature za jedinicu visine. U toku dana zemlja se polako zagreva i odmah zrači toplotu, kojom zagreva okolni vazduh, tj. donji slojevi vazduha su topliji no gornji, što znači da je priraštaj temperature vazduha sa visinom negativan, a preko noći stvar je obrnuta. Temperaturni gradijent je pozitivan. Temperatura prizemnog vazduha se menja, a vazduh se na toploti širi, odnosno on kao optička sredina se menja. Temperaturni gradijent se menja sa vremenom a i sa visinom, što znači da je prizemni vazduh nehomogena optička sredina. Barometarski pritisak uslovljava gustinu prizemnog vazduha, tj. opet optičke osobine vazduha. Znači prelamanje vizure kroz vazduh zavisice od svih faktora, a pošto vizura u nivelmanu ide maksimum 3 metra iznad zemlje, to nas uglavnom interesuje odnos ovih uticaja na malim visinama, obuhvaćenih jednim imenom mikroklimatski uslovi.

Osim ovih nabrojanih osobina najdonjih slojeva vazduha, prelamanje vizure je uslovljeno još i fizičkom površinom zemlje, rasporedom instrumenata i letava kao i nizom drugih faktora.

2. JEDNAČINE ZA POPRAVKU REFRAKCIJE

U literaturi susrećemo Lalmandovu (Lallemand), Hegershofovu (Hegershof) i Kukamakijevu (Kukkamäki) jednačinu, koje daju odnos veličine nivelmanske refrakcije i gore nabrojanih uslova, a koje se razlikuju prema tome kako je ko usvojio jednačinu za promenu temperature sa visinom. Radi jednoobraznosti u sve tri jednačine upotrebićemo iste oznake.

Lalmandova jednačina glasi:

$$H = - \frac{0,00108}{760} \frac{B}{(1 + \alpha t)^2} \frac{L^2}{\Delta h} \left[\frac{1 - \tau}{12} + \frac{1 - \tau^2}{24} \dots \right]$$

gde je:

- H — popravka za refrakciju
- B — barometarski pritisak
- t_1 — temperatura vazduha na visini vizure kod zadnje letve
- t_2 — temperatura vazduha na visini vizure kod instrumenta
- t_3 — temperatura vazduha na visini vizure kod prednje letve
- L — otstojanje u metrima između prednje i zadnje letve
- Δh — visinska razlika izražena u metrima
- τ — pomoćna veličina određena po jednačini

$$\tau = \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} \quad \text{ili} \quad \tau = \frac{t_1 - t_2}{t_2 - t_3}$$

ali tako da je uvek pozitivna.

Usvojena jednačina za temperaturu glasi:

$$t = a + b \cdot \lg(z + c)$$

gde su a , b i c konstante koje se određuju iz ove jednačine ako se temperatura t meri na tri razne visine z .

Hugershofova jednačina glasi:

$$H = - 0,00036 \frac{B}{760} \frac{\Delta t_{1,0}}{(1 + \alpha t)^2} l_m^2 \Delta h_m$$

gde H , B , t i Δh imaju napred navedeno značenje.

$\Delta t_{1,0}$ — razlika temperatura vazduha na visini od 1 m i pri zemlji

l_m — dužina vizure u metrima

Jednačina temperature glasi:

$$t = a + bz^2$$

gde su a i b konstante, t temperatura, z visina.

Kukamakijeva jednačina glasi:

$$H = ctg^2 \gamma \cdot d \cdot \frac{t_2 - t_1}{Z_2^c - Z_1^c} \left[\frac{1}{c+1} \left(h_1^{c+1} - h_2^{c+1} \right) - h_0^c \left(h_1 - h_2 \right) \right]$$

gde B i t imaju ranije navedeno značenje u izrazu

$$d = - 10^{-6} \left[0,933 - 0,0064(t - 20) \right] \frac{B}{760}$$

t_1 — temperatura vazduha na visini z_1

t_2 — temperatura vazduha na visini z_2

h_1 — čitanje na prvoj letvi

h_2 — čitanje na drugoj letvi

h_0 — visina instrumenta

Jednačina temperature glasi:

$$t = a + bz^c$$

gde su a , b i c isto konstante, koje se određuju ako se temperatura meri na tri razne visine z .

Sve ove jednačine daju popravku za refrakcije za jednu stanicu, pod pretpostavkom da je nagib terena isti od prednje do zadnje letve, kao i da je prizemni vazduh sastavljen iz slojeva različitih temperatura, koji su paralelni sa zemljom.

3. DISKUSIJA JEDNAČINA REFRAKCIJE

Posmatrajući sve tri jednačine vidimo da popravka za refrakciju zavisi od niza veličina. U diskusiji zadržaćemo se detaljno na svakoj od ovih veličina, sa posebnim osvrtom na njihovo dejstvo duž dugih nivelmanskih vlakova.

A) UTICAJ BAROMETARSKOG PRITISKA

Pre svega treba skrenuti pažnju na karakter promenljivosti ove veličine. Barometarski pritisak opada sa visinom grubo uzevši linearno. Za teren iste nadmorske visine njegova srednja vrednost za duži vremenski period je više manje stalna veličina, dok momentalne vrednosti osciliraju oko ove srednje. Znači na osnovu ovoga, ukupni uticaj barometarskog pritiska duž duge linije se može razložiti na sistematsku i slučajnu komponentu. Predznak sistematskog uticaja zavisi od predznaka visinske razlike. Sa savladivanjem pozitivne visinske razlike barometarski pritisak opada, gustina vazduha se smanjuje, pa i veličina refrakcije opada. Obrnut je slučaj ako je visinska razlika negativna. Za jedan zatvoren poligon suma visinskih razlika je nula, pa je i suma uticaja refrakcije zbog sistematske promene barometarskog pritiska približno nula. Za liniju čiji nagib ne menja znak ovaj uticaj se ne eliminiše, ali kako on uvek dejstvuje na toj liniji, ne može se uočiti.

Slučajne promene uticaja refrakcije prouzrokovane stalnim sitnijim promenama barometarskog pritiska, kao slučajne na dugoj liniji ne dolaze do izražaja, tim pre što su bezznačajne, što se vidi iz sledećeg. Ako napišemo bilo koju od gornjih jednačina u obliku $H = A \cdot B$ gde je A izraz u jednačinama, koji ne zavisi od barometarskog pritiska, lako je videti da je

$$dH_B = A \cdot dB$$

$$dH_B = A \cdot B \cdot \frac{dB}{B}$$

$$dH_B = H \cdot \frac{dB}{B}$$

$$\frac{dH_B}{H} = \frac{dB}{B}$$

Za $dB = 20 \text{ mm}$ i $B = 760 \text{ mm}$ živinog stuba relativna promena refrakcije je svega oko 3‰.

Na osnovu svega izloženog može se zaključiti da se sistematski uticaj promene barometarskog pritiska eliminiše kod zatvorenog poligona, a da je uticaj sitnih promena barometarskog pritiska zanemarljiv.

