

Trigonometriški nivelman u poligonoj mreži

Trigonometriški nivelman se postepeno sve više primenjuje kao metod za određivanje visinskih razlika u poligonoj mreži, a naročito tamo, gde se traži primerna tačnost podataka, a nagnutost terena ne dozvoljva primenu geometriškog nivelmana.

Uspoređujući trigonometriški način određivanja visinskih razlika sa tahimetrijskim (kod poligona gde se strane mere pantljkikom) vidimo, da ima trigonometrijsko određivanje osetne prednosti kako u pogledu tačnosti dobivenih podataka tako i u pogledu ekonomičnosti rada. Pošto navedena preimućstva postizavamo kod upotrebe istih instrumenata (tahimetar sa tri konca), to se prirodno može i mora očekivati, da će tahimetrija u poligonoj mreži postepeno ustupiti svoje mesto trigonometrijskom nivelmanu.

Veća tačnost podataka dobivenih trigonometrijskim nivelmanom naspram tahimetriji neosporna je stvar, a postiže se prvenstveno zbog tačnijeg merenja dužina uz primenu tačnijeg načina računanja visinskih razlika. Veća ekonomičnost proizlazi iz činjenice što se kod trigonometrijskog nivelmana uzima manji broj elemenata merenja (mere se samo visinski uglovi, zadovoljavajući se sa relativno grubim viziranjem kod minimalno prokrćenih vizura, bez dangubnog višestrukog osetljivog čitanja otsećaka na letvi sa ograničenom dužinom vizure). To ima uticaj na obim terenskih pa i kancelariskih računskih operacija. Pored toga merenja visinskih uglova kod trigonometrijskog nivelmana može se obaviti uz merenje horizontalnih uglova, koristeći pri tome samo značke (bez letava) sa naročitim pomičnim markama, koje se nameštaju na visinu vizure.

Ako uzmemo u obzir sve pozitivne a i po ekonomičnosti rada negativne strane, od kojih je glavna negativna strana — neizbežan višak stanica kod poligonih strana sa više od jednog preloma, smatram, da ima ipak trigonometrijski nivelman osetna preimućstva pred svakim drugim načinom određivanja visinskih razlika u jače nagnutim terenima. Preimućstva povećavaju se još i činjenicom, što se sračunavanje visinskih razlika uz nezatno preinačenje 18^a obrasca može obaviti zajedno i u istom obrascu kao i redukcija poligonih strana.

Upoznavanje sa preimućstvima i praktičnom primenom trigonometrijskog visinomerstva u poligonoj mreži važno je iz razloga, što se je kod predratnog novog premera u Srbiji primjenjivala tahimetrija kao jedini način određivanja visinskih razlika (osim kod varoških premera), pa se još i danas u geodetskoj službi oseća uticaj te stare navike.

Iz slike se može direktno čitati, da visinska razlika krajeva linije pantljičke iznosi

$$\Delta H_p = S' \cdot \sin \alpha + \Delta_1 + \Delta_2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

a konačna visinska razlika krajišta strane:

$$\Delta H_{AB} = \Delta H_p - p \quad \dots\dots\dots (2)$$

Korekcije pomoćne visinske razlike $S' \cdot \sin \alpha$ iz jednačine (1) predstavljaju sledeće vrednosti:

$$\Delta_1 = (i - h + p) \cdot \cos^2 \alpha$$

$$\Delta_2 = \frac{(i - h + p)^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha}{2 S'}$$

Predznak za vrednost Δ_1 zavisao je od vrednosti $(i - h + p)$; a vrednost Δ_2 kod elevacionih uglova negativna je, a kod depresivskih uglova pozitivna.

Radi bržeg sračunavanja vrednosti Δ_1 i Δ_2 sastavljene su priložene tablice I i II.

