

Nešto o trigometrijskom nivelmanu u poligonizaciji

Instrukcija za izradu osnovne državne karte u mjerilu 1 : 5000 još uvijek je na snazi do izlaska novog pravilnika za državnu izmjeru. Činjenica je da u njoj ima nedostataka i s praktičnog gledišta neekonomičnih propisa, ali zato imamo mogućnosti, da izvjesne razjasnimo, nadopunimo il mijenjamo.

Između ostalog postavilo se pitanje, da li poglavlje o trigometrijskom nivelmanu u poligonometriji ima teoretsko opravdanje, odnosno da li je ispravno nesuglasice u visinskom vlaklu podijeliti proporcionalno apsolutnim vrijednostima visinskih razlika.

O tim stvarima ne bi trebalo pisati, jer ih je literatura već razjasnila i pored izvjesnih nejasnoća u spomenutoj instrukciji. Radi se o nekim ispitivanjima za potrebe geodetske službe u NR Hrvatskoj, koja se ovom prilikom iznose i u vezi toga nije na odmet osvrnuti se i na teoretski dio instrukcije.

Posve je točno, da je razvoj instrumentalne tehnike nametnuo izvjesnu reviziju kriterija točnosti kod raznih geodetskih mjerenja. Tako na pr. instrumenti za precizna optička mjerenja daju nam u optimalnom slučaju vrlo dobre rezultate, kod mjerenja dužina, tako i kod određivanja visina. Konkretno radi se o podacima, dobivenim B. Z. »Redt-om«, o kojima je bilo govora i u prošlim brojevima »Geodetskog lista«.

Kako će se vidjeti u nastavku ovog prikaza, instrument »Redt-a« daje tako dobre visine, da bi one po kvalitetu bile na granici između preciznog i trigonometrijskog nivelmana.

Imajući u vidu samo nerentabilnost u izvjesnoj primjeni instrukcije, prikupljeno je prilično podataka iz zapisnika »k« sa raznih radilišta, dobivenih različitim instrumentima. Iz tih podataka određena je tolerancija između obostranih mjerenja visinskih razlika i tolerancija u visinskom vlaklu. Ove su empirijske vrijednosti uspoređene s teoretskima i prilično se dobro složile. Prateći nesuglasice u daljnjim radovima, konstatirano je, da su te granice realne, kao što se i očekivalo.

Kada je riječ o trigonometrijskom nivelmanu, onda znamo da se visinska razlika dobije iz ova dva podatka:

$$\Delta h = D \cdot \operatorname{tg} \alpha = D \cdot \operatorname{ctg} z \quad \dots \dots \dots (1)$$

Da bi se dobila formula srednje kvadratne pogreške, diferencira se izraz pod (1), čiji je konačni oblik:

$$M^2 \Delta h = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot m_D^2 + \frac{D^2}{\cos^2 \alpha} \cdot m^2 \quad \dots \dots \dots (2)$$

ili pomoću zenitnog kuta:

$$M^2 \Delta h = \text{ctg}^2 z \cdot m^2_D + D^2 \cdot (1 + \text{ctg}^2 z)^2 \cdot m^2_z \quad \dots \dots \dots (3)$$

Kod trigonometrijskog određivanja visina dolaze u obzir još visina instrumenata i visina signala. Kod toga se pojavljuju pogreške mjerenja i namještanja i one su više-manje sistematskog karaktera, a uzimaju se kao jednake $m_i = m_e$.

Prema tome formula (3) glasi će definitivno:

$$M^2 \Delta h = \text{ctg}^2 Z \cdot m^2_D + D^2 \cdot (1 + \text{ctg}^2 Z)^2 \cdot m^2_z + 2 m_i^2 \quad \dots \dots \dots (4)$$

Kod sastavljanja tablica za instrukciju uzeti su kao poznate vrijednosti slijedeći elementi:

1. Za m_D uzeta je $1/3$ tolerancije za mjerenje dužina III. kategorije, koja se dobije po formuli $\Delta = \pm 0.01 \sqrt{8D + 0.01 D^2}$.

To bi bila srednja pogreška mjerene poligone strane.