B) UTICAJ TEMPERATURE

Veličina refrakcije zavisi od temperature vazduha i od temperaturnih razlika vazduha merenih na raznim visinama iznad zemlje, na način koji je u skladu sa odgovarajućom jednačinom. Treba podvući da su ovde u pitanju dva različita pojma i ako se u osnovi radi o jednoj te istoj veličini na ime o temperaturi. Temperature razlike mogu biti relativno velike i pri niskim temperaturama, odnosno male pri visokim, što zavisi od brzine promene temperature u toku vremena. Zato ćemo ih posmatrati odvojeno.

a) *Uticaj temperature vazduha.* U sve tri jednačine veličina refrakcije je obrnuto proporcionalna kvadratu binoma širenja vazduha, (u Kukamakijevoj jednačini je $1/(1+at)^2$ razvijeno u red) Sa promenom temperature, a pri konstantnim ostalim uslovima, veličina refrakcije se menja, ali njen predznak ostaje uvek isti. Znači refrakcija bilo da je veća ili manja stalno utiče na naša nivoelanja, tj. temperatura prouzrokuje sistematski uticaj refrakcije. Za dalja razmatranja nužno je uočiti karakter promenljivosti temperature u toku sezone nivoelanja. Temperatura se menja periodično kako u toku dana tako i u toku godine. Srednje dnevne temperature rastu od zime do jula, da bi posle toga opadale. Temperatura raste od jutra do podne, a zatim opada. Ako bi se odredila srednja temperatura za celu sezonu, odstupanja pojedinačnih temperatura od ove srednje bila bi slučajnog karaktera.

Ako bilo koju od gornjih jednačina napišemo u obliku

$$H = A_1 \frac{1}{(1 + \alpha t)^2}$$

gde je A_1 deo jednačine koji ne zavisi od temperature, biće

$$dH_t = -A_1 \frac{2\alpha dt}{(1 + \alpha t)^3}$$

Pri usvojenoj srednjoj temperaturi t_{sr} , ceo izraz za dH_t je funkcija samo od dt , a kako je, kao što je već rečeno, dt odstupanje pojedinačnih temperatura od srednje slučajnog karaktera, to su i odstupanje pojedinačnih refrakcija od one računate za t_{sr} slučajnog karaktera.

Ako napišemo

$$dH_t = - \frac{A_1}{(1 + \alpha t)^2} \cdot \frac{2\alpha dt}{1 + \alpha t}$$

$$dH_t = -H \frac{2\alpha dt}{1 + \alpha t}$$

$$\frac{dH_t}{H} = - \frac{2\alpha dt}{1 + \alpha t}$$

i ako usvojimo da t_{sr} jednako 15°C pri $\alpha = 0,00368$ moguće promene temperature biće dt jednako $\pm 15^\circ \text{C}$ i tada je

$$\frac{dH_t}{H} < 11\%$$

Na osnovu ovoga može se izvesti zaključak da za usvojenu srednju temperaturu $t_{sr} = 15^\circ \text{C}$ maksimalna moguća odstupanja refrakcije zbog temperature od one računate za $t_{sr} = 15^\circ \text{C}$ nisu veće od 11%. Kad se tome doda da su ova odstupanja slučajnog karaktera, onda se može smatrati da je ukupno dejstvo refrakcije kroz celu sezonu nivelanja približno dejstvu refrakcije računate sa srednju temperaturu, što znači da ako naša nivelanja ispravimo zbog refrakcije za $t_{sr} = 15^\circ \text{C}$ mi smo se oslobodili njenog sistematskog uticaja, dok se slučajni uticaj kao mali može zanemariti.

b) *Uticaj temperaturnih razlika.* U sve tri jednačine veličina refrakcije je pravo srazmerna temperaturnim razlikama vazduha, merenim na odgovarajućim visinama, na način koji je nešto drugojačiji za svaku jednačinu. Dok već rasmatrani faktori barometarski pritisak i temperatura svojim mogućim promenama relativno malo utiču na promenu veličine refrakcije, moguće promene temperaturnih razlika prouzrokuju ogromne promene refrakcije, koje mogu biti i do 100% pa i 200%. Temperaturne razlike u vazдушnim slojevima ispod 3m su najviše 2°C , ali one mogu uzimati i pozitivne i negativne vrednosti, kao i da budu skoro nula. Kada bi za sezonu nivelanja moguće temperaturne razlike bile slučajnog karaktera, naime koliko pozitivnih toliko i negativnih, pravilno raspoređenih kroz sezonu nivelanja, problem refrakcije bi, pri konstantnim ostalim uslovima, bio delimično rešen, jer njen uticaj ne bi bio sistematskog karaktera. Međutim po Bestu (Best) i Kukamakiju temperaturni gradijent je noću pozitivan do 1 sata po izlasku sunca kada je nula, a zatim je negativan preko celog dana, da bi jedan sat pre sunčavog zalaska opet bio nula, odnosno posle toga pozitivan. Vreme nivelanja u toku dana nije simetrično u odnosu na ove granične momente kada gradijent menja znak, pa samim tim ni pojava refrakcije nije slučajnog karaktera. A ovome treba dodati da se temperaturni gradijent ne ponaša linearno pri promeni znaka, već mu apsolutna vrednost izjutra kao pozitivnom polako opada, a pri promeni znaka naglo raste, što znači da i tu ne postoji simetričnost.

Na kraju se može zaključiti da su temperaturne razlike jako uticajne na veličinu refrakcije i da prouzrokuju njen slučajni i sistematski deo. Slučajni deo osetno povećava slučajnu grešku nivelanja, a sistematski deo je jako opasan na dugim linijama, što znači da bi bilo neophodno meriti ove temperaturne razlike, odnosno poznavati zakon promene temperature sa visinom.

Međutim ako se radi o nivelanju jedne linije u toku nivelmanske sezone, može se smatrati da je refrakcija stalno bila od uticaja na naše rezultate. Oni su u zavisnosti od vremena opterećeni većim ili manjim uticajem refrakcije, koji je pak, kako smo maločas videli, glavnim delom posledica intenziteta promene temperature vazduha sa visinom. U krajnjoj sumi ukupna refrakcija duž celog vlaka se može zameniti jednim srednjim uticajem, pri čemu će svaka pojedinačna vrednost refrakcije za jednu stranu prilično odstupati od srednje vrednosti, koja odgovara toj strani. Kako za zatvaranje poligona i dalju obradu podataka nas interesuje ukupni sistematski uticaj refrakcije bilo bi poželjno da bar taj srednji sistematski uticaj odredimo, a da bi smo njega odredili trebalo bi da znamo kakva je srednja promena temperature sa visinom u toku sezone nivelanja. S obzirom na mnogobrojne faktore koji utiču na promenu temperature sa visinom, kao i na komplikovanosti tih uticaja, tačno odrediti srednju godišnju promenu temperature sa visinom je nemoguće, ali se ona može odrediti približno. Kolika će biti ta približnost zavisi od količine podataka kojima se raspolaže, a koji su specijalno za tu svrhu dobijeni.

U svrhu određivanja promene temperature sa visinom u južnoj Engleskoj ($\varphi = 52^\circ \text{N}$; $\lambda = 2^\circ \text{W}$) Best je merio svake dve minute temperaturne razlike između visine 2,5cm, 30 cm i 120 cm i to dve godine. Srednje vrednosti ovih razlika za svaki čas i svaki mesec on je tabelarno sredio, a Kukamak je koristeći ove podatke izračunao za svoju jednačinu koeficijente C koji takođe odgovaraju svakom času u toku dana za svaki mesec.

