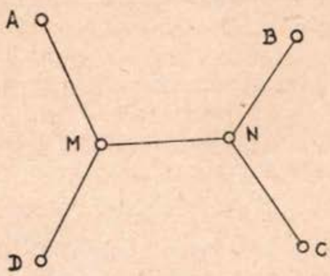
Ing. Miloje Mitić, savetnik SGU-e Beograd

Izravnavanje nivelmanskih mreža uprošćenom metodom Soutwell-Black-a

Za računanje napona štapova rešetkastog nosača, profesor *R. V. Southwell* predložio je metodu postupnih približavanja koju je *A. N. Black* primenio za izravnavanje mreža, a specijalno za nivelmanske mreže. Otud je ova metoda i dobila naziv *»Southwell-Black«*.

Da bi se lakše razumelo uprošćavanje ove metode koje smo izvršili, moramo u najkraćim potesima izložiti njenu suštinu.

Uzmimo najprostiji slučaj jedne nivelmanske mreže uklještene između datih repera (Slika 1) gde su kote repera A, B, C, D određene pa treba odrediti kote repera M i N.



Sl. 1.

Oznake. — M i N su čvorni reperi. MA, MN, MD, NB, NC su nivelmanski vlaci koji sačinjavaju mrežu. d_{MA}, $d_{MN} \ldots d_{NC}$ su visinske razlike između repera M—A, M—$N \ldots N$—C dobijene putem nivelanja. h_A, $h_B \ldots h_N$ su kote repera $A, B \ldots N$ p_{MA}, $p_{MD} \ldots p_{NC}$ su težine visinskih razlika i uvek imaju pozitivan znak tj. $p_{MN} = p_{NM}$ a određuju se po formuli $p_{MN} = k/l_{MN}$ za slučaj da je $l_{MN} > Z$ (Z = 60 km) odnosno po formuli $p_{MN} = k/\tau^2 l_{MN}$ za slučaj da je $l_{MN} < Z$ (τ je ukupna verovatna greška na kilometar).

Kod ove metode operiše se kotama umesto visinskim razlikama. Za repere čije su kote nepoznate, ove se određuju privremeno i to na taj način što se kotama datih repera dodaju visinske razlike dobijene iz nivelanja. Da bi otstupanja koja ulaze u izravnanje bila što manja, najbolje je ove privremene kote dobiti iz svih okolnih datih repera pa za krajnju vrednost usvojiti prostu aritmetičku sredinu.

Ako sa e_{MA}, $e_{MD} \ldots e_{NC}$ označimo razlike između visinskih razlika dobijenih nivelanjem i onih dobijenih iz razlike kota, $e_{MA} = d_{MA} - h_M + h_A$ onda se suština izravnavanja svodi na to da se tražene kote repera M i N odrede pod uslovom da $\Sigma p_{MK} \cdot e^2_{MK}$ *bude minimum*, gde indeks K označava sve repere na koje se reper M oslanja (u našem slučaju to su reperi A, D, N).

Da bi prethodni izraz bio minimum, moramo da promenimo privremenu kotu repera M za neku vrednost u_M tj. moramo da smanjimo e_{MK} za vrednost u_M pa ćemo imati: $\Sigma p_{MK} (e_{MK} - u_M)^2$ treba da bude minimum.

Vrednost ovog izraza biće minimum kada je njegova varijacija δ jednaka nuli tj.

$$\delta \Sigma p_{MK} (e_{MK} - u_M)^2 = 0 ;$$

$$\delta (\Sigma p_{MK} e^2_{MK} - 2 u_M p_{MK} e_{MK} + u^2_M \Sigma p_{MK}) = 0$$

U poslednjem izrazu p_{MK} i e_{MK} su stalne, određene vrednosti, prema tome varira samo u_M, pa ćemo imati:

$$-2 \Sigma p_{MK} e_{MK} + 2 u_M \Sigma p_{MK} = 0$$

$$u_M = \frac{\Sigma p_{MK} e_{MK}}{\Sigma p_{MK}}$$

Black stavlja $\Sigma p_{MK} e_{MK} = U_M$; $\Sigma p_{MK} = (-R_{MM})$ (pa dobija:

$$u_M = \frac{U_M}{(-R_{MM})}$$

Teorisko rešenje svelo bi vrednost $\Sigma p_{MK} e_{MK}$ na nulu. Mi se ovome rešenju približavamo dajući reperu M pomeranje odnosno popravke u_M sve dotle dok ne svedemo vrednost $\Sigma p_{MK} \cdot e_{MK}$ na nulu tj. iz prvobitne vrednosti U_M i $(-R_{MM})$ sračunamo kotu repera M, dobićemo posle toga drugu vrednost za e tj. dobićemo neko e_1 pa prema tome $\Sigma p_{MK} \cdot e_{M_1K} = U_{M1}$. Tako bismo išli sve dotle dok bi neko u_{Mn} bilo manje od tačnosti sa kojom smo vršili nivelanje i tu bi stali. Krajnja vrednost popravke bila bi:

$$\Sigma u_M = u_{M1} + u_{M2} + \ldots + u_{Mn}$$

Međutim ovaj problem ne možemo posmatrati ovako jednostrano, tj. kao da se pomera svaki reper za sebe, već moramo tražiti uzajamni uticaj na promenu kota susednih repera usled njihovog istovremenog pomeranja. Drugim rečima, moramo ispitati šta se dešava sa reperom M kada se njemu susedni reper N pomera za vrednost u_N.

Neka je R_{MN} varijacija vrednosti U_M repera M usled pomeranja repera N za jedinicu (recimo za 1 mm). Tada ćemo imati:

$$R_{MN} = \frac{dU_M}{d u_N} = \frac{d (p_{MA} e_{MA} + p_{MD} e_{MD} + p_{MN} e_{MN})}{d u_N}$$

Pošto su prvi i drugi član brojitelja stalna veličina, jer smo pretpostavili da se menja samo e_{MN}, to su njihovi izvodi jednaki nuli, pa imamo:

$$R_{MN} = p_{MN} \cdot \frac{d e_{MN}}{d u_N}$$

Kako je $\frac{d e_{MN}}{d u_N} = 1$ to za pomeranje repara N za jedinicu dobijamo:

$R_{MN} = p_{MN}$ a za pomeranje od u_N biće:

$$\underset{N}{\Delta} U_M = p_{MN}\ u_N = R_{MN} \frac{\Sigma p_{NK}\, e_{NK}}{\Sigma p_{NK}}$$

Black stavlja $\frac{R_{MN}}{\Sigma p_{NK}}$ pa će biti:

$$\underset{N}{\Delta} U_M = r_{NM}\, U_N \quad \text{odnosno} \quad \underset{M}{\Delta} U_N = r_{MN}\, U_M$$

Kada se reperi M i N poklapaju, onda je $R_{MN} = R_{NM}$ pa je

$$r_{MN} = \frac{R_{MM}}{(-R_{MM})} = -1$$

te imamo:

$\Delta U_{MN} = -U_M$ (varijacija vrednosti U_M od pomeranja samog repera M).

Uzevši i ove međusobne uticaje u obzir, krajnja formula za računanje popravaka privremenih kota glasi:

$$\Sigma u_M = \frac{\Sigma U_M}{(-R_{MM})} \quad \text{za reper } M \text{, odnosno}$$

$$\Sigma u_N = \frac{\Sigma U_N}{(-R_{NN})} \quad \text{za reper N.}$$

Ovdje je, po Black-u:

$$\Sigma U_M = U_{M1} + U_{M2} + \dots\dots\dots + U_{Mn}$$
$$\Sigma U_N = U_N + U_{N1} + U_{N2} + \dots. + U_{Nn}$$

gde članovi $U_{M1} \dots U_{Mn}$ odnosno $U_{N1} \dots U_{Nn}$ pretstavljaju postupna približavanja čiji broj zavisi od veličina početnih vrednosti $U_M; U_N$ (u primreu koji je dat radi objašnjenja primene ove metode ima 8 računanja).

Ova metoda, pod nazivom »metoda Southwell-Black«, preporučena je na kongresu u Vašingtonu 1939, od strane Međunarodne Geodetske i Geofizičke Unije a isto tako i na kongresu u Oslu 1948.

Međutim, onako, kako je prikazana (Bulletin géodésique № 62, 1939), ova metoda izravnavanja ne izgleda, s obzirom na brzinu računanja, mnogo izdašnija od klasične metode. Ustvari nije tako. Prilikom ispitivanja ove metode zapazili smo da se izvesne operacije nepotrebno ponavljaju pa smo izvršili izvesna uprošćavanja koja ovoj metodi daju, u pogledu ušteda u vremenu, veliku prednost u odnosu na ostale metode.