Linearni koeficijenti uz I. član u pojedinim tablicama u stvari je nijansiranje, obzirom na kvalitet instrumenata i pribora.

2. Za m_z srednju pogrešku mjerenog zenitnog kuta uzet je podatak instrumenta $30''$. Pretvarajući kutnu vrijednost u lučnu, dobilo se

$$\frac{m^2_z}{\rho^2} = \left(\frac{30''}{200.000} \right)^2 = 0,212 \cdot 10^{-7}$$

3. Kod mjerenja visine instrumenta obično se griješi za oko 1 cm, pa je prema tome uzeto, da je $m_i = m_e = 0,01$ m.

Slijedi $2 m_i^2 = 0,0002$, što predstavlja kod svake vrijednosti za $M^2 \Delta h$ konstantnu vrijednost.

Analizirajući formulu (4), ova vrijednost je redovito veća od ostalih članova formule i prema tome najviše utječe na veličinu srednje pogreške.

Iz formule (4) slijedi, da je prvi član kutni element, a drugi dužinski i da oba utječu direktno proporcionalno na srednju kvadratnu pogrešku, a prema tome i na točnost određivanja visinskih razlika.

Kako će koji član utjecati, svakako ovisi o veličini kuta i strane, što se vidi iz slijedeće tablice (treći član nije uzet u obzir):

Tablica I.

α°	D/m	$\Delta h/m$	I. član (α)	II. član (D)	$N^2 \Delta h, \text{cm}$
0° 40	82	7.2	$3 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	1.9
1° 50	122	8.9	$3.7 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-4}$	2.7
1° 50	31	5.6	$0.7 \cdot 10^{-6}$	$1.9 \cdot 10^{-5}$	1.4
3° 00	51	6.0	$3.4 \cdot 10^{-6}$	$5.2 \cdot 10^{-5}$	1.5
6° 00	18	5.0	$4.4 \cdot 10^{-3}$	$6.6 \cdot 10^{-6}$	1.5
10° 50	38	6.0	$3.3 \cdot 10^{-5}$	$3.1 \cdot 10^{-5}$	1.0
13° 20	28	6.0	$4.1 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{-5}$	1.5

Dalje slijedi, da je formula (4) teoretski ispravna za računanje srednje kvadratne pogreške trigonometrijski određenih visina i prema tome jedina za najrealniju ocjenu točnosti tih visina.

Obzirom na neprestani razvoj instrumentalne tehnike mogu se mijenjati vrijednosti srednjih pogrešaka (m_D) i (m_z).

Za precizne tahimetre, konkretno za B. Z. »Redtu«, može se uzeti za $m_D = \pm 2$ do 6 cm, koliko se obično griješi kod mjerenja strana do 150 m, a to bi odgovaralo $1/4 \Delta$ za I. kategoriju po tablici XXIII. bivšeg Pravilnika 2/3;

$$m_z = \pm 6'', \text{ a za } m_i = \pm 1 \text{ cm.}$$

Uvrstivši ove vrijednosti u formulu (4) i računajući po istoj srednje kvadratne pogreške visinskih razlika po argumentima (Z) i (D), dobit će se vrijednosti približno za trećinu manje od onih u tablici instrukcije II—TgV, Pm V. Iz ovih srednjih pogrešaka možemo dobiti tolerancije po formuli instrukcije $\Delta h = 4 M_h$, koje će se približno složiti sa onima, dobivenim empirijski iz 2500 mjerenja pod normalnim okolnostima. Ili praktički za pola manje vrijednosti od onih u spomenutoj tablici II.

Evo tih razlika između dva direktna mjerenja jedne visinske razlike, dobivenih empirijski iz našh mjerenja:

Tablica II.

m	Z = α =	89°	85°	80°	75°	70°	65°	60°
		1°	5°	10°	15°	20°	25°	30°
50	cm 2		3	3	4	5	5	6
70	2		3	3	4	5	6	7
90	3		4	4	5	6	7	9
100	4		4	5	6	7	8	10
120	4		5	5	6	7	9	11
150	5		5	6	7	8	10	12
170	5		6	7	8	9	11	13

U nastavku radova ovi su podaci uspoređivani sa dobivenim nesuglasicama u praksi i potvrdili su svoju realnost za precizni tahimetar »Redta«.