Na osnovu ovih tablica može se dobiti da srednja godišnja vrednost za temperaturnu razliku između visine 30 i 120 cm iznosi približno $-0,3^\circ \text{C}$. a da srednja vrednost eksponenta c iznosi $-0,2$. Koristeći ove sredine, docnije ćemo oceniti uticaj refrakcije na postojeći N. V. T. u Jugoslaviji. Temperaturna razlika $v_1 = t_2 - t_1 = -0,3^\circ \text{C}$ za naše prilike možda je premala, a i koeficijent c možda ne odgovara našim klimatskim uslovima. Pokušaćemo zatim da za temperaturnu razliku $v_1 = -0,3^\circ \text{C}$ na bazi naših nivelmanskih podataka damo izvesu korekciju, samo svakako sve će to biti nepouzđano do tada, dok mi nemamo podatke za godišnji hod promene temperature sa visinom, koji baziraju na našim uslovima, odnosno dok se u našoj zemlji, ne pristupi detaljnom proučavanju problema refrakcije, koji je kako ćemo videti u sledećem vrlo važan za nivelman.

C) UTICAJ VISINSKIH RAZLIKA

Zavisnost veličine refrakcije od visinske razlike je u svakoj jednačini drugojačija, ali ipak zajedničko je to da znak refrakcije zavisi od znaka visinske razlike, što je iz prvih dveju jednačina očigledno, dok u Kukamakijevoj jednačini ta zavisnost je izražena preko očitavanja na letvama h_1 i h_2 .

Dalje s obzirom da je $ctg\gamma = \frac{L}{\Delta h}$ i u Kukamakijevoj i u Lalmandovoj jed-

načini veličina refrakcije je obrnuto proporcionalna visinskoj razlici, rok je u Hugershofovoj pravo proporcionalna. S tim u vezi mogli bismo reći da su obe prve jednačine povoljne za brdski teren, a treće za ravničarski. Na kraju moglo bi se konstatovati, da su visinske razlike obično oko 2 m ili manje. Njihov udeo u refrakciji je znatan, ali kako znak uticaja refrakcije zavisi od znaka visinske razlike, ukupni uticaj na zatvoren poligon biće beznačajan.

D) UTICAJ DUŽINE VIZURE

U sve tri jednačine refrakcija raste sa kvadratom dužine vizure, iz čega proizilazi da je dužina vizure od najvećeg uticaja na refrakciju. Ova činjenica ne bi bila tako interesantna, kada bi za sva nivelanja dužine vizura bile uvek iste, ili približno iste. U ravničarskim terenima je propisana maksimalna dužina vizure,

i obično je prosečna dužina vizure nešto manja od maksimalne, ali razlika najveće i najmanje dužine je relativno mala. U tom slučaju veličina refrakcije je sistematska greška, često i dosta velika, ali njen znak zavisi od znaka visinske razlike i njen ukupni uticaj na zatvoren poligon je približno nula.

U brdskim terenima stvar je sasvim drugojačija. Dužine vizura su uslovljene nagibom terena, a samim tim i veličina refrakcije je funkcija nagiba terena. Ovo je direktno dato u Kukamakijevoj jednačini a i Lalmandova je u skladu s tim

$$\text{jer je } \frac{L}{\Delta h} = ctg\gamma.$$

Sušтина celog ovog izlaganja baš i jeste u tome da ukaže od kolike je važnosti uticaj nagiba na zatvaranje poligona jer sistematska greška refrakcije zbog ovog faktora često može da se smanji, ali nikako da se eliminiše.

Da bi cela stvar bila jasnija. poćićemo od toga da je za N. V. T. bilo propisano da vizura ne sme biti niža od 0,5 m, a da dužina vizure ne bude veća od 50 m. Pri ovim uslovima jednom stanicom savladana visinska razlika iznosi približno 2 m. Znači granični nagib za gornji propis je 2% i za manje nagibe moguće je i duža vizura, ali sa propisanim dužinom vizure od 50 m, uvek je vizura viša no pri nagibu od 2%, što znači da je i refrakcija manja. Za nagibe veće od 2% vizure uvek moraju biti kraće od 50 m. Kako će radi ekonomičnosti samog posla i čitanja na letvama uvek biti na gornjoj oko 0,5 m a na donjoj oko 2,5 m, to će i sve vizure za nagibe veće od 2% uvek prolaziti kroz vazdušni sloj, paralelan sa terenom, čija će donja granica biti na 0,5 a gornja na 2,5 m iznad zemlje. S obzirom na ono što je rečeno o promeni temperature sa visinom, kao i da su izotermičke površine paralelne sa terenom, proizilazi da vizure svake stanice prate isti temperaturni uslovi vazduha. Kako je već izloženo da barometarski pritisak beznačajno utiče na veličinu refrakcije a da se temperaturni uslovi mogu aproksimativno zameniti srednjim temperaturnim uslovima $t_{sr} = 15^{\circ}C$, $v_1 = -0,3^{\circ}C$ i $c = -0,2$ kada je u pitanju čitava mreža nivelmana, refrakcija uglavnom zavisi samo od dužine vizure.

Prema svemu navedenom za brdski teren Kukamakijeva jednačina bi izgledala:

$$H = ctg^2\gamma \cdot d \cdot \frac{-0,3C}{120^{0,2} 30^{-0,2}} \left[\frac{1}{-0,2+1} (50^{0,2+1} - 250^{0,2+1}) - 155^{0,2} (50 - 250) \right]$$

gde je $d = -10^{-6} [0,933 - 0,0064 (15 - 20) \frac{760}{760}] = -0,965$ ako za srednju visinu instrumenta usvojimo 155 cm.

Kako je $ctg\gamma = \frac{2l}{\Delta h}$ a pod gornjim pretpostavkama biće $\Delta h_{sr} = 2$ m i ako obeležimo da je

$$H_0 = d \cdot \frac{t_2 - t_1}{Z_2^c - Z_1^c} \left[\frac{1}{c+1} (h_1^{c+1} - h_2^{c+1}) - h_0^c (h_1 - h_2) \right] = const. = 10^{-5} \cdot 47,3$$

možemo napisati da je u našem specifičnom slučaju

$$H = H_0 \cdot l^2 = 10^{-5} \cdot 47,3 \cdot l^2$$

a u opštem slučaju

$$H = \frac{4H_0}{\Delta h_{sr}^2} \cdot l^2 \quad \text{gde je opet} \quad \frac{4\Delta H_0}{\Delta h_{sr}^2} = const$$

što znači da je za nagibe veće od graničnih u pretpostavljenom slučaju od 2%, refrakcija funkcija samo kvadrata vizure.

Što se tiče znaka popravke za refrakciju, on je isti kao i znak iznivelane visinske razlike, a uticaj je obrnutog znaka i uбудuće pridržavaćemo se toga.