Tablica I. služi za sračunavanje korekcije Δ_1 . Iz ove tablice mogu se direktno uzimati vrednosti $(i - h + p) \cdot \cos^2 \alpha$ za svaka dva cela stepena uglova od $0^\circ - 46^\circ$ i za vrednost $(i - h + p)$ od 10 do 90 cm za svaki decimetar. Za ostale vrednosti $(i - h + p)$ unutar jednog decimetra, tablica ne sadrži vrednosti $(i - h + p) \cos^2 \alpha$, ali se u tom slučaju može upotrebiti vrednost iz kolone »r«, koja predstavlja redukciju (smanjivanje) vrednosti $(i - h + p)$ izraženo u sekundimetrima, dakle $(i - h + p) \cdot \cos^2 \alpha = (i - h + p) - r$. Redukcija »r« povećanjem ugla i divergencije linija sporo se menja, pa je zbog toga rad olakšan a stroga interpolacija za međuvrednosti nepotrebna. Tablica I. sadrži pored toga i prirodne vrednosti trigonometrijske funkcije $\cos^2 \alpha$, pomoću kojih se može za svaku vrednost $(i - h + p)$ sračunati pripadajuća vrednost $(i - h + p) \cdot \cos^2 \alpha$, uz relativno grubu interpolaciju, običnim logaritmarom. Vrednost $(i - h + p)$ iznosiće obično okrugli broj decimetara, o čemu se može i treba kod merenja visinskih elemenata i izdizanja pantljičke voditi računa.

Vrednost Δ_2 normalno uošte neće doći u obzir, pošto iznosi kod maksimalne vrednosti produkta " $\cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha$ " t. j. kod ugla 35° i dužine strane 100 m te izuzetne maksimalne vrednosti $(i - h + p) = 4.00$ m — svega 3 cm. Ukoliko bi bila dužina strane S' veća ili manja od 100 m, potrebno je vrednost uzetu iz tablice za pripadajući ugao i vrednost $(i - h + p)$ pomnožiti sa faktorom $100/S'$

RAČUNANJE VISINSKIH RAZLIKA I REDUKCIJA DUŽINA NA HORIZONT

Za računanje visinskih razlika i redukciju poligonih strana na horizont upotreбили smo preinačeni trigonometrijski obrazac 18^a onakav, kako je ovde u prilogu prikazan.

Upoređujući ovaj obrazac sa propisanim 18^a obrascem vidimo, da se oba obrasca u bitnim rubrikama slažu međusobom. Nove su u našem obrascu rubrike 8, 9 i 10, delimično su promenjene rubrike za upisivanje visinskih uglova i njihovih vrednosti trig. funkcija t. j. rubrika 6 i 7 te rubrika 12 koja služi za upisivanje redukcije. U obrazac su uvedeni i znaci za visinske uglove

Tablica I

Redukcija vrednosti $(i-h+p)$ sa \cos^2 funkcijom.

