Prof. Dr. Ing. Nikola Ćubranić — Zagreb

Srednja pogreška dužine iz položaja dviju točaka

U posljednje vrijeme razvila se u geodetskim krugovima u Zagrebu, a i izvan naše zemlje diskusija o veličini srednje pogreške u dužini između dvije točke, ako je data srednja pogreška položaja svake točke. Redovito se kod toga uzimalo, što je za ocjenu točnosti najjednostavnije i najpraktičnije, da su srednje položajne pogreške obiju datih točaka A i B, koje definiraju odnosnu dužinu, jednake t. j. $m_{p1} = m_{p2} = m_p$. Kod ovoga moramo odmah naglasiti, da je srednja pogreška položaja definirana izrazom.

$$m_p = \sqrt{m^2_x + m^2_y} \qquad \ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

Povod za ovakvu diskusiju je činjenica, da u mnogim geodetskim i astronomskim udžbenicima stoji, da je srednja pogreška u dužini između dvije točke, koja je svaka data sa srednjom pogreškom položaja m_p, izrazom $M_d = m_p\sqrt{2}$. Ovaj se izraz bez dubljeg ulaženja u bit stvari jednostavno nameće prostim zakonom o prirastu pogrešaka.

Diskusija, kako kod nas tako i na strani, sastojala se uglavnom u tome, što su neki dokazivali, da je $M_d = m_p$, a drugi opet da je $M_d = m_p\sqrt{2}$.

Takvih diskusija bilo je u naučnim geodetskim krugovima i ranije o istoj stvari, doista ne kod nas, jer smo ranije bili na tom području dosta siromašni. Mnogi pojmovi nisu bili dovoljno jasni. Iako su ti pojmovi u naučnim krugovima prilično razjašnjeni, generacije, koje ih nasljeđuju primaju gotove rezultate i formule, pa ne ulazeći u bit stvari mogu donijeti ponekad i krive zaključke.

Ja ću ovdje odmah naglasiti da nema sumnje, i da je po mom mišljenju već ranije razjašnjeno i dokazano da je $M_d = m_p$.

Neki naučnici to dokazuju dubokom analizom srednjih pogrešaka i njihovog postanka na pr. Pinkwart: Zur Definition des mittleren Punktfehlers und der mittleren Fehlerellipse. Z. V. 1938. st. 5—14. Mnogi, naročito praktičari, izvode zaključak, da je $M_d = m_p$ prosto diferencirajući formulu

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

kao

$$dD = \frac{\partial D}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial D}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial D}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial D}{\partial y_2} dy_2 \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Ako sračunamo parcijalne derivacije imamo

$$\frac{\partial D}{\partial x_1} = -\frac{x_2 - x_1}{D}\,; \quad \frac{\partial D}{\partial x_2} = \frac{x_2 - x_1}{D}\,; \text{ i t. d.}$$

i pređemo na srednje pogreške:

$$M^2_d = \left(\frac{x_2 - x_1}{D}\right)^2 m^2_{x1} + \left(\frac{x_2 - x_1}{D}\right)^2 m^2_{x2} + \left(\frac{y_2 - y_1}{D}\right)^2 m^2_{y1} + \\ + \left(\frac{y_2 - y_1}{D}\right)^2 m^2_{y2}$$

Pošto imamo zadano samo m_p to možemo postaviti da je $dx_1 = dy_1 = dx_2 = dy_2 = m_r$ pa dobivamo

$$M_d = \frac{2D^2}{D^2} m^2_r = 2\, m^2_r = m^2_p \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Ja ću pokušati razjasniti taj problem na dva potpuno druga načina, nego što je do sada dokazivano u geodetskoj literaturi. Za prvi način polazimo od izraza (1). Izvod po formuli (2) može i ne biti potpuno ispravan. Naime koordinate x_1, y_1, x_2, x_2 u izrazu (1) nisu nezavisne promjenljive, već su funkcije mjerenih veličina.