Svakako ne treba ni za momenat zaboraviti koliko je nesigurna ova vrednost H_0 s obzirom na ono što je rečeno o faktorima od kojih ona zavisi, a naročito o temperaturnim razlikama, ali ovde se ima u vidu samo ocena sistematskog uticaja refrakcije.

Nagib terena uslovljava dužine vizura, a kako na nivelmanskim vlačima u našoj zemlji ima nagiba i do 10‰ to dužine vizura zbog nagiba mogu biti smanjene i do 10 m, što znači da refrakcija bez obzira na temperaturne uslove na izvesnim sektorima vlaka ne može biti velika, jer su dužine vizura male, tj. pri istim temperaturnim uslovima, za 1 km dužine nagiba 2‰ ona može biti nekoliko puta veće no pri nagibu od 10‰. Da bi ovo bilo jasnije redukujmo refrakciju na 100 m dužine. Jednom stanicom nivelamo dužinu $2 \cdot l$, a za dužinu od 100 m potrebno je $\frac{100}{2l}$ stanica.

Kako je refrakcija za jednu stanicu

$$H = H_0 \cdot l^2$$

$$\text{za } 100 \text{ m biće: } H = H_0 \cdot l^2 \cdot \frac{100}{2 \cdot l} = 50 \cdot H_0 \cdot l$$

što znači da je refrakcija na jedinicu dužine linearna funkcija dužine vizure, a u zavisnosti od nagiba koji mogu biti i pet puta veći i veličina refrakcije na jedinicu dužine može biti pet puta veća, a sve to može biti od vrlo velikog uticaja na nivelman.

E) UTICAJ NAGIBA NA NIVELMANSKU REFRAKCIJU

Da bi cela stvar bila preglednija razmotrićemo pojedinačno sve slučajeve koji dolaze u obzir.

a) Na jednoj nivelmanskoj strani između dva repera, ako pretpostavimo da je nagib približno stalan, dužine vizura i čitanja na letvama biće približno konstantni. Apsolutna vrednost visinske razlike uvek će biti umanjena za izvesnu vrednost zbog refrakcije, a nivelanja napred-nazad razlikovaće se međusobno za promenu refrakcije zbog promene temperaturnih uslova.

b) Na jednoj dugoj liniji, koja ne menja nagib, refrakcija uvek dejstvuje. Apsolutna vrednost visinske razlike biće za priličnu vrednost umanjena zbog sistematskog uticaja refrakcije, a nivelanja napred-nazad razlikovaće se obično malo među sobom, ako ne postoje drugi sistematski uzroci (popuštanje papuča). Ta razlika uslediće zbog razlike srednjih temperaturnih uslova nivelanja napred i nazad. Razlika nivelanja napred-nazad je nekoliko puta manja od stvarnog uticaja refrakcije.

c) Na dugoj liniji koja menja nagib, a ako je penjući nagib jednak padajućem nagibu, i ako su dužine penjućeg i padajućeg kraka jednake, jednom rečju ako su nagibi simetrični, refrakcija će uticati stalno na rezultate nivelanja. Cela penjuća visinska razlika biće smanjena za osetnu vrednost zbog refrakcije, a padajuća povećana, te će ukupna visinska razlika ovako zamišljene linije biti oslobođena uticaja refrakcije, pod pretpostavkom da su temperaturni uslovi bili za sve vreme nivelanja isti, a kako to nije slučaj, to ni eliminacija neće biti potpuna. Zaostali uticaj refrakcije biće veličina istog reda kao i razlika nivelanja napred-nazad, ako su ostali sistematski uticaji, koji prate nivelman, zanemarljivi.

d) Da dugoj liniji nesimetričnih nagiba, tj. ako su penjući nagibi manji, a spuštajući izrazito veći, a pređene visinske razlike iste, nivelanja penjućeg dela su vršena sa dužim vizurama, a spuštajući sa kraćim, pa je i uticaj refrakcije na penjućem kraku veći, a cela visinska razlika je pogrešna za razliku refrakcije, opet pod pretpostavkom da su temperaturni uslovi stalni za sve vreme nivelanja, ili pak da je njihova srednja vrednost pri nivelanju penjućeg i padajućeg kraka ista.

Pretposlednji i poslednji slučaj su ustvari identični sa zatvorenim poligonom, a nas uglavnom to i interesuje. Zato o uticaju refrakcije na zatvaranje poligona možemo izvesti sledeći zaključak:

Ako u jednom zatvorenom poligonu postoji simetričnost nagiba, tj. ako se nagibi njegovih strana odnose kao oni u slučaju c) ili postoji u okviru tog poligona više odeljaka, koji su u skladu sa slučajem c) ukupni uticaj refrakcije na taj poligon je nula bolje rečeno beznačajan, jer se nikako ne može tvrditi da je eliminisan s obzirom na dejstvo temperaturnih uslova.

Ako u jednom zatvorenom poligonu ne postoji simetričnost nagiba, tj. ako je u pitanju slučaj d), ili pak niz istih slučajeva d), uticaj refrakcije se samo delimično eliminiše, a ne eliminisani deo može prouzrokovati znatno nezatvaranje poligona, često veće no što je dozvoljeno oštupanje za taj poligon.

Naglasili smo da treba da je u pitanju niz istih slučajeva d), jer ako su u pitanju slučajevi d) prikazano na slici br. 1, uticaj refrakcije biće eliminisan jer je zastupljena simetričnost nagiba.



SL.1

Jednim brojnim primerom ilustrovaćemo uticaj nesimetričnosti nagiba na zatvaranje poligona.

Pretpostavimo zatvoreni poligon koji se prvo penje nagibom od 2‰ na dužini od 50 km do visine od 1000 m, a zatim se spušta nagibom 10‰ na dužini od 10 km. U prvom slučaju su dužine vizura 50 m, a u drugom 10 m. Kako smo već videli, refrakcija za 100 m je $H = 50 \cdot H_0 \cdot l$ a za kilometar biće $H = 500 \cdot H_0 \cdot l$. Za ceo penjući krak biće

$$H_{50 \text{ km}} = -500 H_0 \cdot 50 \text{ m} \cdot 50 \text{ km} = -125 \cdot 10^4 \cdot H_0$$

a za spuštajući biće

$$H_{10 \text{ km}} = +500 H_0 \cdot 10 \text{ m} \cdot 10 \text{ km} = +5 \cdot 10^4 \cdot H_0$$

Ukupni uticaj refrakcije na ovaj poligon bi bio:

$$H = -125 \cdot 10^4 \cdot H_0 + 5 \cdot 10^4 \cdot H_0 = -120 \cdot 10^4 \cdot H_0$$

Kako je prema ranije usvojenim vrednostima za Kukamakijevu jednačinu $H_0 = 10^{-6} \cdot 47,3$ biće

$$H = -120 \cdot 10^4 \cdot 10^{-6} \cdot 47,3 = -56,7 \text{ mm}$$

dok je

$$3\sqrt{S} = 3\sqrt{60} = 23 \text{ mm}$$

Na osnovu ovog primera se najjasnije vidi uticaj nesimetričnosti nagiba na zatvaranje poligona u nivelmanu. Opet treba napomenuti da bi H_0 trebalo da odgovara srednjim temperaturnim uslovima vremena nivelanja. Ako su pak ovi srednji uslovi uslovljavali veće H_0 biće i veličina nezatvaranja poligona zbog refrakcije veća od 56,7 mm. Svakako baš ovakav odnos nagiba na terenu je teško naći, ali zato ni uticaji refrakcije na zatvaranje poligona nisu ovako drastični.

