Prof. Ing. Branko Borčić — Zargeb

Elementi Tissot-ove granične elipse za FNR Jugoslaviju

Razmatranje Tissot-ove projekcije i granične elipse izvjesnog područja (obično jedne ili više manjih država) ima neobično važnu primjenu u kartografskoj praksi. Taj problem toliko je obiman i interesantan i s teoretskog i praktičnog gledišta, da zaslužuje posebnu pažnju i gotovo je neiscrpan, Dovoljno je samo to da spomenemo, da ova projekcija pored njenih osobina da daje najmanje deformacije dužina i kuteva unutar zadanog relativno manjeg područja, ujedno pruža direktan odgovor na pitanje, koliki se teritorij može kartirati (prikazati) na jednoj projekcionoj ravnini odnosno u jednom koordinatnom sistemu.

Kao što je poznato, pri rješavanju pitanja o izboru projekcije za jednu državu, ili za zajednicu od više država, od prvenstvene su važnosti slijedeća pitanja.

1. pitanje točnosti projekcije;
2. pitanje prikladnosti formula te projekcije za računanje, i
3. pitanje broja koordinatnih sistema, u kojima se to područje može kartirati uz unaprijed određenu točnost.

Odgovor na prvo i treće pitanje dobivamo proučavajući Tissot-ovu projekciju, dok odgovor na drugo pitanje, koje se odnosi na ispitivanje prikladnosti formula, možemo dobiti tek upoređivanjem onih projekcija, koje bi došle u uži krug pri izboru projekcije.

Poslije Prvog svjetskog rata postavilo se je i pred naše geodetske stručnjake pitanje izbora projekcije.

Kako u to vrijeme nije bilo naših stručnjaka, koji bi mogli taj problem potpuno zahvatiti, to se je moralo osloniti na strance. Tako je taj posao obavio dr. Anton Fasching, nastavnik Geodetskog odsjeka Tehničkog fakulteta u Zagrebu, koji se je tim problemom sretao nekoliko puta u svojoj praksi. U to doba unutar granica naše države nije bilo Istre ni dalmatinskih otoka, koji su do konca Drugog svjetskog rata bili pod okupacijom Italije.

Kako se, dakle, radi u području, koje se prilično razlikuje od predratnoga, javlja se potreba da se odrede nove konstantne veličine za formule Tissot-ove projekcije za našu državu i da se ponovo pogleda, kolike su maksimalne deformacije pri kartiranju naše države na jednoj projekcionoj ravnini odnosno u jednom koordinatnom sistemu.

Zbog svega toga dat je nekolicini studenata Geodetskog odsjeka Tehničkog fakulteta u Zagrebu gornji problem za diplomski rad, među kojima rezultati i način izlaganja apsolventa tehnike Stojanovski Kire, zaslužuju naročitu pažnju. Rezultati njegovih razmatranja iskorišćeni su u ovom prikazu s nešto malo izmijenjenim poretkom.

U uvodu svog diplomskog rada kandidat Stojanovski kaže: »Kako će se iz daljnjeg razmatranja vidjeti, moj trud urodio je plodom, jer pored toga što sam došao no novih formula za Tissot-ovu projekciju za našu državu, našao sam i neke sitnije pogreške u rezultatima dr. Faschinga. Te greške odnose se na neke koeficijente, koje ne mogu utjecati na karte sitnih mjerila, jer se u takovom mjerilu gube, ali pri računanju koordinata triangulacijskih točaka morala bi se osjetiti«.

Na istom mjestu, ali malo dalje stoji:

»U svome diplomskom radu ja sam počeo s teorijom Tissot-ove kompenzativne projekcije, za koju slobodno mogu reći, da je nije nitko detaljno obradio tako, da bi činila jednu cjelinu, nego je svatko provjeravao samo one formule, koje su mu momentalno trebale, a koje je Tissot dao u svome djelu:

»Mémoire sur la représentation des surfaces eet les projections des cartes géographiques.«

Ova tvrdnja mogla bi se primiti uz rezervu — iako je vrlo vjerojatna, jer je nešto slično rekao i dr. Fasching — da ona stoji samo u koliko je nama to poznato, s napomenom da to nije uradio ni dr. Fasching.