Ako provedemo zajedničko određivanje i zajedničko izjednačenje obih točaka, onda će se koordinate točaka dobiti rješenjem normalnih jednadžbi:

$$\left.\begin{array}{l} [aa]\,\Delta x_1 + [ab]\,\Delta y_1 + [ac]\,\Delta x_2 + [ad]\,\Delta y_2 + [al] = 0 \\ [ab]\,\Delta x_1 + [bb]\,\Delta y_1 + [bc]\,\Delta x_2 + [bd]\,\Delta y_2 + [bl] = 0 \\ [ac]\,\Delta x_1 + [bc]\,\Delta y_1 + [cc]\,\Delta x_2 + [cd]\,\Delta y_2 + [cl] = 0 \\ [ad]\,\Delta x_1 + [bd]\,\Delta y_1 + [cd]\,\Delta x_2 + [dd]\,\Delta y_2 + [dl] = 0 \end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

gdje će biti $x_1 = x^0{}_1 + \Delta x_1$, $x_2 = x^0{}_2 + \Delta x_2$
$y_1 = y^0{}_1 + \Delta y_1$, $y_2 = y^0{}_2 + \Delta y_2$
a_i, b_i, c_i, d_i koeficijenti smjera,
l_i vrijednosti pojedinih mjerenja,

a $x^0{}_i$ $y^0{}_i$ približne vrijednosti koordinata, dakle konstante, pa ćemo nepoznanice Δx_1, Δx_2, Δy_1 Δy_2 dalje radi kratkoće obilježavati jednostavno sa x_1, x_2, y_1, y_2.

Sa spomenutim oznakama riješivši jednadžbe (4) dobivamo u eksplicitnom obliku:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -\alpha_1 l_1 - \alpha_2 l_2 \cdots - \alpha_k l_k - \alpha_{k+1} l_{k+1} \cdots - \alpha_n l_n \\ y_1 = -\beta_1 l_1 - \beta_2 l_2 \quad - \beta_k l_k - \beta_{k+1} l_{k+1} \quad - \beta_n l_n \\ x_2 = -\gamma_1 l_1 - \gamma_2 l_2 \quad - \gamma_k l_{\alpha} - \gamma_{k+1} l_{k+1} \quad - \gamma_n l_n \\ y_2 = -\delta_1 l_1 - \delta_2 l_2 \quad - \delta_k l_k - \delta_{k+1} l_{k+1} \quad - \delta_n l_n \end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots (5)$$

gdje će $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$, biti neki koeficijenti, kad se riješe jednadžbe (4). Iz jednadžbi (5) vidi se kako nepoznanice ovise od mjerenih veličina. Diferenciramo li izraz (1), to ćemo obzirom na (5) dobiti:

$$
\begin{aligned}
dD = & \frac{\partial D}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial l_1} dl_1 + \cdots \frac{\partial D}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial l_k} dl_k + \cdots \frac{\partial D}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial l_n} dl_n + \\
+ & \frac{\partial D}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial l_1} dl_1 + \cdots \frac{\partial D}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial l_k} dl_k + \cdots \frac{\partial D}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial l_n} dl_n + \\
+ & \frac{\partial D}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial l_1} dl_1 + \cdots \frac{\partial D}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial l_k} dl_k + \cdots \frac{\partial D}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial l_n} dl_n + \\
+ & \frac{\partial D}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial l_1} dl_1 + \cdots \frac{\partial D}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial l_k} dl_k + \cdots \frac{\partial D}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial l_n} dl_n +
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots (6)
$$

Iz (5) sračunamo $\frac{\partial x_1}{\partial l_1}, \frac{\partial x_1}{\partial l_2} ----, \frac{\partial y_2}{\partial l_n}$

Označimo $\frac{\partial D}{\partial x_1} = F_1, \frac{\partial D}{\partial y_1} = F_2, \frac{\partial D}{\partial x_2} = F_3, \frac{\partial D}{\partial y_2} = F_4,$

te uzmimo da su mjerenja vršena istom točnošću t. j. $d l_1 = d l_2 = d l_n = m$ pa dalje prema izrazu (6) pređimo na srednje pogreške:

$$
M_d^2 = m^2 \left\{ \begin{array}{llll}
[\alpha\alpha]F_1^2 + & 2[\alpha\beta]F_1F_2 + & 2[\alpha\gamma]F_1F_3 + & 2[\alpha\delta]F_1F_4 \\
& + [\beta\beta]F_2^2 & + 2[\beta\gamma]F_2F_3 & + 2[\beta\delta]F_2F_4 \\
& & + [\gamma\gamma]F_3^2 & + 2[\gamma\delta]F_3F_4 \\
& & & + [\delta\delta]F_4^2
\end{array} \right\} \qquad \cdots\cdots (7)
$$