Kao definitivno se može zaključiti, da u nedostatku ostalih podataka za računanje refrakcije, za otklanjanje njenog sistematskog uticaja, ona se može

računati po formuli $H = 500 \cdot H_0 \cdot l \frac{\text{mm}}{\text{km}}$ za nagibe preko 2‰, gde je H_0 funkcija srednjih temperaturnih uslova za period nivelanja.

Za nagibe manje od 2‰, gde su vizure oko 50 m, u zavisnosti od nagiba $\text{ctg } \gamma$ raste ako je nagib terena manji, ali su zato i otsecci na letvama sve bliži jedan drugom, i na prvi pogled izraz je neodređen. Međutim dubljom analizom samog tog izraza može se zaključiti da je za $\gamma = 0$ i $H = 0$, i zato će da usvojimo da je za te male nagibe refrakcija jedne stanice aproksimativno linearna funkcija visine tj.

$$H = H_{2\text{‰}} \cdot \frac{\Delta h}{2} = 50^2 \cdot H_0 \cdot \frac{\Delta h}{2}$$

jer su za nagib 2‰ dužine vizura 50 m.

Ako je nagib između dva repera ili pak duž cele linije konstantan, može se po istoj formuli računati uticaj refrakcije za celu liniju.

F) ZAKLJUČAK

Prema svemu izloženom glavni prouzročivači refrakcije u nivelmanu jesu temperaturne razlike vazдушnih slojeva kroz koja prolazi vizura i dužine vizura, dok su uticaji svih ostalih faktora sitniji i manje važni. Za zatvoren poligon suma visinskih razlika je nula pa se skoro svi uticaji uključujući i uticaj temperaturnih razlika grubo eliminišu, jer je znak uticaja refrakcije zavisao od znaka visinske razlike, a svi faktori deluju i pri pozitivnim i pri negativnim visinskim razlikama, kad se radi o čitavoj mreži nivelmana, opet grubo uzevši, podjednako. Ako su nagibi nivelanog poligona simetrični ni dužine vizura, kao vrlo važan faktor, neće doći do izražaja, ali ako su nagibi nesimetrični, znatan deo refrakcije ne može biti eliminisan, a zaostali deo biće veći ukoliko je nesimetričnost nagiba izrazitija.

ISPRAVLJANJE POSTOJEĆEG N. V. T. ZBOG REFRAKCIJE

Od 1946 pa do 1952 g. zaključno iznivelano je preko 5500 km. Specifičnost ovog nivelmana je u tome što se nije vodilo računa da čitanja na gornjoj letvi ne sme biti manje od 0,5 m, a to treba uzeti u obzir pri računanju refrakcije.

Za ispravljanje ovog nivelmana poslužićemo se već usvojenim srednjim vrednostima

$$\begin{aligned}v_1 &= -0,3^\circ \text{C} \\c &= -0,2 \\z_1 &= 30 \text{ cm} \\z_2 &= 120 \text{ cm} \\B &= 760 \text{ mm Hg} \\t_{sr} &= 15^\circ \text{C}\end{aligned}$$

pri čemu usvajamo da je

$$\begin{aligned}h_1 &= 20 \text{ cm} \\h_0 &= 150 \text{ cm} \\h_2 &= 280 \text{ cm}\end{aligned}$$

i tada je

$$\begin{aligned}H &= \text{ctg}^2 \gamma \cdot d \cdot \frac{-0,3^\circ \text{C}}{120 \cdot 0,2 - 30 \cdot 0,2} \left[\frac{1}{-0,2 + 1} \left(20^{-0,2+1} - 280^{-0,2+1} \right) - 150 \cdot 0,2 (20 - 280) \right] = \\&= 10^{-6} \cdot 10,6 \cdot \text{ctg}^2 \gamma\end{aligned}$$

jer su veličine h i z u santimetrima.

Ovo je refrakcija za jednu stanicu u funkciji $\text{ctg} \gamma$. Pošto nas uvek interesuje refrakcija na jedinicu dužine, to ćemo prvo gornji izraz dati u funkciji dužine vizure. Pod navedenim uslovima $h_1 = 20 \text{ cm}$ i $h_2 = 280 \text{ cm}$ prosečno jednom stanicom se savlada 2,6 m. Znači

$$\text{ctg} \gamma = \frac{2 \text{ m}}{2,6 \text{ m}} = \frac{1}{1,3}$$

i tada je $H = \frac{l^2}{1,3^2} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 10,6 \text{ cm}$ za jednu stanicu. U dužini od 100 m sadrži se $\frac{100}{2,1}$ stanica, tj. refrakcija za 100 m biće:

$$H_{100 \text{ m}} = \frac{l^2}{1,3^2} \cdot 10^{-6} \cdot 10,6 \cdot \frac{100}{2,1} \text{ cm} = \frac{1}{1,3^2} \cdot 10^{-4} \cdot 5,3$$

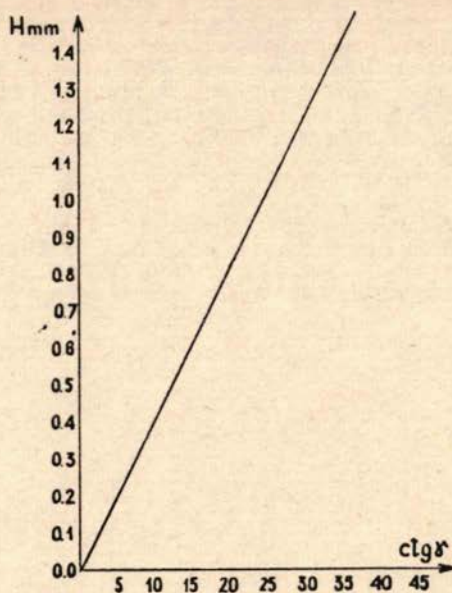
Kako je $\frac{1}{1,3} = \text{ctg} \gamma$ biće

$$H_{100} = \frac{\text{ctg} \gamma}{1,3} \cdot 10^{-4} \cdot 5,3 = \text{ctg} \gamma \cdot 10^{-4} \cdot 4,06 \text{ cm}$$

Za jedan km biće

$$H_{1,00} = \text{ctg} \gamma \cdot 10^{-3} \cdot 40,6 \text{ cm} = \text{ctg} \gamma \cdot 10^{-2} \cdot 4,06 \text{ mm}$$

Kao što vidimo refrakcija po kilometru je linearna funkcija $\text{ctg}\gamma$, i u koordinatnom sistemu, gde je apscisa $\text{ctg}\gamma$, a ordinata H dobićemo pravu liniju što je prikazano na slici 2).



