Boris Bregant — Ljubljana

Problem vključitve novih točk lokalne triangulacije v obstoječe triangulacijsko omrežje

Večkrat je treba razviti lokalno triangulacijsko mrežo visoke točnosti, katera služi pri izvedbi inženirskih del (rudniki, hidro centrale, proboji železniških predorov i. p.) Taka mreža ima lastno bazo in je izravnana povsem ločeno od obstoječega omrežja, da se ne pokvari njena notranja točnost. Pri tem nastane problem, kako uvrstiti nove točke lokalne triangulacije v že obstoječe triangulacijsko omrežje pri nespremljenih notarnjih odnosih.

V ta namen bi morali cel lokalni sistem kot togo telo rotirati in translatorno prestaviti, da bi naši najboljšo lego napram obstoječim točkam višjega reda. Zavedati se moramo da bi obišli osnovni princip geodetskih meritev »od večjega k manjšemu« in bi šele praktičen primer pokazal, ali je to sploh mogoče. Kriterij pozicijske točnosti nove točke napram točkam višjega reda bi bila elipsa napak.

Če bi dopustili, da ostanejo v lokalni mreži nespremenjeni samo koti, tedaj bi bila dobra vključitev v mrežo državne triangulacije že verjetnejša. Poleg elementov translacije in rotacije moramo tedaj najti še najverjetnejše razmerje, v katerem povečamo ali pomanjšamo vse razdalje (oz koordinate) v lokalnem sistemu:

$$m_0 = \frac{d}{d_0}$$

Zaradi popravkov koordinat novih točk dx in dy, ki nastanejo po izravnanju, nastanejo popravki smeri in dolžin med novimi in danimi točkami, katere izražajo enačbe:

$$\left.\begin{aligned} v_\varphi &= a_n\, dx - b_n\, dy + f \\ v_d &= a'\, dx + b'\, dy + f_d \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$a_n = \frac{\varrho}{d} \sin \varphi' \qquad a' = \cos \varphi_d$$

$$b_n = \frac{\varrho}{d} \cos \varphi' \qquad b' = \sin \varphi_d$$

Te popravke moramo izraziti kot funkcije tehle neznank:

$$\left.\begin{aligned} v_\varphi &= v_\varphi\, (m_0, \Delta\omega, X, Y) \\ v_d &= v_d\, (m_0, \Delta\omega, X, Y) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

m_0 = pretvorbeni faktor dolžin
$\Delta\omega$ = vrtilni kot
X = vrednost translacije po y-osi
Y = vrednost translacije po y-osi

Preobrazba enačb pogreškov. Ogledali si bomo enačbe za pretvorbo koordinat iz enega ravninskega koordinatnega sistema v drugega, katere se glasijo (pri uporabi pretvorbenega faktorja dolžin):

$$y = (\eta + \Delta\eta) \cdot \cos\Delta\omega + (\xi + \Delta\xi)\sin\Delta\omega + Y$$
$$x = (\xi + \Delta\xi) \cos\Delta\omega - (\eta + \Delta\eta)\sin\Delta\omega + X$$
$$\Delta\eta = \eta\,(m_0 - 1)$$
$$\Delta\xi = \xi\,(m_0 - 1)$$

Poiskali bomo pogoje pod katerimi bi lahko enabo (3) poenostavili

$$\sin\Delta\omega = \Delta\omega - \frac{\Delta\omega^3}{6} + \frac{\Delta\omega^5}{124}$$

$$\cos\Delta\omega = 1 - \frac{\Delta\omega^2}{2} + \frac{\Delta\omega^4}{24}$$

Ako so koordinatne razlike v formuli (3) reda 10 km in je

$$\Delta\omega^2 = 0{,}0000001$$
$$\Delta\omega = 0{,}0003$$
$$\Delta\omega'' = 60''$$

smemo pisati $\cos\Delta\omega = 1$ in $\sin\Delta\omega = \Delta\omega$ ter dobimo popravek orientacije izražen z vrtenjem okoli nekoga pola

$$\left.\begin{aligned} y &= \eta + \Delta\eta + (\xi + \Delta\xi)\,\Delta\omega + Y \\ x &= \xi + \Delta\xi - (\eta + \Delta\eta)\,\Delta\omega + X \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} dy &= \eta\,(m_0 - 1) + \xi\, m_0\,\Delta\omega + Y \\ dx &= \xi\,(m_0 - 1) - \eta\, m_0\,\Delta\omega + X \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Da bomo smeli vrednosti enačb (5) uporabiti pri enačbah popravkov (1) moramo:

1) lokalno triangulacijo smerno navezati na obstoječo mrežo višjega reda; tedaj lahko pričakujemo, da bo popravek orientacije majhen mogoče nekaj sekund

2) zmanjšati koordinatne razlike, s tem da premaknemo izhodišče koordinatnega sistema v težišče koordinat novih točk $T_0\,(x_0, y_0)$

$$x_0 = \frac{(x)}{n} \qquad y_0 = \frac{(y)}{n}$$

$$\xi = x - x_0$$
$$\eta = y - y_0$$

Enačba za pogrešek smeri ima enako obliko neglede na to, ali je opazovališče dana točka Tn ali nova točka Tr, razlikujeta pa se negoglasji.

Če vstavimo vrednosti enačb (5) v enačbe (1) dobimo:

$$v_\varphi = (a_n\,\xi_r - b_n\,\eta_r)\, m_0 + (-a_n\,\eta_r - b_n\,\xi_r)\, m_0\,\Delta\omega + a_n X - b_n Y + \\ + f_n + (b_n\,\eta_r - a_n\,\xi_r) \quad (6)$$

$$v_d = (a'\,\xi_r + b'\,\eta_r)\, m_0 + (b'\,\xi_r - a'\, m_r)\,\Delta\omega + a' X + b' Y + f_d - (a'\,\xi_r + b'\,\eta_r) \quad (7)$$

Ker pri nas še nimamo modernih instrumentov za »trilateracijo«, bomo imeli za navezavo sistemov kvečjemu eno dolžino, izračuanon iz baznega omrežja. Kot neodvisna opazovanja za navezavo nam preostanejo še koti. Pogrešek kota je:

$$v_\alpha = v\varphi_{n+1} - v\varphi_n$$

Enačbe za pogreške kotov se razlikujejo glede na to, ali je opazovališče dana točka Tn ali nova točka Tr.

Enačbi kotnega pogreška, kadar je opozovališče dana točka (točka višjega reda) (8) in kadar je opazovališče nova točka (točka lokalnega sistema) (9), se glasita;

$$\begin{aligned} v_\alpha = {} & (a_{r+1}\,\xi_{r+1} - a_r\,\xi_r - b_{r+1}\,\eta_{r+1})\,m_0 + (a_{r+1} - a_r)\,X - (b_{r+1} - b_r)\,Y + \\ & + (a_r\,\eta_r - a_{r+1}\,\eta_{r+1} - b_{r+1}\xi_{r+1} - b_r\,\xi_r)\,m_0\,\Delta\omega + f_\alpha + \\ & + (a_r\,\xi_r - a_{r+1}\,\xi_{r+1} + b_{r+1}\,\eta_{r+1} - b_r\,\eta_r) \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} v_\alpha = {} & [\xi_r\,(a_{n+1} - a_n) - (b_{n+1} - b_n)\,\eta_r]\,m_0 + (a_{n+1} - a_n)\,X - (b_{n+1} - b_n)\,Y + \\ & + [(a_n - a_{n+1})\,\eta_r + (b_n - b_{n+1})\,\xi_r]\,m_0\,\Delta\omega + f_\alpha + [(b_{n+1} - b_n)\,\eta_r - (a_{n+1} - a_n)\,\xi_r] \end{aligned}$$

Pretvorbeni faktor dolžin m_0 se bo pri razdalji reda 10 km šele v šesti decimali razlikoval od enote in bo vplival na vrednost $\Delta\omega$ šele v dvanajsti decimali, zato ga smemo v produktu $m_0\,\Delta\omega$ opustiti. Enačbe pogreškov lahko prevedemo na enostavno obliko:

$$v_\alpha = A_0\,m_0 + A_1\,\Delta\omega + A_2 X + A_3\,Y + F_\alpha \tag{8)'$$

$$v_\alpha = B_0\,m_0 + B_1\,\Delta\omega + B_2 X + B_3\,Y + F_\alpha' \tag{9)'$$

$$v_d = C_0\,m_0 + C_1\,\Delta\omega + C_2 X + C_3\,Y + F_d \tag{7)'$$

Nadaljne računske operacije so znane iz teorije izravnanja po metodi najmanjših kvadratov-posredovalna opazovanja. Tudi izračun koordinat novih točk ne bo delal težav.

Očevidno je, da za m = 1 dobimo rešitev problema uvrstitve lokalne mreže v obstoječo mrežo pri nespremenjinih notranjih odnosih.