Rudolf Mlinar, geom. — Kikinda

Vektori u prostoru, njihova transformacija i primena

1.

U Geodetskom listu br. 1—2 iz 1955 god. mogli smo videti, da smo u rešavanju praktičnih zadataka iz geodezije ponekad prinuđeni, da se poslužimo primenom vektora u prostoru (vidi članak Ing. Ivana Tomkiewicza iz Ljubljane).

U ovom članku prikazana je primena vektora u prostoru, u odnosu na Dekartov pravougli triedar osa.

U ovom pravouglom koordinatnom sistemu, možemo svaki vektor napisati u obliku

$$A = a_1 / a_2 / a_3 = ia_1 + ja_2 + ka_3$$

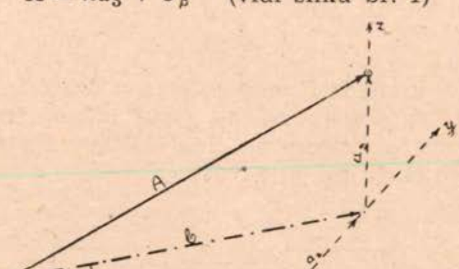
gde su:

$$a_1 = a \cos \alpha = x$$
$$a_2 = a \cos \beta = y$$
$$a_3 = a \cos \gamma = z$$

dok su i, j, k osvnovni ortovi, koji određuju Dekartov pravougli triedar osa.

Ako projektujemo ovaj vektor na jednu od ravni Dekartovog pravouglog triedra, na pr. na ravan određenu osama (x, y), onda možemo ovaj vektor, s obzirom na već ranije prikazanu simboliku za vektore u ravni, napisati u obliku

$$A = ka_3 + b_\beta \quad \text{(vidi sliku br. 1)}$$



Sl. 1.

ili, ako ga projektujemo na ravan (y, z), onda ga možemo napisati u obliku

$$A = ia_1 + c_\gamma$$

odnosno simbolično

$$A = a_3 \,/\, b_{\beta} = a_1 \,/\, c_{\gamma}$$

i mi možemo u ovom slučaju ovakve vektore nazvati *cilindričnim vektorima* pošto su koordinate ovog vektora određene u cilindričnom koordinatnom sistemu.

Najzad u sfernom polarnom koordinatnom sistemu, vektor je određen svojom absolutnom vrednošću $|A|$ i uglovima α, β. (vidi sliku br. 2)

Ako ovaj vektor projektujemo n. pr. na (y, z) ravan, onda ga možemo napisati u obliku:

$$A = ia \cos \alpha + ja \sin \alpha \cos \beta + ka \sin \alpha \sin \beta$$

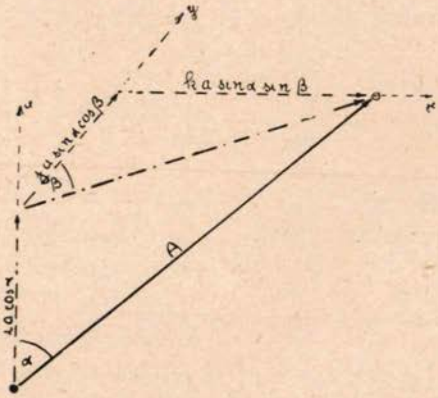
odnosno

$$A = a\,(\cos \alpha \,/\, \sin \alpha_{\gamma})$$

ili simbolično

$$\boxed{\begin{array}{l} A = a \\ \quad\quad \alpha \\ \quad\quad\;\; \beta \end{array}}$$

(vidi sliku br. 2)



Sl. 2.

Transformacija vektora iz jednog sistema u drugi.

a) Neka je dat vektor: $A = a_1 \,/\, a_2 \,/\, a_3$. Ovaj vektor treba transformirati iz Dekartovog pravouglog sistema u cilindrični koordinatni sistem.
Onda će biti u projekciji na (y, z) ravnu:

$$b_{\beta} = a_2 \,/\, a_3$$

te

$$\boxed{A = a_1 \,/\, b_{\beta}}$$

b) Isti vektor treba napisati u polarnom kordinatnom sistemu.
Ovde će biti:

$$a_{\alpha} = a_1 \,/\, b_{\beta}$$
$$b = a_2 \,/\, a_3$$

i konačno, pošto iz toga slede: α i β kao i absolutno $|A|$.

$$\boxed{\begin{array}{l} A = a \\ \quad\quad \alpha \\ \quad\quad\quad \beta \end{array}}$$

c) Neka nam je dat vektor

$$\begin{array}{l} A = a \\ \quad\quad \alpha \\ \quad\quad\quad \beta \end{array}$$

$$a_1 = a \cos \alpha$$

U tom slučaju će biti:

Transformirajmo ovaj vektor u jedan cilindričan vektor!

$$a \sin \alpha_\beta = b_\beta$$

t. j.

$$\boxed{A = a_1 / b_\beta}$$

d) Isti vektor treba transformirati u jedan vektor sa ortogonalnim komponentama.