Odnosno

$$M^2_d = \frac{m^2}{P_d} \qquad \cdots\cdots (8)$$

Izraz 1) P_d, vitičaste zagrade u izrazu (7), dobivamo jednostavnije po formuli:

$$\frac{1}{P_d} = \frac{F^2_1}{[aa]} + \frac{[F_2 \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} + \frac{[F_3 \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} + \frac{[F_4 \cdot 3]^2}{[dd \cdot 3]} \qquad \cdots\cdots (9)$$

Pribrojnici u formuli (9) dobiju se najlakše, da se numeričke vrijednosti parcijalnih derivacija F_1, F_2, F_3, F_4, upišu pored normalnih jednadžbi (4), te kod riješavanja jednadžbi izvrši isti postupak eliminacije kao i sa svakim drugim članom te jednadžbe. (Vidi Čubranić — Račun izjednačenja str. 116—127).

Po formuli (7) odnosno (8) i (9) dobit ćemo svakako najtočnije veličinu za srednju pogrešku u dužini. No ta nam formula još ne kazuje u kakvoj vezi stoji srednja pogreška u dužini sa srednjom pogreškom koordinata, što nas ovdje interesira. Mogli bi sračunati srednje pogreške svake od koordinata, a to je dosta dugačak posao, pa se to u praksi redovito ne provodi, pogotovo kad imamo ovako odrediti zajedno 4 nepoznanice (kako se zasebno određuje točka po točka, onda je svakako stvar mnogo lakša, pa se računanja onda i vrše).

Redovito će u praksi m_x biti različito od m_y, no radi jednostavnije ocjene točnosti često uzimamo, kao i u našem slučaju, da je $m_x = m_y$, t. j. ocjenjuje se pogreška položaja sa $m^2_p = m^2_x + m^2_y$, što je za samo ocjenu točnosti redovito dovoljno. Uzevši ovo kao osnovno, moramo sad pravilno ocijeniti srednju pogrešku u dužini prema izrazu (7). Da bi sam izvod olakšali uzet ćemo da se radi o dužini između dviju točaka, koje se nalaze na podjednakoj udaljenosti od jedne osi koordinatnog sistema. Neka su recimo obje točke jednako udaljene od osi y. U tom će slučaju biti $F_1 = F_3 = 0$, $F_2 = -1$, $F_4 = 1$, pa ćemo prema izrazu (7) dobiti:

$$M^2_d = m^2 ([\beta\beta] + [\delta\delta] - 2\,[\beta\delta]) \qquad \ldots\ldots\ldots (10)$$

Obzirom na razne predznake, koje mogu poprimiti pojedini β i δ bit će $[\beta\delta]$ veoma mala veličina prema dva prva kvadratna člana, pa možemo pisati:

$$M^2_d = m^2 ([\beta\beta] + [\delta\delta]) = m^2_{y1} + m^2_{y2}$$

t. j.

$$M^2_d = m^2_p \qquad \ldots\ldots\ldots (11)$$

Točke se najčešće određuju i izjednačuju zasebno. Neka je prva točka (x_1, y_1) određena iz mjerenja $l_1, l_2 \ldots l_k$, a drugi iz mjerenja $l_{k+1}, l_{k+2}, \ldots l_n$. U jednadžbama (5) će tada biti koeficijenti

$$\begin{array}{llll} \alpha_{k+1} & \alpha_{k+2} & \ldots\ \alpha_n & \text{jednaki nuli} \\ \beta_{k+1} & \beta_{k+2} & \ldots\ \beta_n & \text{,,} \quad \text{,,} \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \ldots\ \gamma_k & \text{,,} \quad \text{,,} \\ \delta_1 & \delta_2 & \ldots\ \delta_k & \text{,,} \quad \text{,,} \end{array}$$

pa ćemo za dD dobiti prema izrazu (6):

$$\begin{aligned} dD = & -(F_1\alpha_1 + F_2\beta_1)m \\ & -(F_1\alpha_2 + F_2\beta_2)m \\ & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & -(F_1\alpha_k + F_2\beta_k)m \\ & \qquad\qquad -(F_3\gamma_{k+1} + F_4\delta_{k+1})m \\ & \qquad\qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & \qquad\qquad -(F_3\gamma_n + F_4\delta_n)\,m \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots (6)'$$