SL 2

Uvoditi popravku za svaku stanicu u nivelmanskom obrascu br. 1 je ogroman posao, koji zahteva i vreme i radnu snagu, a kako je ovo samo jedna provizorna analiza uticaja refrakcije, to će ceo posao biti obavljen pod pretpostavkom da je od repera do repera nagib terena konstantan. Sa ovim se u razmatranje uvodi jedan novi element približnosti, ali s obzirom na sve što je izneto i na cilj svega, ova približnost je zadovoljavajuća. Dakle pod ovom pretpostavkom biće

$$\text{ctg}\gamma = \frac{S_m}{\Sigma \Delta h_m}$$

gde je S rastojanje od repera do repera, a $\Sigma \Delta h$ ukupna visinska razlika između ta dva repera.

Znači računanje popravke za refrakciju za postojeće N. V. T i precizni nivelman 1. reda je najlakše i najbrže obaviti na sledeći način. Na osnovu nivelman-skog obrasca br. 2 nađe se $\text{ctg}\gamma$ ako se logaritmarom nađe količnik $\frac{S}{\Sigma \Delta h}$. Za

nađenu vrednost $\text{ctg}\gamma$ se u dijagramu na slici 2) očita popravka refrakcije za 1 km, koja se sada logaritmarom umnoži sa S u km i dobije se popravka zbog refrakcije tog međurepernog rastojanja. Na pr.: $S = 0,9$ km $\Sigma \Delta h = 30$ m, $\text{ctg}\gamma = 900/30 = 30$. Za $\text{ctg}\gamma = 30$ $H_{1000} = 1,2$, a $H_{900} = 1,1$ mm.

Stvar se mnogo uprošćava, ako se u dijagramu (sl. 2) izvuku i prave popravaka za razne dužine, recimo za svaki 100 m, što je prikazano na dijagramu (sl. 3). U ovom slučaju je potrebno samo logaritmarom naći $\text{ctg}\gamma$ i za njega i odgovarajuću dužinu pročitati direktnu popravku. Na primer: za $S = 0,9$ i $\Sigma \Delta h = 30$, $\text{ctg}\gamma = 30$. Prava koja odgovara dužini 0,9 km seče ordinatu nad apscisom 30 na 1,1. Znači popravka je 1,1 mm.

Međutim ako pođemo od formule

$$H_{1000} = \text{ctg}\gamma \cdot 10^{-2} \cdot 4,06 \text{ mm}$$

a znamo da je $\text{ctg}\gamma = \frac{S_m}{\Sigma \Delta h_m}$

biće
$$H_{1000} = \frac{S}{\Sigma \Delta h} \cdot 10^{-2} \cdot 4,06 \text{ mm}$$

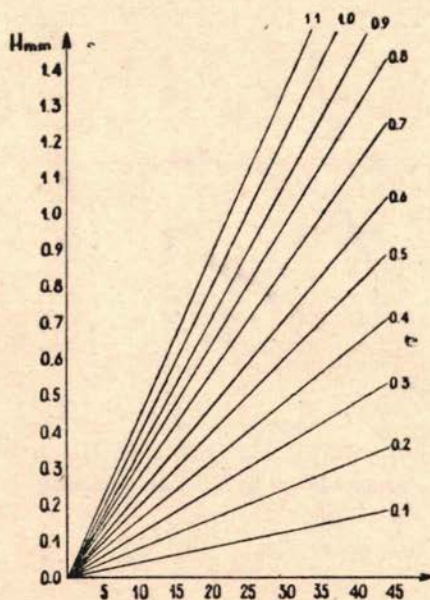
a na rastojanju S

$$H_S = \frac{S_m}{\Sigma \Delta h_m} \cdot 10^{-2} \cdot 4,06 \cdot S_{\text{km}} \text{ mm}$$

$$H_S = \frac{S_{\text{km}}^2}{\Sigma \Delta h_m} \cdot 40,6$$

Na osnovu poslednjeg izraza može se napisati

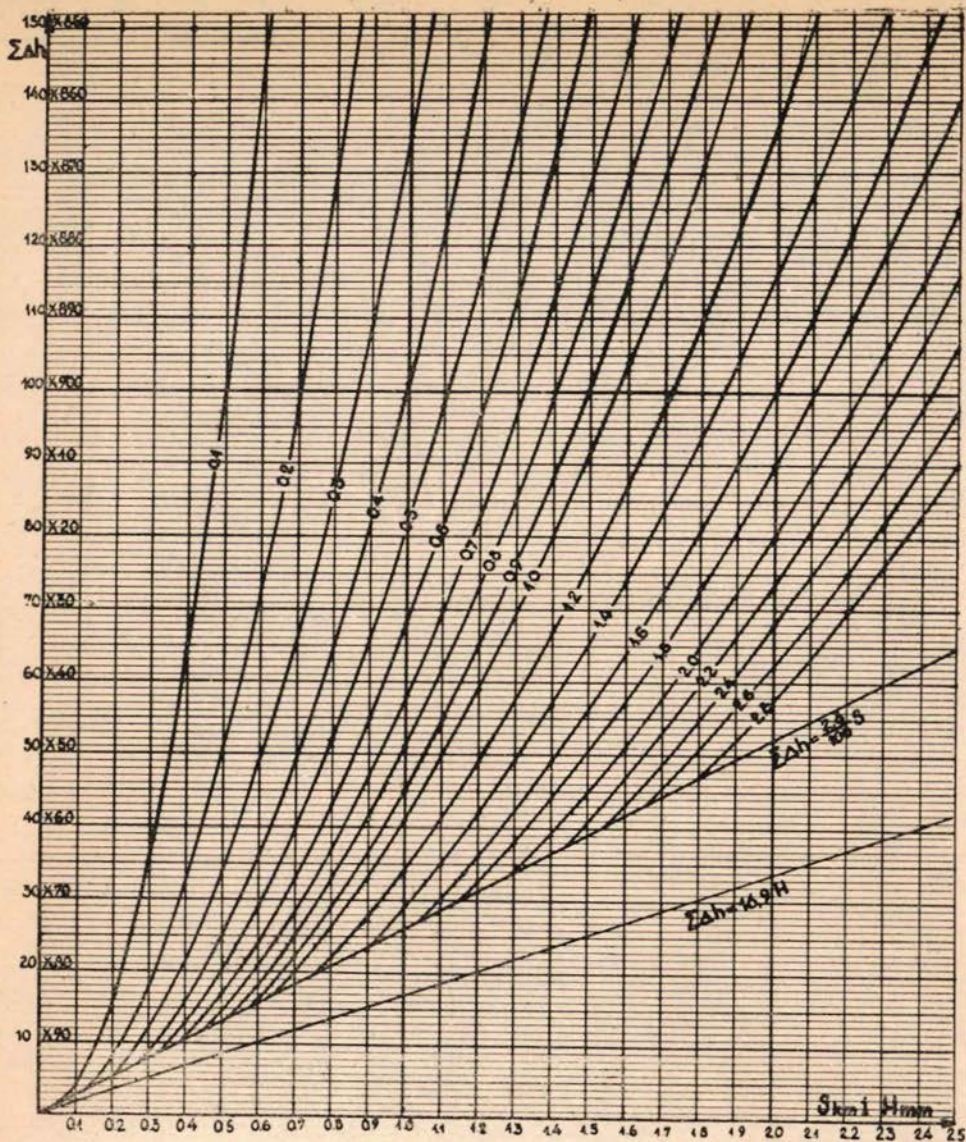
$$\Sigma \Delta h_m = \frac{S_{\text{km}}^2}{H_{\text{S mm}}} \cdot 40,6$$



SL 3

U koordinatnom sistemu apscise S i ordinate $\Sigma \Delta h$ ovaj izraz daće familiju parabola u funkciji parametra H . Ako se nacrtaju ove parabole za $H = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2,0; 2,4; 2,6$ i $2,8$ dobiće se nomogram (sl. 4) iz koga se lako ili brzo mogu za svako S i $\Sigma \Delta h$ naći direktno popravke refrakcije. Naprimer: za $S = 0,9$ i $\Sigma \Delta h = 30$ definisana je tačka koja leži između krivih popravaka $1,0 \text{ mm}$ i $1,2 \text{ mm}$ pa se jednostavnim interpolovanjem dobije $1,1 \text{ mm}$.

