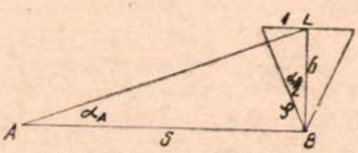
Ing. Aleksandar Zlatković — Beograd

Odnos dužine strane prema dužini pomoćne baze u paralaktičkoj poligonometriji

U gradskoj preciznoj poligonometriji često smo prinuđeni da uzimamo kratke osnovice, čiju nam veličinu diktira širina ulice. Jasno je da u takvim slučajevima moramo da pribegnemo skraćivanju poligonske strane, kako bismo je izmerili sa dovoljnom tačnošću. Ako hoćemo da znamo da li je moguće jednu poligonometrisku stranu izmeriti sa unapred zadatom tačnošću, obzirom na dužinu te strane i dužinu osnovice, moramo naći odnos ovih dveju veličina u zavisnosti od tražene tačnosti i od tačnosti merenja paralaktičkih uglova.

Poznato je da je $\frac{m_{\alpha_A}}{\alpha_A} = \frac{m_s}{S}$



Sl. 1.

odakle možemo da sračunamo paralaktički ugao nad osnovicom ako izaberemo relativnu tačnost strane $\frac{m_s}{S}$ i uzmemo maksimalnu vrednost srednje greške m_{α_A} merenog ugla α_A. Pretpostavimo da je osnovica upravna na stranu, tj. da je $\varphi = 90^0$. Dužinu strane S sračunaćemo po formuli.

$$S = b \, ctg \alpha_A$$

Ako u ovu formulu uvrstimo sračunatu vrednost ugla α_A, možemo dajući različite vrednosti osnovici b da sračunamo odgovarajuće vrednosti za strane S. Ove vrednosti odgovarale bi zadatim uglovima, tj. vrednostima za m_{α_A} i m_s/S. Međutim kod ovog razmatranja pretpostavljeno je da je osnovica idealno tačno izmerena, što prirodno nije moguće. Ako hoćemo da i uticaj netočnosti merenja osnovice uvedemo u račun, moramo da postupimo na drugi način.

Pretpostavimo da je $\varphi = 90^0$, pa će dužina starane biti

$$S = b \, ctg \alpha_A$$

Kako je $b = ctg \frac{\alpha_B}{2}$, to je $S = ctg \frac{\alpha_B}{2} \, ctg \alpha_A$

Srednja greška funkcije S biće:

$$m_s = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial\alpha_B} m\alpha_B\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial\alpha_A} m\alpha_A\right)^2} =$$

$$\pm\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\,\frac{ctg\,\alpha_A}{\sin^2\frac{\alpha_B}{2}}\, m\alpha_B\right)^2 + \left(-\frac{ctg\frac{\alpha_B}{2}}{\sin^2\alpha_A}\, m\alpha_A\right)^2} .$$

Uvedimo sledeće vrednosti (sl. 1):

$$\sin\alpha_A \approx \frac{b}{S},\quad ctg\,\alpha = \frac{S}{b},\quad \sin\frac{\alpha_B}{2} \approx \frac{1}{b},\quad ctg\frac{\alpha_B}{2} = b$$

pa će posle sređivanja biti

$$m_s = \pm\sqrt{\left(-\frac{S\cdot b}{2}\cdot m\alpha_B\right)^2 + \left(-\frac{S^2}{b}\cdot m\alpha_A\right)^2} \quad \text{ili} \quad m_s^2 = \frac{S^2 b^2}{4}\, m^2\alpha_B + \frac{S^4}{b^2}\cdot m^2\alpha_A$$

Rešavajući ovu jednačinu po S^2 dobićemo:

$$S^2 = \frac{b^2}{m^2\alpha_A}\,\frac{m_s^2}{S^2} - \frac{b^4}{4}\cdot\frac{m^2\alpha_B}{m^2\alpha_A}$$

Paralaktičke uglove α_A i α_B merimo sa istom tačnošću, tj. $m\alpha_A = m\alpha_B$ pa će biti:

$$S = \sqrt{\frac{b^2}{(m^2\alpha_A)''}\cdot\frac{m_s^2}{S^2}\cdot\rho''^2 - \frac{b^4}{4}}$$

Stavimo da je

$$K = \frac{4\rho''^2}{(m^2\alpha_A)''}\cdot\frac{m_s^2}{S^2} .$$

pa će izraz za S dobiti oblik

$$S = \frac{b}{2}\sqrt{K - b^2}$$

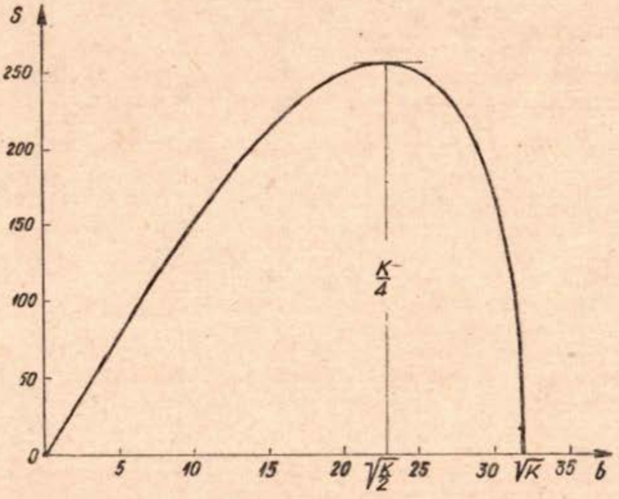
Po ovoj formuli možemo sračunati dužinu strane S obzirom na datu osnovicu b, a da nam budu zadovoljeni uslovi koje sadrži parametar K. Recimo da jednu stranu želimo da izmerimo sa relativnom tačnošću 1/25 000, tj. m_s/S = 1/25 000 i da paralaktičke uglove merimo sa srednjom greškom 0",5 tj. $m\alpha_A = m\alpha_B = 0{,}5$. Sračunajmo sada vrednost parametra.

$$K = \frac{4\,(2\;10^5)^2}{(0.5)^2}\cdot\frac{1}{(25\;10^3)^2} = 1024$$

Znači da ćemo za gornje uslove najveće dopuštene dužine strana prema zadatim osnovicama računati po formuli:

$$S = \frac{b}{2}\sqrt{1024 - b^2}$$

Kako su za jednu gradsku poligonometrijsku mrežu unapred zadati uslovi u pogledu tačnosti, to pre rekognosciranja treba po gornjoj formuli napraviti tablicu dužina prema datim osnovicama, tako da se prilikom rekognosciranja obezbedi mogućnost postizanja tražene tačnosti. Umesto tablice može se konstruisati kriva linija koju predstavlja izvedena jednačina, tako da se veličine uzimaju sa grafika. Za gore navedene brojne vrednosti kriva $S = \frac{b}{2}\sqrt{1024 - b^2}$ izgleda ovako.



Ako prilikom merenja poligonometriske strane uvek vodimo računa o tome da veličine strana i osnovice budu u odnosu koji daje gornja kriva, cela mreža će imati homogenu tačnost. tj. svaka strana će biti izmerena sa približno istom relativnom tačnošću. Znači da ako pri merenju jedne strane imamo mogućnosti da uzmemo dužu osnovicu, nećemo to učiniti, već ćemo uzeti onu njenu dužinu koju nam daje kriva $S = \frac{b}{2}\sqrt{K - b^2}$. Na taj način postižemo homogenu tačnost poligonometriske mreže i pravilnu raspodelu grešaka posle izravnanja.