Pređemo li na srednje pogreške i sumiramo dobit ćemo:

$$M^2_d = m^2 \left\{ \begin{array}{l} F_1^2[\alpha\alpha] + 2\,F_1F_2\,[\alpha\beta] + F_2^2\,[\beta\beta] \\ + F_3^2[\gamma\gamma] + 2\,F_3F_4\,[\gamma\delta] + F_4\,[\delta\delta] \end{array} \right\} \qquad \ldots\ldots\ldots (7)'$$

Kako možemo izabrati točke bilo gdje, izabrat ćemo ih i ovdje radi lakšeg sračunavanja da su kao i ranije jednako udaljene od osi y. Možemo uzeti točke po volji prema koordinatnog sistema. Izrazi (5) ostat će isti samo će se mijenjati numeričke vrijednosti α_i, β_i, γ_i, δ_i. Opet će biti $F_1 = o$ i $F_3 = o$ a $F_2 = -1$ i $F_4 = 1$ pa iz formule (7)' dobivamo:

$$M^2_d = m^2 ([\beta\beta] + [\delta\delta] ; \text{ t. j.} \qquad \text{(10)'}$$

$$M^2_d = m^2_{y1} + m^2_{y2} = 2\, m^2_y = m^2_p \text{ ili}$$

$$M_d = m_p \qquad \text{(11)'}$$

Srednju pogrešku u dužini strane možemo dobiti svakako najpravilnije, ako strogo pazimo na točnost pojedinih mjerenja, odnosno određivanja koordinata, kako je to provedeno u formulama (7) i (7)'.

Ako međutim napravimo pretpostavku da je $m_x = m_y$ i da je $m^2_p = m^2_x + m^2_y$, mi zapravo zamišljamo oko točke kružnicu radiusa m_p. U svakom smjeru m_p je je isti (invarijanta).

Obzirom na ovo posljednje možemo za izneseni slučaj i formulu (2 smatrati ispravnom) t. j. da su d_x i d_y nezavisne veličine). Pod tom pretpostavkom daje nam formula (2) isti izraz za srednju pogrešku dužine t. j. $M_d = m_p$ kao formule (7) ili (7)'.

Za ocjenu točnosti pored položajne pogreške točke imamo i elipsu pogrešaka.

Izjednačenjem mjerenja dobivamo definitivne koordinate točaka, a možemo dobiti i srednje pogreške po osi X i osi Y t. j. m_x i m_y. Ta je ocjena točna samo za pogrešku po tim osima. Ako želimo sračunati pogrešku u bilo kojem smjeru moramo sračunati elipsu pogrešaka, pa će ona karakterizirati veličine srednjih pogrešaka u raznim smjerovima.

Minimalna i maksimalna srednja pogreška bit će u smjeru Θ ili u smjeru $\Theta + 90^0$ a sam kut Θ od pozitivnog smjera osi X dobivamo, kako je poznato, iz jednadžbe:

$$\operatorname{tg} 2\,\Theta = \frac{2\, Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}} = \frac{-2\,[ab]}{-([aa] - [bb])} \qquad \text{(12)}$$

Poluosi elipse srednjih pogrešaka dobivamo:

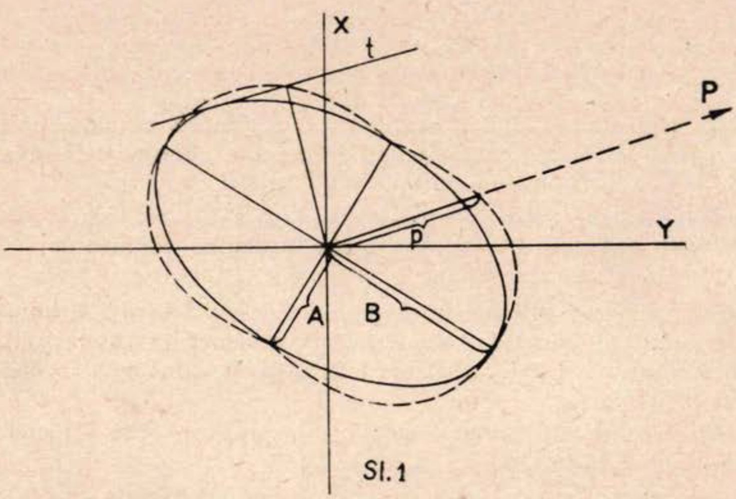
$$\left.\begin{aligned} A^2 &= m^2 \frac{Q_{xx} + Q_{yy} + k}{2} \quad \text{za kut } \Theta \\ B^2 &= m^2 \frac{Q_{xx} + Q_{yy} - k}{2} \quad \text{za kut } \Theta + 90^0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(13)}$$

gdje je m srednja pogreška mjerenja. Veličinu k dobivamo:

$$k = [(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4\, Q^2_{xy}]^{\frac{1}{2}} = \frac{Q_{xx} - Q_{yy}}{\cos 2\,\Theta}$$

a Q_{xx} Q_{xy}, Q_{yy} su poznati koeficijenti težina.

Dobivši A, i B i Θ možemo nacrtati elipsu pogrešaka, koja će dovoljno točno karakterizirat srednje pogreške u željenim smjerovima. Elipsa pogrešaka sa poluosima A i B je zapravo nosioc krivulje pogrešaka, koja se dobije, da na tangente elipse spustimo od ishodišta okomice p $\perp$ t. Dužine od ishodišta do krivulje pogrešaka predstavljaju srednju pogrešku u tom smjeru. Tako je u smjeru P veličina srednje pogreške jednaka dužini p (sl. 1). Krivulja pogrešaka izvučena je na slici crtkano.



Sl. 1

Elipsa pogrešaka, a također i krivulja pogrešaka postat će kružnica kad bude $A = B$ t. j. prema formuli (12), kad je $k = 0$ t. j. elipsa pogrešaka pretvara se u kružnicu pogrešaka s radiusom r

$$r = A = B = \frac{m}{\sqrt{2}} \sqrt{Q_{xx} + Q_{yy}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{m^2_x + m^2_y} \qquad \ldots\ldots (15)$$

Ovdje je očito $m_x = m_y$ pa iz formule dobivamo, u smjeru osi X ili Y, da je $r = m_x = m_y$, što je očito potpuno ispravno.

Međutim pored ovog uveden je pojam srednje položajne pogreške definiran izrazom:

$$m_p = \sqrt{m^2_x + m^2_y} \qquad \ldots\ldots (16)$$

Ove dvije veličine za ocjenu točnosti nisu iste. Sravnjujući izraze (15) i (16) izlazi, da je $m_p = r\sqrt{2}$. Ova okolnost jest glavni razlog čestim razmimoilaženjima i nerazumijevanjima. Imamo dakle dvije mjere za ocjenu točnosti. Obje su one ispravne. Pravilno su izvedene na definiciji srednje pogreške. Ako ih pravilno koristimo dobit ćemo i jednom i drugom mjerom uvijek istu vrijednost za veličinu srednje pogreške, koja nas interesira. To su dva zapravo bitno različita pojma.

Položajnu pogrešku ili pogrešku položaja točke moramo shvatiti dvodimenzijonalnom veličinom, u ravnini. U isto vrijeme dok postoji pogreška točke u smjeru osi X postoji i u smjeru osi Y. Pogreška položaja je očito tada rezultanta tih dviju komponenata, slično kao u mehanici kod sastavljanja dviju sila, s tom razlikom da je u mehanici time dat i smjer sile, a kod pogrešaka smjera nema, nego je rezultanta određena samo po veličini.

Elipsa pogrešaka daje linearne vrijednosti srednje pogreške točke u pojedinim smjerovima, jednodimenzionalne — linearne veličine. Tako u smjeru točke P srednja pogreška točke jednaka je veličini p, a u slučaju kad krivulju pogreška predstavlja kružnica izraz (15) onda je srednja pogreška točke u raznim smjerovima jednaka radiusu kružnice r.

