Ing. Veljko Petković — Zagreb

Banachiewiczeva metoda rješavanja sistema linearnih jednadžbi (Metoda Krakovjana)

U nizu geodetskih radova trebamo napraviti opsežna računanja, da bi mogli koristeći mjerene podatke, dati konačno rezultate korisne za praksu. U najčešćim slučajevima to su razna izjednačenja većeg ili manjeg opsega. Sigurno je da ona izjednačenja u koja uključujemo i rješavanje normalnih jednadžbi iziskuju i najviše vremena. Šabloniziranje i jednostavnost tog rada zamara svakog našeg stručnjaka. Naravno, opseg tog posla zavisi i od broja nepoznanica t. j. o broju jednadžbi, jer s povećanjem broja jednadžbi nesrazmjerno raste broj računskih operacija, kako se vidi prema ovom izrazu:

$$K = \frac{x\,(x+1)\,(x+8)}{6} \qquad \text{(Terzić I. knjiga)}$$

x = broj jednadžbi
K = broj računskih operacija

primjer: $x = 2 \quad K = 10$
$x = 4 \quad K = 40$
$x = 10 \quad K = 330$

Ta činjenica je u mnogo slučajeva prisilila naše stručnjake da odstupe od metoda strogih izjednačenja i potraže nove načine, oslobođene rješavanja linearnih jednadžbi. U našoj geodetskoj praksi čest je slučaj da bi pri izjednačenju i manje trigonometrijske mreže metodom uvjetnih opažanja uz uvjet $[vv] = \min$ mogli imati i preko — 20 norm. jednadžbi. Mreža Pruskog Primorja imala je 86 normalnih jednadžbi. Zaharias Dase 1894. je trebao 3½ mjeseca za njihovo rješenje. Iz tih razloga je već i sam Gauss dao prijedlog za približno izjednačenje bez sastava normalnih jednadžbi. Poslije njega susrećemo niz imena, koji su dali razna rješenja za izjednačenje ne služeći se normalnim jednadžbama (Krüger, Svišćov).

Sve te metode mogu dati zadovoljavajuće rezultate ma da je kod njih $[vv] \neq \min$. Krüger je predložio metodu približavanja odvojenim rješenjem figurnih i polusnih uvjeta. Pinkvart rješava jednadžbe metodom postepenog približavanja. Svišćov pak rješava cijeli sistem postepenim približavanjem. Neke od tih metoda su uspjele sačuvati uvjet minimuma (Boltz, Krüger, Pranjis-Pranjević). U našoj praksi za rješavanje općeg sistema linearnih jednadžbi služimo se Gaussovim algoritmom t. j. metodom eliminacije po točno određenoj shemi. Međutim mimo ove metode za rješavanje sistema linearnih jednadžbi ima i drugih koje za naše potrebe nisu podesne (metoda determinanti i dr.) Gaussova metoda eliminacije t. j. šema, koju je on postavio vrlo je praktična i može je raditi i onaj, koji teoretsku stranu problema uopće i ne pozna. Kontinuirana kontrola po redovima t. j. mogućnost kontrole svake završene operacije po redovima jest od izvanredne važnosti za naša računanja, naročito kod velikog broja jednadžbi. Uz ovu metodu treba spomenuti način eliminacije po shemi Doolittla.

1933. g. objavio je prof. Banachiewicz, astronom opservatorije u Krakovu, metodu Krakovjana za rješavanje sistema linearnih jednadžbi. Tom metodom kod nas u praksi se još ne služe, a niti naši mlađi kolege, koji se s njom upoznaju na fakultetu, koliko znam, ne nastavljaju njenom primjenom. Svojevremeno su se vodile oštre diskusije o prednosti jedne i druge metode t. j. Gaussovog algoritma i metode Krakovjana. O bitnim razlikama uopće ne možemo govoriti, a o sličnosti, lako će se uvjeriti svatko ko pozna teoriju Gaussovog algoritma. Činjenica je da koristeći Krakovjane ne trebamo ispisivati svaku algebarsku operaciju, a što je najvažnije kod toga ne gubimo na kontrolama. Koristeći ovu metodu proširujemo primjenu računskog stroja. Danas je računski stroj naše stalno pomagalo, pa bi mogli reći da je i ta nova metoda (za nas nova, jer se vani već davno uvela u praksu i na fakultetima) bliža novim tehničkim sredstvima. U daljnjim izvodima služit ću se u našoj literaturi uobičajenim simbolima i Gaussovim simbolima, kako bi lakše bilo uočiti sličnost i razliku ovih dviju metoda.