Na početku je potrebno istaknuti da se ova projekcija može uspješno primjeniti za relativno mala područja. Da bi bili malo određeniji, mogli bi reći, da se ova projekcija može u onim slučajevima primijeniti, dok su veličine s i t izražene u apsolutnim mjerama znatno manje od jedinice, odnosno dok su s i t takve veličine da bi redovi potencija od s i t, kojima su izražene pravokutne koordinate x i y, brzo konvergirali.

Detaljnjim izvodima kandidat je došao do poznatih općih formula Tissot-ove projekcije, a koje glase:

$$x = s + \frac{\sin \varphi_0}{2 r_0} t^2 + \frac{A}{3} s^3 - B s^2 t + C s t^2 + \frac{B}{3} t^3$$

$$y = \frac{r}{r_0} t + \frac{B}{3} s^3 + A s^2 t - B s t^2 + \frac{C}{3} t^3 \tag{1}$$

U ovim formulama pojedine oznake imaju ova značenja: x i y — su pravokutne koordinate u ravnini;

s — dužina luka meridijana između širina φ_0 i φ za $R_0 = 1$;

t — dužina luka paralele sa širinom φ_0, za $R_0 = 1$;

φ_0 i λ_0 — geografske koordinate privremeno uzete centralne točke područja kartiranja;

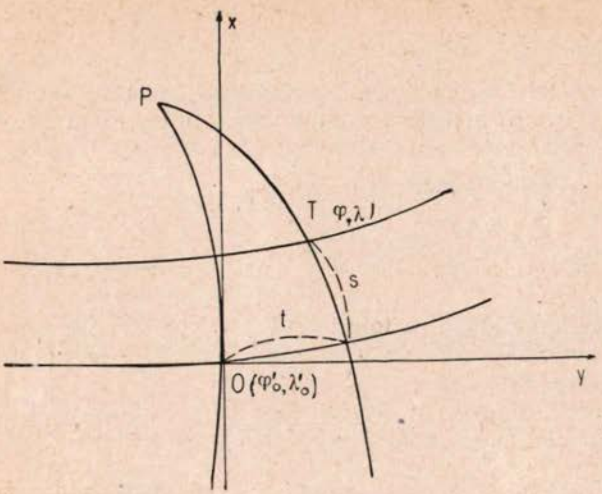
r — radius paralele, koja ima geografsku širinu φ ;

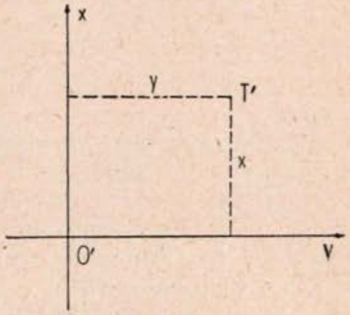
r_0 — radius paralele, koja ima geografsku širinu φ_0;

A, B i C — su koeficijenti, koji se određuju prema obliku i veličini područja kartiranja:

Ove formule su izvedene uz ova četiri osnovna uvjeta:

1. Koordinatni početak na elipsoidu ima koordinate φ_0 i λ_0 i odgovara centralnoj točki područja kartiranja. To je ujedno koordinatni početak pravokutnih koordinata x i y u ravnini. Osi x i y dodiruju odgovarajući meridijan, odnosno paralelu u koordinatnom početku 0 (sl. 1).





Sl. 1.

2. Deformacija dužina u koordinatnom početku odnosno u centralnoj točki područja kartiranja jednaka je nuli. To znači da je u toj točki mjerilo razmjera u svim pravcima, pa prema tome i u pravcu meridijana, i paralele, jednako jedinici.
3. Deformacije dužina u pravcu meridijana ($l—m$), u pravcu paralele ($l—n$) ne smiju imati članove prvih potencija od s i t, a smiju se međusobno razlikovati za članove trećih potencija od s i t.
4. Kut između meridijana i paralela u projekciji smije se razlikovati od odgovarajućeg kuta na elipsoidu, odnosno od 90^0, samo za članove trećih potencija od s i t. To znači da deformacija toga kuta smije biti veličina trećeg i višeg reda veličina s i t. Da bi se povećala točnost formula Tissot-ove projekcije dodata su još ova dva uvjeta, prema kojima razlike mjerila u pravcu meridijana i paralela ($m—n$) i deformacija kuta između meridijana i paralela ne smiju zavisiti od članova drugih potencija od s i t.