Kako $\Sigma \Delta h$ može biti i negativno tj. u dopuni, duž osovine $\Sigma \Delta h$ je ispisana dvostruka podela što isključuje potrebu »preobraćanja« i olakšava postupak za negativne visinske razlike.



SL. 4

Naglašeno je da se po normogramu mogu dobiti popravke za refrakciju ako su prosečna čitanja na gornjoj letvi 20 cm a na donjoj 280 cm, a da vizure ne mogu biti duže od 50 m. Znači minimalni nagib za koji se možemo poslužiti

nomogramom je $\text{tg } \gamma = \frac{\Delta h}{2l} = \frac{2,6}{100}$ Prema tome ako je $\frac{\Sigma \Delta h}{S} > \frac{2,6}{100}$ radićemo

prema priloženom nomogramu koristeći krive popravaka, a ako je $\frac{\Sigma \Delta h}{S} < \frac{2,6}{100}$

a to će biti ako je teren ravničarski, računanje popravke se mora obaviti po for-

$$\text{muli } H = H_{2,675} \cdot \frac{\Sigma \Delta h}{2,6}$$

Ako bismo u koordinatnom sistemu $\Sigma\Delta h$ i S nacrtali pravu $\Sigma\Delta h = \frac{2,60}{100} \cdot S$,

sve tačke iznad ove prave zadovoljavajuće nejednačinu $\frac{\Sigma\Delta h}{S} > \frac{2,6}{100}$, a sve tačke

ispod ove prave nejednačinu $\frac{\Sigma\Delta h}{S} < \frac{2,6}{100}$ što praktično znači, da ako je u našem

nomogramu ucrtana ova prava, i ako je za dato S i $\Sigma\Delta h$ tačka iznad prave, prosto na osnovu susednih krivih pročitamo popravku za refrakciju, ali ako je za dato S i $\Sigma\Delta h$ tačka ispod prave, odmah je jasno da se radi o ravničarskom terenu tj. da popravku treba računati po formuli $H = H_{2,60\%} \cdot \frac{\Sigma\Delta h}{2,6}$ odnosno

$$H = 0,154 \cdot \frac{\Sigma\Delta h}{2,6} = 0,059 \Sigma\Delta h, \text{ ili drukčije napisano } \Sigma\Delta h = 16,9 H$$

Tretrajući u priloženom nomogramu apcisu osovini S i kao H osovini, pri čemu brojke na osovini, koje označavaju kilometre kad je u pitanju veličina S , sada označavaju milimetre. može se nacrtati prava $\Sigma\Delta h = 16,9 \cdot H$. I sada

ako za odgovarajuće S i $\Sigma\Delta h$ tačka padne s donje strane prave $\Sigma\Delta h = \frac{2,6}{100} \cdot S$, treba

naći presek horizontalne prave ordinate $\Sigma\Delta h$ sa pravom $\Sigma\Delta h = 16,9 H$ i dole pročitati kao apacisu H odnosno popravku za refrakciju.

Već je naglašeno da popravka za refrakciju ima isti znak kao i visinska razlika, pa prema tome ako se po ordinatnoj osovini služimo podelom u dekadnoj dopuni popravka ima negativan znak, a ako se služimo običnom podelom ona je pozitivna.

Radeći kako je objašnjeno za vlakove čije nivelmanske obrasce br. 2 poseduje Savezna geodetska uprava, sračunata je popravka zbog refrakcije, prvo za svaki vlak, a zatim su za odgovarajući zatvoren poligon sabrane popravke, koje odgovaraju pojedinim vlakovima tog poligona i tako su dobivene ukupne popravke za zatvorene poligone, koje su sređene u sledećoj tabeli. U ovoj tabeli su dati uticaji tj. popravke sa obrnutim znakom.

Svakako ne treba izgubiti iz vida kolika su zanemarivanja učinjena pretpostavkom uniformnog nagiba nivelanih linija, ali u krajnjoj liniji rekli smo da je to problem čisto tehničke prirode. Sa više vremena i radne snage mogu se popravke računati na osnovu nivelanskog obrasca br. 1 što bi krajnje rezultate unekoliko izmenilo, ali to nije bitno jer je ovde cilj da se samo uobličii kontura problema refrakcije, dok se o svakom detalju treba još dosta razmišljati.

Na osnovu priložene tabele u kojoj se nalaze i podaci koji su važne karakteristike zatvorenih poligona, mogu se izvesti sledeći zaključci:

1. Bez obzira na dužine poligona, nivelanjem dobiveno odstupanja su mala tamo gde je uticaj refrakcije mali.

2. Znak uticaja refrakcije se više od 50% slučajeva poklapa sa znakom dobivenih nezatvaranja.

3. Poligoni broj XLI i XLII kod kojih je uticaj refrakcije ogroman imaju takođe ogromno odstupanje u zatvaranju i to istog znaka.

4. Kod ostalih poligona čija su nezatvaranja velika uticaj refrakcije je više manje neznan, što znači da razloge nezatvaranja tih poligona treba tražiti u nečem drugom što nije ovde obuhvaćeno. Izuzetak čini poligon XLVII čije je nezatvaranje veliko, a uticaj refrakcije znatan u suprotnu stranu.

5. Uvođenjem popravke za refrakcije srednja kvadratna greška se smanjuje od 49,0 mm na 44,0 mm tj. tačnost samog nivelanja se povećava za 10%.