$\frac{i-h+p}{\text{Vis. ugao}}$	$\Delta_1 = (i-h+p) \cdot \cos^2 \alpha = (i-h+p) - r$														$\cos^2 \alpha$	d.	Vis. ugao				
	u centimetrima.																				
	10	r	20	r	30	r	40	r	50	r	60	r	70	r	80	r	90	r			
0°	10.00	-	20.00	-	30.00	-	40.0	-	50.0	-	60.0	-	70.0	-	80.0	-	90.0	-	1.000	1	0°
2	9.99	-	19.98	-	29.96	-	39.9	-	49.9	-	59.9	-	69.9	-	79.9	-	89.9	-	0.999	4	2
4	9.95	-	19.90	-	29.85	-	39.8	-	49.8	-	59.7	-	69.7	-	79.6	-	89.6	-	0.995	6	4
6	9.89	-	19.78	-	29.67	-	39.6	-	49.5	0.5	59.3	0.7	69.2	0.8	79.1	0.9	89.0	1.0	0.989	8	6
8	9.81	-	19.62	-	29.42	0.6	39.2	0.8	49.0	1.0	58.8	1.2	68.6	1.4	78.5	1.5	88.3	1.7	0.981	11	8
10	9.70	-	19.40	1	29.10	0.9	38.8	1.2	48.5	1.5	58.2	1.8	67.9	2.1	77.6	2.4	87.3	2.7	0.970	13	10
12	9.57	-	19.14	1	28.70	1.3	38.3	1.7	47.8	2.2	57.4	2.6	67.0	3.0	76.5	3.5	86.1	3.9	0.957	16	12
14	9.41	1	18.82	1	28.24	1.8	37.7	2.3	47.1	2.9	56.5	3.5	65.9	4.1	75.3	4.7	84.7	5.3	0.941	17	14
16	9.24	1	18.48	2	27.72	2.3	37.0	3.0	46.2	3.8	55.4	4.6	64.7	5.3	73.9	6.1	83.2	6.8	0.924	19	16
18	9.05	1	18.10	2	27.14	2.9	36.2	3.8	45.2	4.8	54.3	5.7	63.3	6.7	72.4	7.6	81.4	8.6	0.905	22	18
20	8.83	1	17.66	2	26.49	3.5	35.3	4.7	44.2	5.8	53.0	7.0	61.8	8.2	70.6	9.4	79.5	10	0.883	23	20
22	8.60	1	17.19	3	25.79	4.2	34.4	5.6	43.0	7.0	51.6	8.4	60.2	9.8	68.8	11.2	77.4	13	0.860	25	22
24	8.35	2	16.69	3	25.04	5.0	33.4	6.6	41.7	8.3	50.1	9.9	58.4	12	66.8	13.2	75.1	15	0.835	27	24
26	8.08	2	16.16	4	24.23	5.8	32.3	7.7	40.4	9.4	48.5	11.5	56.6	13	64.6	15.4	72.7	17	0.808	28	26
28	7.80	2	15.59	4	23.39	6.6	31.2	8.8	39.0	11	46.8	13.2	54.6	15	62.4	17.4	70.2	20	0.780	30	28
30	7.50	2.5	15.00	5	22.50	7.5	30.0	10	37.5	12	45.0	15	52.5	17	60.0	20	67.5	23	0.750	31	30
32	7.19	3	14.38	6	21.58	8.4	28.8	11	36.0	14	43.2	17	50.3	20	57.5	22	64.7	25	0.719	32	32
34	6.87	3	13.75	6	20.62	9.4	27.5	12	34.4	16	41.2	19	48.1	22	55.0	25	61.9	28	0.687	32	34
36	6.55	3	13.09	7	19.64	10.4	26.2	14	32.7	17	39.3	21	45.8	24	52.4	28	58.9	31	0.655	34	36
38	6.21	4	12.42	8	18.63	11	24.8	15	31.1	19	37.3	23	43.5	26	49.7	30	55.9	34	0.621	34	38
40	5.87	4	11.74	8	17.60	12	23.5	16	29.3	21	35.2	25	41.1	29	47.0	33	52.8	37	0.587	35	40
42	5.52	4	11.05	9	16.57	13	22.1	18	27.6	22	33.1	27	38.7	31	44.2	36	49.7	40	0.552	35	42
44	5.17	5	10.35	10	15.52	14	20.7	19	25.9	24	31.1	29	36.2	34	41.4	39	46.6	43	0.517	35	44
46	4.82	5	9.65	10	14.48	16	19.3	21	24.1	26	29.0	31	33.8	36	38.6	41	43.4	47	0.482	35	46

Tablica II

Vrednosti Δ_2 u santimetrima za $S'=100m$.