Ove uvjete smo naveli, ne samo zbog toga da bi se moglo rasuđivati o osobinama i točnosti ove projekcije, nego i zbog toga, što nisu nigdje u literaturi izričito navedeni, već se oni mogu izvući iz gotovih formula u citiranom djelu Tissot-a. Sad se javlja problem određivanja koeficijenata A, B, C, koje su različite za svako područje preslikavanja, odnosno za svaku državu, ako se radi o izradi državne kartee. Postupak je predložen od Tissot-a, a odvija se ovim redom:

Konstruira se mreža meridijana i paralela za svaki stepen geografske dužine i širine, predpostavljajući pri tome da je srednji radius zemlje $R_0 = 1$, a za mjerilo se uzima da dvije minute na ekvatoru iznose 1 mm. Tada veličine s i t sračunavamo po formulama:

$$s_{mm} = \frac{(\varphi_n - \varphi_0)'}{2}\,; \qquad t_{mm} = \frac{(\lambda_n - \lambda_0)'}{2} \cos \varphi_0 \tag{2}$$

Pa će kod konstrukcije jednostepenske mreže meridijana i paralela biti:

$$s = 30\,\text{mm}\,; \qquad t = 21{,}63\,\text{mm}$$

Za privremeeni koordinatni početak projekcionog koordinatnog sistema obično se uzima aritmetička sredina graničnih točaka s najvećom i najmanjom geografskom širinom i dužinom, tako da je za našu državu

$$\varphi_0' = 43^0 52'$$
$$\lambda_0' = 18^0 13'$$

Ove vrijednosti mogu se i približno uzeti sa karte, bez nekog naročitog računanja.

Zatim se sa neke postojeće karte odabira toliki broj karakterestičnih graničnih točaka da bi one — uglavnom — određivale granicu područja kartiranja, u ovom slučaju našu državnu granicu.

U ovome primjeru izbrano je 30 takvih točaka, čije su koordinate s i t sračunate po formulama (2), a zatim su nanešene u već prije konstruiranu mrežu meridijana i paralela.

Na taj način dobivena je približna karta naše države u Tissoto-ovoj kompenzativnoj projekciji (Sl. 2).

Sad se prelazi na najosjetljiviji dio zadatka, a to je pronalaženje t. zv. granične elipse naše države (područja kartiranja), a to je ona elipsa, koja najbolje obuhvata granice državnog teritorija, uz uvjet, da je dužina onoga dijametra, koji zatvara s njezinim osima kut od 45^0, najmanja. Dakle $\varrho_{45}{}^0$ te elipse treba biti kraći od $\varrho_{45}{}^0$ ma koje druge granične elipse.

Od 25 proba, koje su u ovom slučaju izvršene, pokazalo se je, da tome uvjetu, više ili manje, dobro odgovaraju one elipse kod kojih je odnos osi $b:a = 0{,}6$; 0,5 ili 0,4. S ovim elipsama nastavljene su probe, te je ustanovljeno, da je elipsa s osima, čiji je odnos $b:a = 0{,}5$ najpogodnija od sviju ostalih. U priloženoj tablici iznijeti su rezultati za posljednjih 5 probnih elipsa od kojih je ona, koja je označena pod rednim brojem 5 odabrana kao najpovoljnija. Ona je ucrtana na pomoćnoj karti (sl. 2).

Red. broj	b : a	Dodirnute granične točke	a	b	$\varrho 45^0$
1	0,6	br. 10, 13, 19, 30	130,0	78,0	189,5
2	0,5	br. 10, 13, 20, 30	132,0	72,5	181,1
3	0,4	br. 10, 20, 26	170,0	69,5	180,2
4	0,5	br. 10, 13, 20, 30	132,5	72,5	180,0
5	0,5	br. 10, 20, 35, 30	137,2	70,9	178,3

U ovoj tablici veličina a, b i $\varrho_{45}{}^0$ izražene su u milimetrima.