*

I ako je srednja kvadratna pogreška najrealniji kriterij za ocjenu točnosti visinskih razlika, njezina primjena kod visinskih vlakova u zapisniku »K« vrlo je nepraktična i nerentabilna. Da bi stručnjak na terenu došao što brže do ocjene svojih mjerenja ($f_{\Delta h}$), data mu je jedna praktičnija formula; koja ima i svoje teoretsko opravdanje.

Uzeto je oko 820 vlakova, kontroliranih formulom instrukcije $\Delta = \pm \pm 2,1 \sqrt{[M^2 \Delta h]}$, u kojima su visine mjerene tahimetrom »Redta«. Obzirom na to, da je ova formula prekomotna za taj instrument, među odabranim vlakovima tolerirane su i veće nesuglasice. Tako su se provlačile i subjektivne pogreške, koje su se mogle izbjeći.

Sa tom pretpostavkom odlučeno je, da se iz terenskih podataka dobiju srednje vrijednosti nesuglasica (Δ), tretirane kao maksimalne pogreške (3 m), koje bi bile proporcionalne broju visinskih razlika (n) u visinskim vlakovima. I tako je postavljen uvjet u obliku funkcije:

$$\Delta = 3 \text{ m} = \pm K \sqrt{n} \dots \dots \dots (5)$$

gdje je (K) tražena konstanta, a (n) broj visinskih razlika u pojedinom vlakou, računajući mjerenja u oba smjera.

Računalo se i time, da dugačke vlakove ovaj kriterij ne će zadovoljiti zbog poništavanja suprotnih relativnih vrijednosti, ali do izvjesne granice zakonitost je sačuvana. Iznose se vrijednosti, dobivene po formuli (5) za vlakove od 2—9 odnosno 4—18 visinskih razlika:

$\Delta_2 = \pm 3,6 \text{ cm} = \pm K \sqrt{4}$	$K_1 = \pm 1,80 \text{ cm}$	0,11 cm
$\Delta_3 = \pm 4,7 \text{ cm} = \pm K \sqrt{6}$	$K_2 = \pm 1,86 \text{ cm}$	0,05 cm
$\Delta_4 = \pm 6,6 \text{ cm} = \pm K \sqrt{8}$	$K_3 = \pm 2,30 \text{ cm}$	Sred vrij. 0,39 cm
$\Delta_5 = \pm 5,9 \text{ cm} = \pm K \sqrt{10}$	$K_4 = \pm 1,86 \text{ cm}$	$K = \pm 1,91$ 0,05 cm
$\Delta_6 = \pm 5,9 \text{ cm} = \pm K \sqrt{12}$	$K_5 = \pm 1,72 \text{ cm}$	ili zaokruž. 0,19 cm
$\Delta_7 = \pm 7,8 \text{ cm} = \pm K \sqrt{14}$	$K_6 = \pm 2,06 \text{ cm}$	$K = \pm 0,02 \text{ m}$ 0,15 cm
$\Delta_8 = \pm 7,3 \text{ cm} = \pm K \sqrt{16}$	$K_7 = \pm 1,82 \text{ cm}$	0,15 cm
$\Delta_9 = \pm 8,0 \text{ cm} = \pm K \sqrt{18}$	$K_8 = \pm 1,86 \text{ cm}$	0,09 cm

I ako u svakoj grupi nije bio isti broj vlakova (težina!), nesuglasice (Δ) rastu gotovo proporcionalno broju visinskih razlika. To se vidi i po dobivenim vrijednostima (K), koje se vrlo dobro slažu. U nastavku radova i ovaj je kriterij kontroliran i on je potpuno zadovoljio, kao što se očekivalo. Samo je mali broj vlakova prešao granicu postavljene tolerancije. Međutim toliki broj nije u omjeru sa brojem nesuglasica većih od srednjih (Δ), kojih je bilo oko 30%. To je prihvatljivo obzirom na konstataciju, da se pažljivijim radom može postići točnije rezultate barem za 25%.