ODREĐIVANJE SREDNJE TEMPERATURNE RAZLIKE

Ranije su usvojeni srednji temperaturni uslovi $v_1 = -0,3^{\circ}\text{C}$ i $C = -0,2$. Kako je veličina H linearna funkcija temperaturne razlike v_1 , a kako postoji mogućnost da je ova veličina za naše prilike veća od $-0,3^{\circ}\text{C}$, pokušaćemo da je na

TABLICA UTICAJA REFRAKCIJE NA POLIGONE NVT. i PN. I REDA

РЕДНИ БРОЈ	БРОЈ ПОЛИГОНА	ДУЖ S у км	НЕЗАТВА РАЊЕ Δ		УТИЦАЈ РЕФРАК ЦИЈЕ H		Δ-H	3√S	Δ ²	(Δ-H) ²	Δ·H	H ²	K·H	Δ-KH	(Δ-KH) ²
			+	-	+	-									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14		
1	LXII	529	+ 7,4	- 7,1	+ 14,5	69	55	210	- 52	50	- 123	+ 197	388		
2	LVI	368	- 8,5	- 4,6	- 3,9	58	72	15	+ 3,9	21	- 81	- 0,4	0		
3	LIX	407	- 8,5	+ 3,6	- 12,1	61	72	146	- 31	13	+ 6,3	- 14,8	218		
4	LVIII	446	- 9,0	+ 3,6	- 12,6	63	81	158	- 32	13	+ 6,3	- 15,3	235		
5	LII	469	+ 11,7	- 1,1	+ 12,8	65	136	167	- 13	1	- 1,8	+ 13,5	182		
6	LI	406	+ 16,1	+ 1,2	+ 14,9	60	260	222	+ 19	1	+ 2,1	+ 14,0	196		
7	LV	417	- 21,0	+ 3,3	- 24,3	61	440	590	- 69	11	+ 5,8	- 26,8	720		
8	XXXIX	424	+ 24,0	+ 6,2	+ 17,8	62	576	316	+ 14,8	38	+ 10,8	+ 13,2	174		
9	XXXV	423	+ 25,0	+ 12,6	+ 12,4	62	625	154	+ 31,5	158	+ 22,0	+ 3,0	9		
10	XLIX	430	- 21,1	- 4,0	- 17,1	62	445	293	+ 8,4	16	- 7,0	- 14,1	198		
11	XXXIV	281	+ 24,8	- 5,3	+ 30,1	50	616	906	- 13,2	28	- 9,3	+ 34,1	1160		
12	LVII	453	+ 27,4	- 8,0	+ 35,4	64	750	1258	- 21,9	64	- 14,0	+ 41,4	1720		
13	XXX	290	+ 34,3	0,0	+ 34,3	51	1178	1180			0	+ 34,3	1180		
14	LXIX	169	- 41,4	- 4,8	- 36,6	39	1750	1320	+ 19,8	23	- 8,4	- 33,0	1090		
15	XXIX	226	- 48,1	- 6,2	- 41,9	45	2320	1758	+ 29,8	38	- 10,8	- 37,3	1390		
16	LXI	354	- 49,2	- 5,3	- 43,9	56	2420	1920	+ 26,1	28	- 9,4	- 39,8	1600		
17	XL	461	- 54,1	+ 6,4	- 60,5	64	2930	3650	- 34,6	41	+ 11,2	- 65,3	4260		
18	L	283	- 59,1	- 1,8	- 57,3	50	3500	3280	+ 10,3	3	- 3,2	- 55,9	3120		
19	XLI	430	+ 60,7	+ 44,4	+ 16,3	62	3680	266	+ 2660	1990	+ 77,6	- 16,9	285		
20	LXVII	247	+ 62,0	- 4,5	+ 66,5	47	3840	4420	- 27,9	20	- 7,9	+ 69,9	4900		
21	XLVIII	357	+ 81,2	- 13,1	+ 94,3	57	6590	8800	- 106,4	172	- 22,9	+ 104,1	10870		
22	XLII	603	- 143,5	- 3,82	- 105,3	74	20600	11600	+ 54,80	1460	- 66,8	- 76,7	5900		
Σ			- 88,9	- 2,7	- 66,2		52936	42629	+ 7368	489	- 39,6	- 49,3	39795		
							$n = \frac{207}{11} = 18,8$	$n_0 = 14,0$	$K = \frac{\sum \Delta H_i}{\sum H_i} = 175$					$m_{\Delta-KH} = 42,5$	

bazi naših podataka odredimo, pretpostavljajući da je eksponent c konstantan, što svakako nije ali za približna računanja može se tako smatrati. Ovo možemo tim pre, jer osetne promene eksponenta c prouzrokuju neznatne promene popravke H .

Ako pretpostavimo da je v_1 k puta veće od usvojenog tada će i popravka za refrakciju biti isto k puta veće tj. biće $k \cdot H$. I sada možemo postaviti problem: odrediti tako k da je

$$\sum (\Delta_i - kH_i)^2 = \min$$

tj. odrediti k odnosno v_1 po metodi najmanjih kvadrata koristeći odsutanja naše nivelmanske mreže.

Dalje dobijamo

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial k} = 2 \sum (\Delta_i - kH_i) \cdot H_i = 0$$

$$k = \frac{\sum \Delta_i \cdot H_i}{\sum H_i^2}$$

U stupcu 10) i 11) priložene tabele su sračunate sume na osnovu kojih se dobija

$$k = \frac{7368}{4189} = 1,75$$

Znači jednim vrlo grubim postupkom, koji kao takav ne zaslužuje znatno poverenje, ali ipak ukazuje na važnost problema dobili samo da je

$$v_1' = k \cdot v_1 = -0,52$$

Ako sada formiramo nove vrednosti popravaka, odnosno u našoj tabeli odstupanja zbog refrakcije $k \cdot H$ odnosno H' što je urađeno u stupcu 12 možemo dobiti nove razlike d tj. nove nezatvaranja poligona, kad se odstrani uticaj refrakcije, što je urađeno u stupcu 13. Sada srednja greška nezatvaranja iznosi 42,5 mm što znači da je ona u odnosu na prvobitnu smanjena za 13%.

ZAKLJUČAK

Na osnovu svega rečenog sledi da je nivelmanska refrakcija jedan od glavnih prouzrokovala sistematske greške u nivelmanu, odnosno problem br. 1 koga treba rešavati. Kako je i slučajna greška nivelanja takođe glavnim delom posledica refrakcije, a kako je vrlo komplikovano očistiti nivelman od slučajnih uticaja refrakcije, to pri sadašnjim raspoloživim mogućnostima nema monogo smisla ni nastojati u tome, pogotovu što na velikim dužinama slučajna greška manje dolazi do izražaja. Sistematska greška poprima slučajni karakter, ako nivelana linija često menja znak nagiba, ali na dugim linijama nagiba istog znaka, ona je znatna čak i vrlo velika.

Kod zatvorenog poligona, ako postoji simetričnost nagiba, sistematska greška ne dolazi do izražaja, ali ako nagibi nisu simetrični, ona može biti znatna, čak i vrlo velika, i zato je nužno potrebno odstraniti ovaj sistematski uticaj refrakcije.

Sistematski uticaj se može eliminisati, ako se odredi ili izračuna koeficijent H_0 , a od toga da li on odgovara srednjim temperaturnim uslovima za godinu ili pak za svaki mesec, zavisi koliko će tačna biti eliminacija. Svakako je poželjno da se H_0 odredi za svaki mesec u toku sezone nivelanja. I na kraju problem sistematske greške zbog refrakcije se svodi na što brižljivije određivanje veličine H_0 , koja se može odrediti na dva načina: ili merenjem temperaturnih razlika na raznim visinama, pa izračunati H_0 po nekoj od navedenih jednačina, ili eksperimentalno nivelajući na jednom malom opitnom poligonu izrazito nesimetričnih nagiba.

RESUMÉ: Après avoir mentionné les données théoriques de divers auteurs à l'aide desquelles on calcule la correction de la réfraction de nivellement et son influence sur le nivellement, l'auteur applique les dites données sur le nivellement de haute précision de notre pays,