Ovde će biti

$$\begin{array}{ll} a_1 = a \cos \alpha & b = a \sin \alpha \\ a_2 = b \cos \beta & \\ a_3 = b \sin \beta & \text{i konačno} \end{array}$$

$$\boxed{A = a_1 / a_2 / a_3}$$

3.

PRIMENA

U primeni uzećemo za podlogu zadatak iz članka u geodetskom listu br. 1—2 iz 1955 god. strana 53., pošto nam je ovaj slučaj već poznat, pa se primena može kontrolisati.

1. Ovde nam je vektor A dat u obliku:

$$\begin{array}{l} A = a \\ \quad\quad \alpha \\ \quad\quad\quad \beta \end{array}$$

gde je:

$$\begin{array}{l} \alpha = 90^0 - \beta_1 = 82^0\, 11'\, 04'' \\ \beta = \quad\quad\quad\quad 180^0 \end{array}$$

pa ga možemo odmah napisati, pošto je $a = 10$, dakle

$$\begin{array}{lll} A = 10 & & \\ \text{A} & 82^0\, 11'\, 04'' & \\ \text{A} & & 180 \end{array}$$

Transformirajmo ga u jedan cilindričan vektor i to s razloga, jer se u cilindričnim vektorima može najlakše a i najpreglednije računati.

U tom slučaju će biti:

dakle

$$A = a\,(\cos a\,/\,\sin a_{\beta}$$

$$\underline{\underline{A = 1{,}3598\,/\,9{,}90753 \quad {}_{180}}}$$

2. Vektor B dat nam je u istom obliku

$$\underline{B = b \quad {}_{\beta} \quad {}_{\gamma}}$$

gde je

$$\beta = 90^0 + \beta_2 = 90^0\,44'\,17''$$

$$\gamma = \quad a \quad = 19^0\,52'\,33''$$

možemo dakle napisati, pošto je i $b = 10$

$$\underline{\underline{B = 10 \quad {}_{90^0\,44'\,17''} \quad {}_{19^0\,52'\,33''}}}$$

Pretvoreno u jedan cilindričan vektor će biti

$$B = 10\,(\cos 90^0\,44'\,17''\,/\,\sin 90^0\,44'\,17'''_{\gamma})$$

odnosno

$$\underline{\underline{B = -0{,}1288\,/\,9{,}9992 \quad {}_{19^0\,52'\,33''}}}$$

Prema tome mi imamo sada ovde dva vektora u cilindričnim **koordinatama,** koja smo dobili iz datog polaznog koordinatnog sistema.

Pošto sa našim instrumentima mi nismo u stanju da izmerimo ugao φ **u** ravni, koja je određena sa ova dva vektora, mi moramo pribeći rešavanju **ovog** zadatka preko skalarnog proizvoda vektora, gdje je

$$A\,B = a\,b\cos\varphi = 10 \cdot 10 \cdot \cos\varphi$$

U našem slučaju mi smo imali

$$A = a_3\,/\,b'_{\beta} = 1{,}3598\,/\,9{,}90753 \quad {}_{180}$$

$$B = b_3\,/\,c'_{\gamma} = -0{,}1288\,/\,9{,}9992 \quad {}_{19^0\,52'\,33''}$$

Kod cilindričnih vektora je:

$$\underline{A\,B = a_3\,b_3 + b'c\cos(\beta - \gamma)}$$

U našem slučaju ćemo dakle imati

$$A\,B = [(+1{,}3598)\cdot(-0{,}1288)] + [(+9{,}90753)\cdot(+9{,}9992)\cdot(\cos 160^0\,07'\,27'')]$$

t. j.

$$A\,B = (-0{,}1751) + (-93{,}1669)$$

i prema tome

$$\cos\varphi = \frac{A\,B}{a\,b} = -\frac{93{,}342}{100} = -0{,}93342$$

t. j.

$$\varphi = 158^0\,58'\,40''$$

U preglednom obliku i sa našom simbolikom mi možemo dati ovo rešenje u dva stava:

Dato je:

$$A = a_{\alpha_\beta}$$

$$B = b_{\gamma_\delta}$$

Traži se skalarni proizvod vektora i ugao φ, koji ova dva vektora zaklapaju.

Rešenje:

1. Transformacija vektora.

$$A = a\,(\cos \alpha \,/\, \sin \alpha_\beta) = a_n \,/\, c_\beta$$
$$B = b\,(\cos \gamma \,/\, \sin \gamma_\delta) = b_n \,/\, d_\delta$$

2. Skalarni proizvod vektora i $\cos \varphi$ je:

$$A\,B = a_n\, b_n + c \cdot d \cos (\beta - \delta) = m$$

$$\cos \varphi = \frac{m}{a \cdot b}$$