Kod posrednih opažanja jednadžbe pogrešaka su:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + l_1 &= V_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + l_2 &= V_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z + l_3 &= V_3 \end{aligned} \tag{1}$$

Da dođemo do normalnih jednadžbi moramo izraz 1) kvadrirati i sumirati:

$$\begin{aligned} [VV] = [aa]x^2 &+ 2\,[ab]xy + 2\,[ac]xz + 2\,[al]x \\ &+ [bb]y^2 + 2\,[bc]yz + 2\,[bl]y \\ &+ [cc]z^2 + 2\,[cl]z \\ &+ [ll] = \min \end{aligned} \tag{2}$$

Poznati uvjet $(VV) = \min$ bit će zadovoljen ako prva derivacija bude $= \emptyset$; t. j. mora biti

$$\frac{\partial\,[VV]}{\partial\,x} = \emptyset, \quad \frac{\partial\,[VV]}{\partial\,y} = \emptyset \quad \frac{\partial\,[VV]}{\partial\,z} = \emptyset$$

Kad izraze 2) deriviramo po x, y, i z t. j. po nepoznanicama, pa kratimo sa 2 dobit ćemo slijedeće jednadžbe t. j. normalne jednadžbe čije rješenje u slučaju posrednih opažanja daje za rezultat tražene nepoznanice, a u slučaju uvjetnih opažanja dobijemo korelate iz normalnih jednadžbi korelata.

$$\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z + [al] &= \emptyset \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z + [bl] &= \emptyset \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z + [cl] &= \emptyset \end{aligned} \tag{3}$$

Odavle bi za rješavanje ovog sistema jednadžbi po Gaussovom algoritmu sastavili nama već poznatu shemu. Za rješavanje po metodi Krakovjana sastavit ćemo matricu i prve retke Krkovjna B i C.

Radi kontrole eliminacije uvest ćemo sume redaka, pa će izraz 3) imati oblik

$$\begin{aligned} [aa] + [ab] + [ac] + [al] &= [as] \\ [ab] + [bb] + [bc] + [bl] &= [bs] \\ [ac] + [bc] + [cc] + [cl] &= [cs] \end{aligned} \tag{4}$$

ili ako dobijene sume prebacimo na lijevu stranu jednakosti što je kod našeg rada i redoviti slučaj imat ćemo

$$[aa] + [ab] + [ac] + [al] + [as] = \emptyset \tag{5}$$

Ovom sistemu dodajemo jednadžbu:

$$[al] + [bl] + [cl] + [ll] + [ls] = \emptyset$$

da možemo provesti eliminaciju i kontrolu eliminacije slobodnih članova. U izrazu 4) s obzirom na glavnu dijagonalu zamijenit ćemo stupce s retcima i dobit ćemo slijedeći oblik sistema jednadžbi:

$$\begin{matrix} [aa] & [ab] & [ac] & [al] & [as] \\ & [bb] & [bc] & [bl] & [bs] \\ & & [cc] & [cl] & [cs] \\ & & & [ll] & [ls] \end{matrix} \tag{6}$$

Ovako postavljene jednadžbe u našem slučaju predstavljaju Krakovjan A, a sastavljen je od produkata koeficijenata i slobodnog člana za slučaj izjednačenja po posrednim mjerenjima ili produkata koeficijenata plus slobodni član za slučaj izjednačenja po uvjetnim vpažanjima. Prvi redak Krakovjana C jednak je prvom stupcu Krakovjana A odnosno prvom retku Krakovjana A, pošto su u našem slučaju isti. Prema tome ga prepisujemo:

Prvi redak Krakovjana C:

$$[aa] \quad [ab] \quad [ac] \quad [al] \quad [as]$$

Ako podijelimo svaki član prvog retka Krakovjana A sa njegovim prvim članom $[aa]$ dobit ćemo prvi red Krakovjana B t. j. prvu reduciranu jednadžbu.