$i-h+p$ vis. ugao α	$\Delta_2 = \frac{(i-h+p)^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha}{2 S'}$ za $S'=100m$									$\cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha$	d	vis. ugao
	60 _{cm}	80	100	120	140	160	180	200	400			
0°	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.060	35	0°
2	0.01 _{cm}	0.01	0.02	0.03	0.03	0.05	0.05	0.07	0.29	0.055	34	2
4	0.01	0.02	0.03	0.05	0.07	0.09	0.11	0.14	0.57	0.069	34	4
6	0.02	0.03	0.05	0.07	0.10	0.13	0.17	0.21	0.86	0.103	33	6
8	0.02	0.04	0.07	0.10	0.13	0.18	0.22	0.27	1.13	0.136	32	8
10	0.03	0.05	0.08	0.12	0.17	0.22	0.27	0.34	1.40	0.168	31	10
12	0.04	0.06	0.10	0.14	0.20	0.26	0.33	0.40	1.66	0.199	29	12
14	0.04	0.07	0.11	0.16	0.23	0.29	0.37	0.46	1.90	0.228	27	14
16	0.05	0.08	0.13	0.18	0.25	0.33	0.42	0.52	2.13	0.255	25	16
18	0.05	0.09	0.14	0.20	0.28	0.36	0.46	0.57	2.33	0.280	22	18
20	0.05	0.10	0.15	0.22	0.30	0.39	0.49	0.61	2.52	0.302	20	20
22	0.06	0.10	0.16	0.23	0.32	0.41	0.53	0.65	2.68	0.322	17	22
24	0.06	0.11	0.17	0.24	0.33	0.44	0.55	0.69	2.83	0.339	15	24
26	0.06	0.11	0.18	0.26	0.35	0.46	0.58	0.72	2.95	0.354	12	26
28	0.07	0.12	0.18	0.27	0.36	0.47	0.60	0.74	3.05	0.366	9	28
30	0.07	0.12	0.19	0.27	0.37	0.48	0.61	0.76	3.12	0.373	6	30
32	0.07	0.12	0.19	0.27	0.38	0.48	0.62	0.77	3.17	0.381	3	32
34	0.07	0.12	0.19	0.28	0.38	0.49	0.63	0.76	3.20	0.384	0	34
36	0.07	0.12	0.19	0.28	0.38	0.50	0.63	0.78	3.20	0.384	2	36
38	0.07	0.12	0.19	0.28	0.38	0.49	0.63	0.77	3.19	0.382	5	38
40	0.07	0.12	0.19	0.27	0.37	0.48	0.62	0.76	3.15	0.377	8	40
42	0.07	0.12	0.19	0.27	0.37	0.48	0.61	0.74	3.09	0.369	10	42
44	0.06	0.12	0.18	0.26	0.35	0.46	0.59	0.73	3.00	0.359	12	44
46	0.06	0.11	0.17	0.25	0.34	0.45	0.57	0.70	2.89	0.347		46

i visinske razlike te se ti znaci odnose na osnovni pravac uvođenja podataka od tačke A ka tački B. Sabiranjem parcijalnih vrednosti visinskih razlika od preloma do preloma dobivamo na taj način kontrolnu vrednost za ukupnu visinsku razliku.

Pošto se ukupna visinska razlika poligone strane sračunava iz visinskog ugla merenog direktnim viziranjem od jednog krajišta do drugog, a u nezavisnosti sa merenjima visinskih uglova na delovima strane i iz redukovane dužine poligone strane, kao rezultata parcijalnih merenja visinskih elemenata i dužina od preloma do preloma, nama obavezno slaganje na taj način dobijene ukupne visinske razlike za zbirom parcijalnih visinskih razlika daje dobru kontrolu za pravilnost podataka merenja i računanja visinskih razlika i redukcije.

U pogledu redukcije ovaj obrazac podešen je tako, da se ista može sračunati na dva proizvoljna načina, što omogućava upotrebu obrasca i za tačnija redukovanja kao na pr. u triangulaciji i t. sl. Za sračunavanje redukcije, kad je na raspolaganju mašina dolazi u obzir formula $r = S' (1 - \cos a)$, a za kontrolu $D = S' \cdot \cos a$ i konačno $D = S' - r$. Razume se ovo važi samo za slučaj, kad je visinski ugao identičan sa nagibom linije pantljičke. Kod upotrebe formule $D = S' \cdot \cos a$ potrebno je, da se iza parcijalna otstojanja od preloma do preloma formira sredina između oba merenja u rubrici 5, te se svaki deo strane zasebno redukuje. Da se kod sabiranja strana u 18^a obrascu ovi iznosi ne bi duplo sabirali, potrebno je ove vrednosti na neki način naročito obeležiti — eventualno sa zagradom. Predloženi obrazac dopušta redukciju strana i na do sada uobičajeni način t. j. polazeći od dane visinske razlike upisate u tom slučaju direktno u rubriku 11, pa eventualno preko sračunavanja visinskog ugla u rubrici 6, ili bez sračunavanja ugla — tablicama.