Usvojena elipsa pod rednim brojem 5 predstavlja definitivnu graničnu elipsu za državni teritorij FNR Jugoslavije.

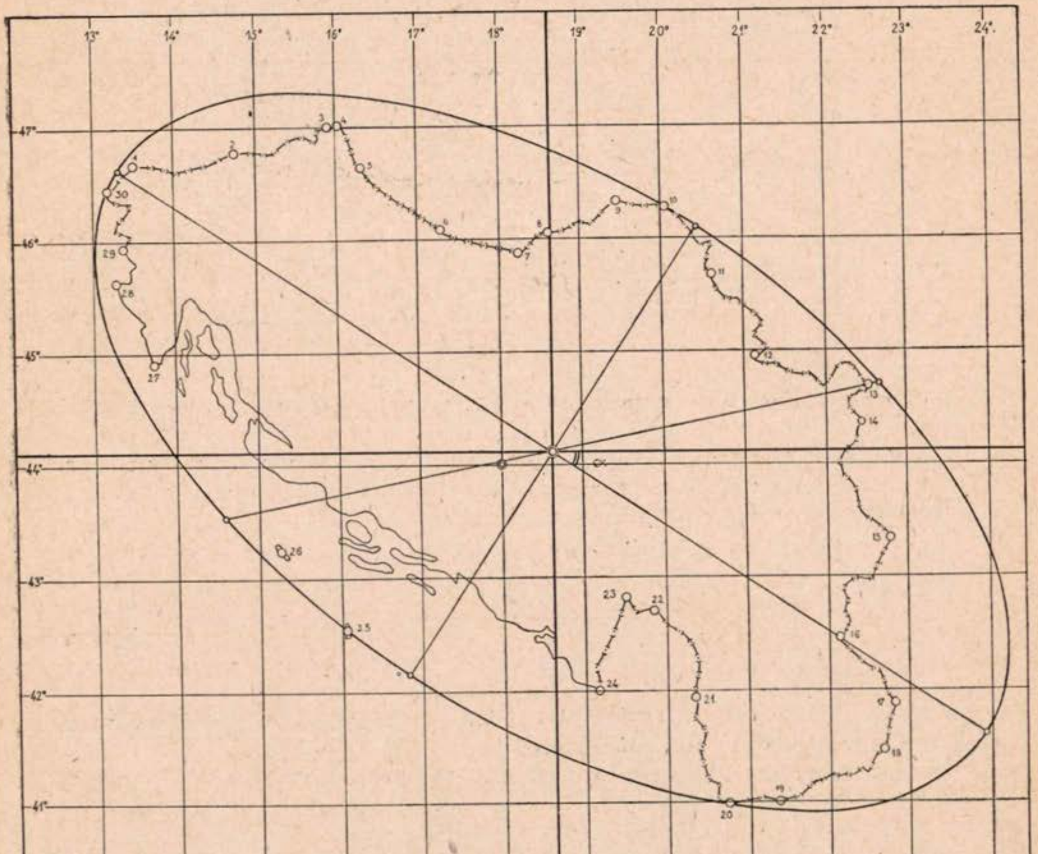
Pošto je izvršen izbor granične elipse određuje se na pomoćnoj karti (ubodo migle) gdje joj pada centar. Označeni centar granične elipse na pomoćnoj karti predstavlja novi koordinatni početak za Tissot-ovu kompenzativnu projekciju FNRJ. Možda bi bilo bolje reći, da centar ove elipse predstavlja kartografsko središte naše države. To je važno zbog toga, jer svako računanje veličina potrebnih u višoj geodeziji i kartografiji, a koje se odnose na srednju širinu naše države, treba računati za širinu te točke. S pomoćne karte očitane su koordinate označenog centra granične elipse, odnosno kartografskog središta naše države i one iznose:

$$\varphi_0 = 43_0 58'30'' ; \qquad \lambda_0 = 18^0 51'00''$$

Jednovremeno se očitavaju ostali elementi granične elipse, koji će biti potrebni za daljnja računanja, a to su:

$$\begin{aligned} a &= 137{,}2 \text{ mm} \\ b &= 70{,}9 \text{ mm} \\ \varrho_{45} &= 178{,}3 \text{ mm} \\ \alpha &= 33^0 19'10'' \end{aligned} \tag{3}$$

gdje su: a i b poluosi granične elipse; ϱ_{45} dijametar, koji s osima zatvara kut 45^0, a α kut, koji velika poluos elipse zatvara s koordinatnom osi y.