Prvi red Krakovjana B:

$$1 \quad \frac{[ab]}{[aa]} \quad \frac{[ac]}{[aa]} \quad \frac{[al]}{[aa]} \quad \frac{[as]}{[aa]}$$

Sada prelazimo na računanje drugog retka Krakovjana C. Množimo stupac u B svakim stupcem u C i odbijemo umnožak od odgovarajućih stupaca u A, koje prethodno postavimo u rač. stroj. Ako ovo izrazimo simbolima Gaussa imat ćemo već poznate izraze:

$$[ab \cdot 1] = [ab] - \frac{[ab]}{[aa]} \cdot [aa] = \emptyset \text{ (pa i ne pišemo)}$$

$$[bb \cdot 1] = [bb] - \frac{[ab]}{[aa]} \cdot [ab]$$

$$[bc \cdot 1] = [bc] - \frac{[ab]}{[aa]} \cdot [ac] \quad \text{i t. d.}$$

Kako vidimo član $\frac{[ab]}{[aa]}$ ostaje za sve izraze isti. To je drugi stupac Krakovjana B.

Prema tome drugi red Krakovjana C bit će:

$$[bb\cdot 1]\ [bc\cdot 1]\ [bl\cdot 1]\ [bs\cdot 1]$$

Ako sada ovu jednadžbu podijelimo s njenim prvim članom $[bb\cdot 1]$ dobit ćemo drugi red Krakovjana B

$$1\ \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\ \frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\ \frac{[bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$$

to je druga reducirana jednadžba.

Sada množimo s trećim stupcem iz B svaki stupac u C i odbijemo od odgorajućeg člana u A, kojega smo već ubacili u rač. stroj. Ako se poslužimo simbolima onda će ti izrazi imati slijedeći oblik:

$$[ac\cdot 2] = [ac] - \frac{[ac]}{[aa]}\cdot[aa] - \frac{[bc]}{[bb]}\cdot \emptyset = \emptyset$$

$$[bc\cdot 2] = [bc] - \frac{[ac]}{[aa]}\cdot[ab] - \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bb\cdot 1] = [bc\cdot 1] - [bc\cdot 1] = \emptyset$$

Prema tome koeficijenti uz prve dvije nepoznanice su jednaki $\emptyset$. Dalji članovi bi bili

$$[cc\cdot 2] = [cc] - \frac{[ac]}{[aa]}\cdot[ac] - \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bc\cdot 1] = [cc\cdot 1] - \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\cdot[bc\cdot 1]$$

$$[cl\cdot 2] = [cl] - \frac{[ac]}{[aa]}\cdot[ab] - \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bl\cdot 1] = [cl\cdot 1] - \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\cdot[bl\cdot 1]$$

dalje se možemo poslužiti analogijom.

Prema tome treći red Krakovjana C:

$$[cc\cdot 2]\ [cl\cdot 2]\ [cs\cdot 2]$$

Ako ovu eliminiranu jednadžbu podijelimo s njenim prvim članom dobit ćemo treći red Krakovjana B t. j. treću reduciranu jednadžbu.

$$1\ \frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}\ \frac{[cs\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$$

Jednostavnim računom ćemo odavle dobiti treću nepoznanicu, a onda uvrštavanjem u 2 jednadžbu dobiti drugu nepoznanicu i t. d. Postupak je isti kao i kod Gaussovog algoritma. Ako tako dobijene redove napišemo po Krakovjanima imat ćemo:

Krakovjan B:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & \frac{[ab]}{[aa]} & \frac{[ac]}{[aa]} & \frac{[al]}{[aa]} & \frac{[as]}{[aa]} & \\
 & 1 & \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} & \frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} & \frac{[bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} & \\
 & & 1 & \frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]} & \frac{[cs\cdot 2]}{[cc\cdot 2]} &
\end{array}$$

Dakle Krakovjanom B dobijamo reducirane jednadžbe. Za njih vrijede pravila kontrole kao i kod Gaussovog algoritma

$$1 + \frac{[al\cdot 2]}{[cc\cdot 2]} = \frac{[cs\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$$

analogno i za druge redove.