Ako je točka P (sl. 1) bezpogrešna onda je veličina p odnosno u drugom slučaju r srednja pogreška dužine od P do te točke. Ako je i točka P pogrešna, pa pretpostavimo i na točka P istu vrijednost za kružnicu pogrešaka r, dobit ćemo srednju pogrešku dužine $M_d = r\sqrt{2}$. Dobili smo dakle istu vrijednost za srednju pogrešku dužine na temelju srednje pogreške položaja i na temelju elipse pogrešaka.

Pokušat ću ovdje iznijeti još jedan dokaz, koji je možda suvišan, ali je interesantan.

Ako je dat definitivan položaj točke sa srednjom pogreškom položaja m_p razmatrajući problem u ravnini, znači da pojedinačni položaji točke mogu biti istodobno svagdje na obodu kružnice opisane oko definitivnog položaja točke s veličinom radiusa $m_p = \sqrt{m^2_x + m^2_y} = r\sqrt{2}$.

Uzmimo najprije, da imamo dvije točke A i B date položajem P_a i P_b, te da je točka B bezpogrešna a točka A da je određena sa srednjom pogreškom položaja m_a (sl. 2). Dužinu D dobit ćemo kao razliku položaja P_a i P_b, a također i kao aritmetsku sredinu dužine između svake točke na obodu kružnice oko P_a i točke P_b. Uzmimo da su $1, 2 \ldots . n$ položaji točaka na kružnicu oko P_a jednako gusto raspoređeni pod kutovima $\alpha_1, \alpha_2 \ldots . \alpha_n$ od okomice na spojnicu $P_a — P_b$. Na taj način dobit ćemo n pojedinih vrijednosti za dužinu D, odnosno n razlika ΔD od aritmetske sredine. Smatrajući ove razlike kao pojedinačne pogreške u dužini i da je n veliki broj, dobit ćemo srednju pogrešku dužine

$$M^2_d = \frac{[\Delta D^2]}{n} \qquad \ldots\ldots\ (17)$$

Prema slici bit će $\Delta D_i = - m_a \sin \alpha_i$
gdje je $i = 1, 2 \ldots . n$.

Ako uvedemo ove vrijednosti u formulu (17) imamo:

$$M^2_d = \frac{m^2 \ \Sigma \sin \alpha_i}{n}.$$

Ako točke na obodu kružnice uzmemo beskonačno gusto za svaki $d\alpha$ imamo:

$$M^2_d = m^2_a \int_o^{2\pi} \frac{\sin^2\alpha\, d\alpha}{\int_o^{2\pi} d\alpha}$$

$$M^2_d = m^2_a \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right]_o^{2\pi}$$

$$M^2_d = \frac{m^2_a}{2} = \frac{m^2_p}{2}$$

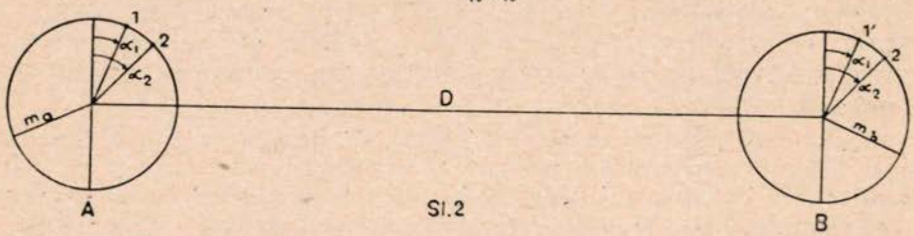
Kako smo ustvrdili odnos srednje pogreške položaja i kružnice pogrešaka t. j. $m_a = m_p = r\sqrt{2}$ dobivamo za naše razmatranje

$$M_d = \frac{m_a}{\sqrt{2}} = r$$

Dobili smo istu veličinu koju smo dobili i na temelju elipse pogrešaka.