Sl. 2.

Točka novog koordinatnog početka nalazi se u neposrednoj blizini sela Košutice kod Vlasenice u Bosni. Točan geografski pložaj koordinatnog početka pokazan je na sl. 3

Skica br. 1

Sl. 3.

Na osnovu elemenata granične elipse sračunavaju se neodređeni koeficijenti A, B i C.

Da bi se ovi koeficijenti što lakše odredili Tissot je uveo dvije pomoćne veličine F i ε, koje stoje u neposrednoj vezi s elementima granične elipse.

Te pomoćne veličine određene su formulama:

$$\varepsilon = 2\,(90^0 - \alpha)$$

$$F = \frac{1}{2\left(\frac{a^2}{b^2} + 1\right)} \tag{4}$$

Očevidno je, da su ove pomoćne veličine potpuno određene elementima granične elipse, čije su vrijednosti navedene pod (3).

Prema tim podacima — pomoću formula (4) — sračunate su vrijednosti za te veličine i one iznose:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 113^\circ 21' 40'', \\ F &= 0{,}105\,010\,97 \end{aligned} \tag{5}$$

Iz ovih pomoćnih veličina dobivaju se koeficijenti A, B i C po formulama:

$$A = \left(F - \frac{1}{4}\right) \cos \varepsilon + \frac{1}{4} \ ;$$

$$B = (F - \frac{1}{4}) \sin \varepsilon ;$$

$$C = \frac{1}{2} - A - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi_0 ,$$

a njihovi su brojni iznosi:

$$A = + 0{,}307\,4917 \qquad \frac{A}{3} = + 0{,}102\,4972$$

$$B = - 0{,}133\,1034 \qquad \frac{B}{3} = - 0{,}044\,3678$$

$$C = - 0{,}272\,9555 \qquad \frac{C}{3} = - 0{,}090\,9852$$

Sad imamo sve veličine, koje definitivno određuju Tissot-ovu projekciju za FNR Jugoslaviju, jer su ovi koeficijenti bili jedine neodređene veličine u formulama (1), pomoću kojih se računaju pravokutne koordinate x i y u ovoj projekciji. S ovim bi ujedno bio završen prvi dio zadatka, koji se rješava pomoću granične Tissot-ove elipse.

Promatrajući samo ove rezultate i navedene citate vrlo je teško dobiti pravu sliku o vrlo lijepom rješenju ovoga problema. Potreban je poseban studij da bi se došlo do spoznaje o veličini i dosjetljivosti Tissot-a kao teoretičara-kartografa. Doda li se tome još i to, da se iznalaženjem najpovoljnije granične elipse ujedno rješava pitanje najmanje moguće deformacije pri izradi karte nekog područja u jednom koordinatnom sistemu odnosno na jednoj projekcionoj ravni, onda nam ne ostaje ništa drugo nego da se divljenjem zamislimo pred darovitošću velikog francuskog kartografa XIX. stoljeća.