Krakovjan C

$$\begin{array}{ccccc}
[aa] & [ab] & [ac] & [al] & [as] \\
 & [bb\cdot 1] & [bc\cdot 1] & [bl\cdot 1] & [bs\cdot 1] \\
 & & [cc\cdot 2] & [cl\cdot 2] & [cs\cdot 2] \\
 & & & [ll\cdot 3] & [ls\cdot 3] \\
 & & & [ll\cdot 3] & = [VV]
\end{array}$$

Funkcija Krakovjana C je pomoćna, a njim dobijemo eliminirane jednadžbe. Za njih također vrijede pravila kontrole Gaussovog algoritma t. j.

$$[cc\cdot 2] + [cl\cdot 2] = [cs\cdot 2]$$

analogno i za druge redove.

Pošto kontrole, kojima se služimo kod Gaussovog algoritma, možemo koristiti i dalje, a potpuno su indentične za reducirane i eliminirane jednadžbe, mislim da o njima ne treba posebno pisati. Računanja, koja smo kod Gaussovog algoritma ispisivali ovdje vršimo u računskom stroju. Kod većeg broja normalnih jednadžbi ušteda na vremenu je vrlo osjetljiva i lako uočljiva iz prikaza. U ovom slučaju otpadaju i velike plahte papira, koje moramo imati već od 10 normalnih jednadžbi, s kojima nam je često vrlo nezgodno rukovati a time ujedno povećavamo preglednost kod rada.

Važno je istaknuti da možemo vršiti sukcesivnu kontrolu računanja t. j. svaki definitivno sračunati red možemo kontrolirati. Pri računanju nepoznanica služimo se istim kontrolama kao i kod Gaussa, na pr.

$$z = \frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}, \quad [z] = \frac{[cs\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}, \text{ a } \quad z + [z] = 1 \text{ i t. d.}$$

Suma koeficijenata prve eliminirane ili reducirane jednadžbe jednaka je prvoj eliminiranoj ili reduciranoj sumi i t. d. a analogno ostaju i sve druge kontrole kao:

$$[VV] = [ll] - [al]x - [bl]y \ldots.$$

U slučaju velikog broja jednadžbi možemo ih dijeliti u grupe i time povećati kontrolu računanja, a uposliti i veći broj kalkulanata. Uvođenjem pomoćnih suma za izvjesnu grupu jednadžbi kontroliramo eliminaciju i redukcije dotične grupe. Eliminaciju i redukciju pomoćnih suma vršimo kao i kod svakog drugog člana jednadžbe, na pr.

$$[aa]\ [ab]\ [ac]\ [as\cdot 1]\ [ad]\ [al]\ [as\cdot 2]\ [as] \text{ i t. d.}$$

kod ovog je

$$\begin{array}{llll}
[aa] & + [ab] & + [ac] & = [as\cdot 1] \\
[al] & + [al] & & = [as\cdot 2] \\
[as\cdot 1] & + [as\cdot 2] & = [as] &
\end{array}$$

Analogno gornjem imamo za cijeli Krakovjan A, a dalji rad se nastavlja kako je već prije prikazano.

Radi smanjenja broja članova a time i broja jednadžbi dovoljno je, a da ne ide na štetu kontrole računanja, uzeti samo $[as \cdot 1]$ i $[as]$ što je jednako:

$$[as \cdot 1] + [ad] + [al] = [as]$$

Danas, kad postoje veliki elektronski računski strojevi, problem rješavanja i velikog broja normalnih jednadžbi ne bi trebao postojati. Čak nije problem računanja i kompliciranijih matematskih operacija. Nažalost takvi strojevi su pristupačni rijetkim biroima u svijetu, drugi pak su upućeni koristiti razne metode, koje skraćuju računski postupak u bilo kojem vidu.