U formulama za ΣU_M i ΣU_N, članovi $U_{M1}, U_{M2} \dots U_{Mn}$ odnosno $U_{N1}, U_{N2}, \dots U_{Nn}$ imaju, prema prethodno nađenim formulama, sledeća značenja:

$$U_{M1} = U_M + U_N \cdot U_{NM}\ ;\ U_{M2} = U_N \cdot r_{NM}\ ;\ \dots.\ U_{Mn} = U_{Nn-1} \cdot r_{NM}\ ;$$

$$U_{N1} = \cdot U_{M1} \cdot r_{MN};\ U_{N2} = U_{M2} \cdot r_N\ ; \dots\dots\dots\ U_{Nr} = U_{Mn} \cdot r_{MN}$$

Ako sada, u formulama za ΣU_M, ΣU_N umesto $U_{M1} \dots U_{Mn}$, $U_{N1} \dots U_{Nn}$ unesemo njihove vrednosti, dobićemo:

$$\Sigma U_M = (U_M + U_N \cdot r_{NM}) + (U_M + U_N\ r_{NM})\ r_{NM} \cdot r_{MN} + (U_M + U_N\ r_{NM})$$
$$r_{MN}^2 \cdot r_{NM}^2 + \dots. = (U_M + U_N \cdot r_{NM})\ (1 + r_{MN}\ r_{NM} + r_{MN}^2\ r_{MN}^2 + \dots.);$$

$$\Sigma U_N = U_N + (U_M + U_N\ r_{NM})\ r_{MN} + (U_M + U_N\ r_{NM})\ r_{MN} \cdot r_{NM} \cdot r_{MN} +$$
$$+ (U_M + U_N \cdot r_{NM})\ r_{MN} \cdot r_{NM}^2 \cdot r_{MN}^2 + \dots.$$

Reperi koji se određuju	M			N		
Reperi koji se vezuju za tražene repere	N	A	D	M	B	C
Usvojene kote h_K	33,886	28,228	70,389	83,708	55,137	92,037
Usvojene kote traženih repera h_M sa suprotnim znakom	— 83,708	— 83,708	— 83,708	— 33,886	— 33,886	— 33,886
Razlike $h_K - h_M$	— 49,822	— 55,480	— 13,319	+ 49,822	+ 21,251	+ 58,151
Razlike iz nivelanja d_{MK}	+ 49,843	+ 55,421	+ 13,379	— 49,843	— 21,296	— 58,106
$e_{MK} = d_{MK} + (h_K - h_M)$	+ 21	— 59	— 60	— 21	— 45	+ 45
Težine p_{MK}	256	100	25	256	16	64
Zbir težina Σp_{MK}		381			336	
Proizvodni $p_{MK} \cdot e_{MK}$	+ 5376	— 5900	+ 1500	— 5376	— 720	+ 2880
$U_M = \Sigma p_{KM} \cdot e_{MK}$		+ 976			— 3216	
$U_M \cdot \Sigma p_{NK} + U_N \, p_{MN} = I$	—495360					
$U_N \cdot \Sigma p_{MN} + U_M \, p_{MN} = II$	—975440					
$\Sigma p_{MK} \cdot \Sigma p_{NK} - p^2_{MN} = III$	62480					
$\Sigma u_M = \frac{I}{III}$	— 7,9					
$\Sigma u_N = \frac{II}{III}$	— 15,6					
Definitivne kote $h_M = h_M + \Sigma u_M$	33,870			83,700		
Definitivne visinske razlike $d'_{MK} = h_K - h'_M$	+ 49,830	+ 55,472	+ 13,311	— 49,830	— 21,267	— 58,167
Popravka od izravnanja $'e'_{MN} = d'_{MK} - d_{MK}$	— 13	+ 51	— 68	+ 13	+ 29	— 61

Stavimo u poslednjoj formuli izraz $(U_M + U_N\ r_{NM})\ r_{MN}$ pred zagradu pa ćemo dobiti:

$$\Sigma U_N = U_N + r_{MN}\ (U_M + U_N \cdot r_{NM})\ (1 + r_{MN} \cdot r_{NM} + r_{MN}^2 \cdot r_{NM}^2 + \ldots .)$$