Iz ove analize vidi se, da je postavljeni uvjet zadovoljio i matematički, premda i uz toliko aproksimacija. Tako je kod svrstavanja probranih podataka zanemario mnogo toga:

1. raznoliko rektificiranje instrumenata, različita svojstva opservatora, razne vremenske prilike i raznolikost terena;
2. težina obzirom na nejednaki broj vlakova u pojedinoj grupi;
3. poništavanja nesuglasica suprotnih predznaka u vlakovima sa većim brojem visinskih razlika i
4. heterogena točnost nivelmanske osnove, na koju se oslonio trig. nivelman poligona.

Ne treba dokazivati, da je za suprotan postupak potrebno daleko više podataka i vremena. No, za naše praktičke potrebe kriteriji zadovoljavaju i oni se ne će osjetljivo razlikovati od bilo kojih, točnije određenih podataka.

Problem nivelmanske osnove također je tretiran, međutim različita točnost geometrijskog i trigonometrijskog nivelmana nije mnogo utjecala na stabilnost kriterija $K\sqrt{n}$. Mali broj vlakova prešao je tu granicu i za njih je primijenjen kriterij $\Delta = \pm 0,05 \sqrt{n}$, kao za instrumente sa 3 niti.

Uzimanje u obzir tako heterogenih podataka, predstavlja u stvari realno gledanje problema, jer bi drugačije promašili cilj obzirom na princip ekonomičnosti i svrsishodnosti u radu.

*

I ako određivanje visina instrumentima sa 3 niti ne spada pod naslov ovoga članka, potrebno je reći nešto i o tome radi usporedbe podataka kod izjednačenja mjerenih visina dopunskog nivelmana.

U ovom slučaju koristi se formula:

$$\Delta h = KL \sin a \cos a = 1/2 D \sin 2 a \quad \dots\dots\dots (6)$$

Srednja pogreška predstavljena je formulom:

$$m^2_{\Delta h} = 1/4 \sin^2 2 a \cdot m^2_D + D^2 \cos^2 2 a \cdot m^2_a$$

ili u obliku srednje relativne pogreške:

$$\begin{aligned} \frac{m^2_{\Delta h}}{\Delta h^2} &= \frac{\frac{1}{4} \sin^2 2 a \cdot m^2_D}{\frac{1}{4} \cdot D^2 \cdot \sin^2 2 a} + \frac{D^2 \cos^2 2 a \cdot m^2_a}{\frac{1}{4} \cdot D^2 \sin^2 2 a}; \text{ za } \cos^2 2 a = 1 \\ &= \frac{m^2_D}{D^2} + \frac{4 m^2_a}{\sin^2 2 a} \end{aligned}$$

Ako se m_a izrazi u lučnoj mjeri, konačna formula će glisiti:

$$\begin{aligned} m^2_{\Delta h} &= \Delta H^2 \left(\frac{m^2_D}{D^2} + \frac{4 m^2_a}{\sin^2 2 a} \cdot \frac{1}{\rho^2} \right) \text{ ili} \\ m_{\Delta h} &= \pm \Delta H \sqrt{\frac{m^2_D}{D^2} + \frac{4 m^2_a}{\sin^2 2 a} \cdot \frac{1}{\rho^2}} \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

Iz ove formule vidi se, da je srednja pogreška, ovako određene visinske razlike, direktno proporcionalna apsolutnoj vrijednosti visinske razlike. Ostali članovi pod korijenom ne predstavljaju osobito utjecajne veličine kod računanja srednje pogreške. I to je dovoljan dokaz, da apsolutne vrijednosti visinskih razlika najjače utječu na određivanje srednjih pogrešaka, a prema tome i na izjednačenje razlike.

Što se tiče kriterija za usporedbu dvostrukih mjerenja, kod ove metode primjenjuju se za 50% veće tolerancije u tablici 2. Za diagramske instrumente dobilo se za 100% veće tolerancije od onih u tablici 2.

Kriterij za ocjenu točnosti visinskog vlaka po formuli (5) izračunat je za instrumente sa 3 niti kao $\Delta = \pm 0,05 \cdot \sqrt{n}$, a za diagramske instrumente kao $\Delta = \pm 0,10 \sqrt{n}$.