Rješavanje normalnih jednadžbi korelata. Primjer:

MATRICA A

	a]	b]	c]	d]	e]	w]	s]
[a	+6.000 000	2.000 000	-2.000 000	+ 2.388 000	- 2.360 000	- 4 710 000	- 2.682 000
	[b	+8.000 000	-2.000 000	+ 6.097 000	- 6.514 000	- 2.370 000	+ 1.213 000
		[c	+8.000 000	- 8.495 000	+ 8.855 000	+ 3.450 000	+ 7.810 000
			[d	+49.440 610	-48.409 799	- 4.690 000	- 3.669 189
				[e	+48.613 700	+ 3.390 000	+ 3.574 901

MATRICA B

	a]	b]	c]	d]	e]	w]	s]	
[a / [aa]	-1.000 000	+0.333 333	+0.333 333	- 0.398 000	+ 0.393 333	+ 0.785 000	+ 0.447 000	
	k_1	+0.209 739	-0.064 059	- 0.511 280	+ 0.541 007	+ 0.785 000		+0.960 407
	(k_1)	+0.123 594	+0.397 393	+ 0.113 285	- 0.147 679		- 0.447 000	+0.039 594
	[b.1 / [bb.1]	-1.000 000	+0.363 636	- 0.939 954	+ 0.995 545	+ 0.537 273	- 0.043 500	
		k_2	-0.069 883	- 1.207 486	+ 1.369 314	+ 0.537 273		+0.629 218
		(k_2)	+0.433 519	+ 0.267 545	- 0.373 783		+ 0.043 500	+0.370 781
		[c.2 / [cc.2]	-1.000 000	+ 0.815 958	- 0.850 701	- 0.070 286	- 1.105 029	
			k_3	+ 1.048 198	- 1.170 090	- 0.070 286		-0.192 178
			(k_3)	- 0.232 251	+ 0.319 401		+ 1.105 029	+1.192 179
			[d.3 / [dd.3]	- 1.000 000	+ 0.958 086	- 0.033 170	- 0.075 083	
				k_4	+ 1.317 792	- 0.033 170		+1.284 622
				(k_4)	- 0.359 719		+ 0.075 083	-0.284 636
				[e.4 / [ee.4]	- 1.000 000	+ 1.375 442	+ 0.375 456	
					k_5	+ 1.375 442		+1.375 442
					(k_5)		- 0.375 456	-0.375 456

MATRICA C

	a]	b]	c]	d]	e]	w]	s]
[a	+6.000 000	-2 000 000	-2.000 000	+ 2.388 000	- 2.360 000	- 4 710 000	- 2.682 000
	[b.1	+7.333 333	-2.666 667	+ 6 892 999	- 7.300 666	- 3 939 999	+ 0.319 001
		[c.2	+6.363 637	- 5.192 458	+ 5.413 549	+ 0.447 276	+ 7.032 001
			[d.3	+37.774 256	-36.191 000	+ 1.252 956	+ 2.836 217
				[e.4	+ 1.137 890	- 1.565 102	- 0.427 220

Kontrole: $[vv] = -[kw]$, $8.039\,913 = 8.039\,907$

$$[vv] = \frac{[w_1 1]^2}{[aa]} + \frac{[w_2 . 1]^2}{[bb \cdot 1]} + \frac{[w_3 . 2]^2}{[cc \cdot 2]} + \frac{[w_4 . 3]^2}{[dd \cdot 3]} + \frac{[w_5 . 4]^2}{[ee \cdot 4]} = 8.039\,910$$

LITERATURA

Dr. V. Andrejev: »Prikaz nekih novijih metoda za rješavanje sistema linearnih jednadžbi. Izdano 1951. g.

Dr. N. Čubranić: »Račun izjednačenja«.

Ing. Hinko Kovačević: Banakiewiczeva metoda rješavanja normalnih jednadžbi (studentska radnja nagrađena od Rektorata sveučilišta u Zagrebu).

SADRŽAJ

U članku autor iznosi teoretsku podlogu i način eliminacije normalnih jednadžbi metodom Banakiewicza (Krakovjana) prilagođenu uobičajenim Gaussovim simbolima, kako bi se lakše uočila sličnost između ove metode i Gaussovog algoritma. Na kraju je dat primjer rješenja pet normalnih jednadžbi, iz kojeg je očita velika ekonomičnost i ušteda u prostoru ove metode.

RESUMÉ

Dans cet article l'auteur nous donne une base théorique ainsi que la manière d'élimination d'un systém des équations normales par la méthode Banakiewicz, adaptée aux symboles usités de Gauss afin de relever la ressemblance entre cette méthode et celle de Gauss. Ä la fin de l'artique un exemple de résolution de cinq équation normales est donné, d'où grande économie de cette méthode est visible.