Izraz

$$1 + r_{MN}\ r_{NM} + r_{MN}^2 \cdot r_{NM}^2$$

je zbir geometriske progresije čija je vrednost

$$\frac{1}{1 - r_{MN}\ r_{NM}}$$

jer je proizvod

$$r_{MN}\ r_{NM} < 1$$

Prema tome imaćemo:

$$\Sigma U_M = \frac{U_M + U_N \cdot r_{NM}}{1 - r_{MN}\ r_{NM}}; \quad \Sigma U_N = \frac{U_N + U_M \cdot r_{MN}}{1 - r_{MN}\ r_{NM}}$$

a konačne popravke biće

$$\Sigma u_M = \frac{U_M + U_N \cdot r_{NM}}{1 - r_{MN}\ r_{NM}} : (-R_{MM}); \quad \Sigma u_N = \frac{U_N + U_M \cdot r_{MN}}{1 - r_{MN} \cdot r_{NM}} : (-R_{NN})$$

Tako smo, bez postupnih približavanja, dobili definitivne formule za popravke privremenih kota repera M i N. Baš zbog toga nemamo više nikakve potrebe za uvođenje oznaka R_{MN}, R_{NM}), $(-R_{MM}$, $(-R_{NN})$ i računanje vrednosti r_{MN}, r_{NM} koje je uveo Black pa kada, umesto njih, uvedemo oznake iz kojih su proizašle, dobićemo definitivno:

$$\boxed{\Sigma u_M = \frac{U_M\, \Sigma p_N + U_N\, p_{MN}}{\Sigma p_M \cdot \Sigma p_N - p_{MN}^2}}$$

$$\boxed{\Sigma u_N = \frac{U_N\, \Sigma p_M + U_M\, p_{MN}}{\Sigma p_M \cdot \Sigma p_N - p_{MN}^2}}$$

Radi lakšeg razumevanja, ponovimo još jednom značenja pojedinih oznaka u ovim formulama.

Σu_M, Σu_N definitivne popravke privremenih kota repera M i N;

$$\left.\begin{aligned} U_M &= p_{MA}\ e_{MA} + p_{MD}\ e_{MD} + p_{MN}\ e_{MN} \\ U_N &= p_{NB}\ e_{NB} + p_{MC}\ e_{MC} + p_{NM}\ e_{NM} \end{aligned}\right\} \text{za slučaj na sl. 1}$$

$$\Sigma p_M = p_{MA} + p_{MD} + p_{MN}; \quad \Sigma p_N = p_{NB} + p_{NC} + p_{NM} \quad p_{MN} = p_{NM}$$

težina visinske razlike.

Iz priloženog primera najbolje se vidi način primene ove uprošćene metode.

Određivanje kota repera M i iz datih kota repera A, B, C, D i merenih visinskih razlika.

Kao što se iz priloženog obrasca vidi, samo izravnavanje svodi se na određivanje tri vrednosti označene u obrascu sa I, II i III što se lako izračuna mašinom za računanje.

Za kontrolu određivanja težina treba da je $p_{M_N} = p_{N_M}$ a za kontrolu određivanja vrednosti e i U, treba da je $e_{M_N} = -e_{N_M}$; $p_{M_N} \cdot e_{M_N} = -p_{N_M}{}^{N} \cdot e_M$.
Na kraju treba da je:

$$\frac{I}{II} = \frac{\Sigma u_N}{\Sigma u_M}$$

SUR LA COMPENSATION DES RÉSEAUX DES NIVELLEMENTS PAR LA MÉTHODE SIMPLIFIÉE SOUTWELL-BLACK

Après avoir donné les formules fondamentales de compensation du réseau de nivellement par la méthode Soutwell-Black, l'auter a demontré une simplification notable de ladite méthode si qu' à présent, en ce qui concerne l'économie du temps, elle possède un avantage considérable sur les autres méthodes clasiques.

Après l'éxamen théorique, l'auteur expose son application pratique en calculant un simple réseau de deux répères nodaux, dont les dates numériques sont donneés dans le tableau ci-joint. De cet exposé on peut voir que la compensation par la méthode simplifiée Soutwell-Black se reduit en détermination des trois valeurs denotés dans le tableau par I, II, III, qui sont facillement calculable à la machine à calculer.