I ove su formule opravdale svoju realnost kod praćenja daljnjih radova u praksi.

Kod određivanja visina iz mjerene strane i vertikalnog kuta pomoću bilo kojeg instrumenta i pribora, primijenit se može bilo koji od iznešenih kriterija, već prema tome kako se točno mjeri pojedini podatak.

*

Što se tiče točnosti visina, određenih ovim ili onim instrumentom, misilim da smo na čistu. Ako se visne dobro mjere i oslone na solidnu osnovu, pitanje njihove točnosti i njihovog izjednačenja ne predstavlja osobiti problem. Usljed pomanjkanja prostora ne iznose se konkretni podaci analize, kojom je utvrđeno ovo:

1. U pogledu točnosti kod određivanja visina »Redta« se približila preciznom niveliru unutar 1 cm; Wildov RDS unutar 2—3 cm, ali samo u blago-nagnutom terenu, jer u strmom terenu daje nepouzđane visine; Fennta sa 3 niti unutar 5 cm, a sa diagramom unutar 10 cm.

2. Kvalitetno mjerene visine može se izjednačiti proporcionalno srednjim pogreškama, stranama ili visinskim razlikama, osobito u blago nagnutom terenu. U strmom terenu nisu ni mjerenja tako kvalitetna, da bi ih mogli uspoređivati bez anomalija.

Sa teoretskoga gledišta nema sumnje, da je izjednačenje visinskih razlika najrealnije proporcionalno srednjim pogreškama. Međutim u praksi to nije ekonomično, jer stručnjaku trebaju jednostavni i svrsishodni kriteriji. Osobito kod većih radova geodetske službe stručnjak želi neposrednu ocjenu svojih mjerenja i radi toga predlažu se slijedeće norme:

1. Za sve instrumente, koji garantiraju precizno mjerenje dužina i vertikalnog kuta, propisati tolerancije:
 - a) za razlike između dva mjerenja po tablici 2;
 - b) za nesuglasice u vlaku ($f_{\Delta h}$) $\Delta = \pm 0,02\sqrt{n'}$ s osloncem na repere, odnosno $\Delta = \pm 0,05\sqrt{n'}$ s osloncem na trigonometrijski nivelman;
 - c) visinske razlike izjednačavati proporcionalno *dužinama* strane.
2. Za sve instrumente sa 3 niti (i W. R. D. S. sa diagramm u blaže nagnutom terenu), mjereći ih u dva položaja durbina:
 - a) za razliku između dva mjerenja po tablici 2, povećano za 50%;
 - b) za nesuglasice u vlaku ($f_{\Delta h}$) $\Delta = \pm 0,05\sqrt{n'}$ s osloncem na bilo koju nivelmansku osnovu;
 - c) visinske razlike izjednačavati proporcionalno *apsolutnim vrijednostima* Za sve instrumente sa diagramom (i W. R. D. S. u strmom terenu): visinskih razlika.
3. Za sve instrumente sa diagramom C i W. R. D. S. u strmom terenu;
 - a) Za razlike između dva mjerenja po tablici 2, povećano za 100%;
 - b) Za nesuglasice u vlaku ($f_{\Delta h}$) $\Delta = \pm 0,1\sqrt{n}$ s osloncem na bilo koju nivelmansku osnovu;
 - c) visinske razlike izjednačavati proporcionalno *apsolutnim vrijednostima* visinskih razlika.

Ove su se norme u praksi pokazale kao realne i vrlo praktične i prema tome ne bi bilo na odmet, da se o njima vodi računa kod donošenja pravilnika za državnu izmjeru.

RESUME: L'article est une contribution à la discussion des nouvelles Instructions, spécialement dans le domaine de l'application du nivellement trigonométrique dans la polygonation, en employant les tacheomètres auto-réducteurs de précision (Redta, RDH), ainsi que les tacheomètres avec les mires verticales (RDS, Fennta).

L'auteur donne quelques suggestion concernant les tollerances qui peuvent appliquer dans les cas isoles de configuration de terrain et d'apres l'emploi des tacheometres diverses.