Slijedeći postavljene uvjete za izvođenje osnovnih formula ove projekcije Tissot je izveo i osnovnu formulu za računanje mjerila u ovome bliku:

$$m = 1 + As^2 - 2\,Bst + (\frac{1}{2} - A)\,t^2 \tag{6}$$

Ako ovu formulu napišemo ovako:

$$As^2 - 2\,Bst + (\frac{1}{2} - A)\,t^2 - (m - 1) = 0 \tag{7}$$

onda prostim uporeðenjem s općim oblikom jednadžbe krivih linija drugog stepena u obliku

$$Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + 2\,Dx + 2\,Ey + F = 0$$

i poznatom diskusijom iz analitičke geometrije vidimo, da izraz (7) predstavlja jednadžbu centričke elipse, čije se osi ne podudaraju koordinatnim osima, nego zatvaraju kut, koji je određen izrazom

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\,B}{A - C}$$

Neobično je interesantno, da se taj kut nalazi u neposrednom odnosu s pomoćnim kutem ε, i taj odnos određen je izrazom

$$\varepsilon = 2\,(90^0 - \alpha) \tag{8}$$

Prema tome sad je jasno, zašto nam je potreban kut α, koji smo očitali sa pomoćne karte.
Jednadžba te iste elipse u koordinatnom sistemu, čije bi se osi podudarale s njenim osima, glasila bi:

$$u^2 F + v^2 \left(\frac{1}{2} - F\right) = m - 1 \tag{9}$$

Jasno je, da će ova jednadžba predstavljati elipsu, ako F bude veće od nule, a manje od jedne polovine, t. j. za

$$0 < F < \frac{1}{2}$$

Promatrajući dalje ovu elipsu dolazi se do veoma važnih jednadžbi i zaključaka. Tako izlazi da je

$$\left(\frac{\varrho_{45^0}}{4} \right) = \frac{2\,(a^2 + b^2)}{a^2\, b^2}$$

i

$$(m - 1) = \frac{a^2\, b^2}{2\,(a^2 + b^2)} \tag{10}$$

U ovim izrazima sve su oznake za pojedine veličine poznate, a prema tome slijedi da je

$$\left(\frac{\varrho_{45^0}}{4} \right)^2 = m - 1$$

Sad je tek razumljiv onaj zahtjev kod iznalaženja one granične elipse, koja će imati najmanji onaj dijametar, koji s osima elipse zatvara kut od 45^0.

Taj zahtjev potpuno se opravdava tom činjenicom, što izraz $(m - 1)$ prestavlja — kao što je poznato — deformaciju dužina uopće, a prema tome i kod ove projekcije. Prema tome kad smo pronašli onu elipsu, koja ima najmanji taj dijametar, onda smo ujedno našli i najmanju deformaciju dužina na granici promatranog područja, kad se ovo predstavlja u jednoj projekcionoj ravnini.

Da bismo izvršili kontrolu našeg sveukupnog rada, izračunat ćemo vrijednost $(m - 1$ po svim mogućim formulama. Tako dobijemo:

$$(m - 1) = \left(\frac{\varrho_{45^0}}{4} \right)^2 = 1986{,}9 \tag{a}$$

$$(m - 1) = \frac{a^2\, b^2}{2\,(a^2 + b^2)} = 1983{,}7 \tag{b}$$

$$(m - 1) = As^2 - 2\,Bst + \left(\frac{1}{2} - A\right) t^2 = 1980{,}5 \tag{C}$$

Za kontrolno računanje pod (C) očitane su koordinate za graničnu točku br. 25 s pomoćne karte, i dobiveno je

$$s = -47{,}2 \text{ mm}$$
$$t = -55{,}7 \text{ mm}$$

Kako se iz prednjih rezultata vidi razlike su vrlo malene, a potiču od mjerenja veličina na karti.

Ovi rezultati nam pokazuju da su veličine F, ε, a zatim koeficijenti A, B i C točno sračunati, i da ih sa sigurnošću možemo koristiti za Tissot-ovu projekciju naše države.

Na početku smo spomenuli da je za mjerilo pomoćne karte uzeto, da jedna minuta luka ekvatora iznosi 1 mm na karti. Međutim, da bi mjerilo izrazili na uobičajeni način, potrebno je sračunati dužinu luka ekvatora za jednu minutu.