U koloni 8 sračunava se, u slučaju izdizanja pantljičke, visinska razlika krajeva linije pantljičke ΔH_p po jednačini (1) radi redukcije.

Konačna visinska razlika krajišta strane sračunava se po jednačini (2):

$$\Delta H_{AB} = \Delta H_p - p$$

Uz predloženi primer računanja 18^a obrasca, potrebno je skrenuti pažnju na činjenicu, da je isto izvedeno samo u jednom — osnovnom pravcu računanja poligona koristeći pri tome podatke merenja iz oba smera. Srednja vrednost ugla, koju bi trebalo računati inače u 2^v obrascu, sračunata je u rubrici 6 po jednačini:

$$\alpha = \frac{\alpha_A - \alpha_B}{2}$$

Ta vrednost upisata je u treći red sa znakom koji proizlazi iz osnovnog pravca (α_A vizure). Srednja vrednost divergence paralele linije strane i obeju linija sračunata po jednačini

$$(i - h) = \frac{i_A - h_B}{2} - \frac{i_B - h_A}{2}$$

iz podataka u rubrikama 9 i 10, a upisana je u treći red rubrike 10. Posle sračunavanja srednjih vrednosti ugla α i $(i - h)$ u svemu postupa se po jednačini (1) t. j. kao, da se računa, iz podataka merenja za jedan pravac. Razumljivo je, da visinska razlika sračunata iz srednjih vrednosti visinskih elemenata α

i ($i-h$) po vrednosti jednaka je aritmetičkoj sredni visinskih razlika sračunatih za svaki pravac ponaosob, dakle i

$$\Delta H = \frac{\Delta H_{AB} - \Delta H_{BA}}{2}$$

Računanje visinskih razlika na ovaj način t. j. iz srednjih vrednosti visinskih elemenata svakako ubrzava računanje trigonometriškog nivelmana i daje bolju pretstavu o znaku visinske razlike, ali bi se moglo tome načinu prigovoriti zato, što kod strana bez preloma u ovom slučaju nedostaje nam druga vrednost za visinsku razliku, te bi se zbog toga i odstupanje između merenja napred i nazad moglo pratiti samo po razlici između visinskih uglova merenih u pravcu napred i nazad. Ovom prigovoru zbog nepouzdanja u rezultat radi jednokratnog računanja visinske razlike, moglo bi se udovoljiti delimice uvođenjem kontrolnog računanja sa različitim računskim pomagalima (mašinom i logaritmima), a nedostatak dvaju podataka za visinsku razliku ipak bi i u tom slučaju ostao, a taj bi se mogao ukloniti samo sa zadržavanjem računanja visinske razlike u oba pravca kao što je to predviđeno u 28^p obrascu. I u ovoj drugoj alternativni računanje visinskih razlika može se obaviti u predloženom 18^a obrascu, koristeći u tu svrhu dva horizontalna reda (ili polureda uz izvesnu transformaciju obrasca), pa se postavlja pitanje, dali je uopšte potrebno voditi naročiti 28^p obrazac. Ovo pitanje bilo je uzgredno postavljeno i na konferenciji prilikom pretresanja predloga pravilnika II. i III. deo u Beogradu i tom prilikom čulo se, da u nekoj republici trigonometriški obrazac 28^p nije u upotrebi.

Iako je bio na toj konferenciji načelno usvojen predlog Geodetske uprave Slovenije u pogledu sračunavanja visinskih razlika određenih trigonometriških nivelmanom u poligonoj mreži, ipak smatram, da bi i ovi dopunski detalji iz ovog članka kao upozorenje i na ostale mogućnosti rešenja mogli korisno poslužiti kod donošenja konačnih propisa s toga područja.

RESUMÉ: Dans l'article ci-dessus l'auteur présente certaine amélioration de procédé de calcul des différences des hauteurs à l'aide de nivellement trigonométrique, et la réduction des longuers sur horisont. Pour faciliter le calcul il donne le tableau I et II, et propose un nouveau formulaire.