Možemo ići korak dalje pa smatrati, da su obje točke A i B date sa srednjim pogreškama položaja m_a i m_b t. j. pojedini položaji točke A mogu biti svagdje na obodu kružnice radiusa m_a, a položaji točke B na obodu kružnice radiusa m_b opisanih oko srednjeg položaja svake točke (sl. 2). Uzmimo n pojedinačnih položaja na jednoj i n na drugoj kružnici raspoređeni jednako gusto i pod istim kutevima a, dobit ćemo $n \cdot n$ pojedinih vrijednosti za veličinu D odnosno $n \cdot n$ razlika ΔD od njihove aritmetske sredine. Smatrajući da je $n \cdot n$ velik broj i da su m_a i m_b male virjednosti obzirom na dužinu D dobit ćemo srednju pogrešku u dužini

$$M^2_d = \frac{[\Delta D^2]}{n \cdot n} \qquad \ldots\ldots (17)'$$



Sl. 2

Pojedine razlike ΔD iznosit će:

$$\Delta D = \begin{array}{c|c|c} -m_a \sin a_1 + m_b \sin a_1 & -m_a \sin a_2 + m_b \sin a_1 & \ldots \\ -m_a \sin a_1 + m_b \sin a_2 & -m_a \sin a_2 + m_b \sin a_2 & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ m_a \sin a_1 + m_b \sin a_n & m_a \sin a_2 + m_b \sin a_n & \end{array}$$

$$\begin{array}{|c} -m_a \sin a_n + m_b \sin a_1 \\ -m_a \sin a_n + m_b \sin a_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ m_a \sin a_n + m_b \sin a_n \end{array}$$

Ako kvadriramo izraze za ΔD i saberemo vodeći odmah računa da je $2\, m_a\, m_b \sin a_i : \Sigma \sin a = 0$ dobivamo:

$$[\Delta D^2] = n\, m^2_a \sin^2 a_1 + n\, m^2_a \sin^2 a_2 + \ldots\, n\, m^2_a \sin^2 a_n$$
$$+ n\, m^2_b \sin^2 a_1 + n\, m^2_b \sin^2 a_2 + \quad n\, m^2_b \sin^2 a_n$$

$$= [\Delta D^2] = n\, m^2_a \sum_1^n \sin^2 a + n\, m^2_b \sum_1^n \sin^2 a$$

$$[\Delta D^2] = (m^2_a + m^2_b)\, n \sum_1^n \sin^2 a$$

Ako uzmemo točke na kružnici dovoljsno gusto, za svaki $d\,a$ bit će

$$n = \int_0^{2\pi} da$$

odnosno

$$M^2_d = \frac{[\Delta D^2]}{n \cdot n} = \frac{(m^2_a + m^2_b) \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} \sin^2 a\, da}{\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} d\alpha} \qquad (18)$$

$$M^2_d = \frac{(m^2_a + m^2_b)}{2\pi} \left[\frac{1}{2} a - \frac{1}{4} \sin 2a \right]_o^{2\pi}$$

$$M^2_d = \frac{(m^2_a + m^2_b)}{2} \tag{19}$$

ako je $m_a = m_b = m_p$ bit će

$$M_d = m_p \tag{20}$$

Dokaz prema sl. 2 je veoma zoran. Možemo ga i ne smatrati dovoljno strogim obzirom na uzetu pretpostavku, da pojedinačni položaji mogu biti svuda na kružnica radiusa veličine srednje položajne pogreške, ali pošto se rezultat slaže s ranije izvedenim i sigurnim, možemo barem zaključivati o ispravnosti uzete pretpostavke.

Možemo konačno iz svega dosadašnjeg iznijeti definitivan zaključak, da je pogreška u dužini strane između dvije točke, koje su date svaka sa srednjom pogreškom $m_p = \sqrt{m^2_x + m^2_y}$ jednaka $M_d = m_p$ ili da je pogreška u dužini strane jednaka $M_d = r\sqrt{2}$, gdje je $r = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{m^2_x + m^2_y}$, a ne kao što često uzimaju $M_d = m_p \sqrt{2}$.

RESUMÉ: Supposons que deux points soient donnés chaqu'un avec son erreur moyenne de position c'est à dire $m_p = \sqrt{m_y^2 + m_x^2}$. *On à consideré regulierement l'erreur moyenne de longuer entre ces deux poits, d'après les erreurs moyennes de position comme l'erreur moyenne d'une somme* $m_D = m_p \sqrt{2}$.

Dans l'article l'auteur démontre de deux manières différentes que cette expression n'est pas juste, et que l'erreur moyenne de longeur dans ce cas-ci est égale à l'erreur moyenne de position c'est à dire $m_D = m_p$.