Ako uzmemo Bessel-ove dimenzije za Zemljin elipsoid

$$a = 6377\ 397,\ 1553 \text{ m}$$

$$b = 6356\ 078{,}96325 \text{ m}$$

i sračunamo srednji radius krivine po Grunert-ovoj formuli $R_0 = \sqrt{MN}$ za širinu $\varphi_0 = 43^0 58' 30''$, dobit ćemo za

$$R_0 = 6\ 376\ 509{,}78 \text{ m}$$

$$\text{i arc } 1' = 1\ 854{,}8775 \text{ m}$$

Prema tome izlazi da jednom milimetru na pomoćnoj karti odgovara 3709,755 metara u prirodi, što znači da mjerilo pomoćne karte iznosi:

$$1 : 3\ 709\ 755 = M$$

Pomnožimo li vrijednosti za linearnu deformaciju $(m - 1)$, koje smo naprijed sračunali na tri načina, mjerilom karte dobit ćemo:

$$(m - 1) = 1986{,}93 \times M = 0{,}000536 \qquad \text{(a)}$$

$$(m - 1) = 1983{,}67 \times M = 0{,}000535 \qquad \text{(b)}$$

$$(m - 1) = 1980{,}50 \times M = 0{,}000534 \qquad \text{(c)}$$

Kako se iz ovih rezultata vidi deformacija dužina ostaje manja od 6/1000.

To je drugi važni odgovor, koji smo dobili promatrajući graničnu elipsu za našu državu a taj glasi:

da ne postoji nijedan način preslikavanja odnosno da ne postoji nijedna projekcija, u kojoj bi se mogla naša država kartirati u jednom koordinatnom sistemu, a da deformacija dužina bude manja od 0,000535, odnosno od 535 m/m na 1 km.

Jer, kao što smo naprijed pokazali, ovaj iznos predstavlja najmanji mogući dijametar ϱ_{45^0} elipse deformacije, a kako je on jednak deformaciji dužina, to znači da je to onda i najmanja moguća deformacija dužina.

Kako se danas kod premjera država zahtjeva, da točnost projekcije bude veća od 0,0001 odnosno od 1 dm na kilometar, to je onda očevidno, da se naša država ne može kartirati u jednom koordinatnom sistemu. Stoga se je kod izbora projekcije za našu državu uzela Gauss-Krüger-ova projekcija meridijanskih zona s tri koordinatna sistema.

Na kraju je potrebno skrenuti pažnju na postupak pri računanju veličina s i t, za koje smo već na samom početku rekli, da predstavljaju dužine lukova meridijana i paralela, a koje su nam potrebne za računanje pravokutnih koordinata x i y.

Ako se možemo zadovoljiti točnošću, koju nam daje predpostavka da je Zemlja kugla sa srednjim radiusom $R_0 = MN$, onda bi veličine s i t računali po formulama:

$$s = \frac{R_0 (\varphi - \varphi_0)''}{\varrho''} \qquad t = \frac{R_0 \lambda - \lambda_0)'' \cos \varphi_0}{\varrho''}$$

Želimo li pak da Zemlju smatramo elipsoidom, tada dužine lukova meridijana i paralela računamo po formulama:

$$s = \frac{a(1 - \frac{e^2}{4})(\varphi - \varphi_0)''}{\varrho''} - \frac{3\,ae^2}{4} \cos(\varphi + \varphi_0) \sin(\varphi - \varphi_0)$$

$$t = \frac{a(\lambda - \lambda_0)''\,(1 + \frac{e^2}{2} \sin \varphi_0)}{\varrho''}$$

Na ovaj način sračunate vrijednosti za s i t uvrščujemo u opće formule Tissot-ove projekcije i dobijemo pravokutne koordinate x i y.

Iz ovog kratkog prikaza ove projekcije može se stvoriti donekle slika o njenim osobinama, ali ujedno mogla bi se dobiti nerealna slika kao da nije najpogodnija za masovna računanja točaka. Međutim, sigurno je, da bi se posebnim studijem i izradom potrebnih tablica znatno smanjile sve računske operacije i na taj način bi se projekcije prilagodile širokoj upotrebi. U ovom obliku ona se može preporučiti samo za izradu karata srednjih mjerila. Osobito bi se moglo preporučiti za izradu karata mjerila 1 : 500 000 do 1 : 1,000 000 naše države, Balkanskog poluotoka i Srednje Evrope, da ne govorimo o drugim područjima, koja nisu za nas interesantna.