Ing. Ivan Tomkiewicz — Ljubljana

O prenosu projektov v naravo

Prenos projektov v naravo je del dejavnosti uporabne geodezije. Pred delom na terenu je treba na načrtih odčitati koordinate točk, ki jih je treba prenesti v naravo. Odčitati je potrebno dolžine linij, nagibe in kote. Odčitanje koordinat se vrši le na en edinstven način, dolžine linij ter nagibe oz. kote, pa se da določiti v glavnem na dva načina.

Po prvem načinu se dolžine linij ter nagibi oz. koti direktno odčitajo iz načrta z nonijskem merilom oz. s transporterjem. Linijo ali nagib korigiramo nato s ozirom na deformacijo papirja. Ta način je detajlno opisan v knjigi: »Primenjena geodezija« univ. prof. ing. A. Podpečena. Radi primerjave se bom poslužil tudi enačbo iz te knjige. Drugi način pa je, da določimo dolžino linije oz. nagib s pomočjo koordinat krajišč linije. Namen te moje razprave je prikazati, kateri teh dve načinov je točnejši ali sicer bolj praktičen.

Preidem k prvemu načinu. Linijo se, kot je že rečeno, odčita z nonijskem merilom ter dobim tako njeno dolžino »s«. Radi deformacije papirja pa ji je treba dodati ds po enačbi:

$$ds = s \cdot \sin^2 \nu \cdot \sigma + s \cdot \cos^2 \nu \cdot \sigma' \qquad \ldots\ldots\; 1$$

kjer sta

$$\sigma = \frac{dy}{\Delta y},\; \sigma' = \frac{dx}{\Delta x} \qquad \ldots\ldots\; 2$$

relativni deformaciji papirja v smerah y- oziramo x- osi.

Nagib pa odčitamo z transporterjem ter dobimo njegov iznos ν. Radi deformacije papirja pa mu je treba dodati korekcijo $d\nu$ po enačbi:

$$d\nu = \frac{\sin 2\nu}{2} \cdot (\sigma - \sigma') \qquad \ldots\ldots\; 3$$

Obe korekciji ds in $d\nu$ zavisita od nagiba ν.

Toliko o prvem načinu. Pri drugem načinu pa najprej odčitamo koordinate krajišč linije, katere takoj korigiramo z ozirom na deformacijo papirja. Na primer za točko A (skica 1) se dobi koridirane koordinate po enačbah:

$$y_A = y_o + \frac{L}{dh + hc} \cdot dh \qquad \ldots\ldots\; 4$$

$$x_A = x_o + \frac{K}{de + ea} \cdot de \qquad \ldots\ldots\; 5$$

kjer so L in K teoretske vrednosti stranice kvadrata.

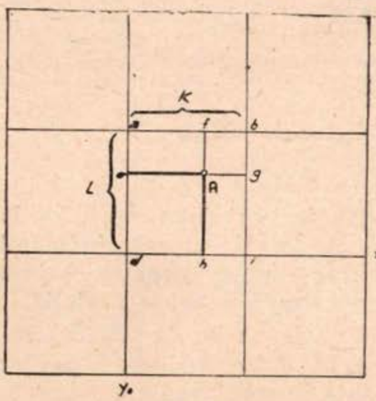
Vse dosedaj napisane enačbe sem vzel iz že citirane knjige »Primenjena geodezija«. Sedaj pa začnem s samostojno študijo.

Tudi po enačbah 4 in 5 določene koordinate so obremenjene z nekimi napakami z ozirom na netočnost nastavljanja merilne naprave in odčitovanja. Vsled tega bo tudi razdalja »s« met točkama A in B (skica 2), ki je izračunana iz koordinat teh točk, imela neko omejeno točnost. Enačba za dolžino linije »s« izražena s pomočjo koordintnih diferenc se glasi:

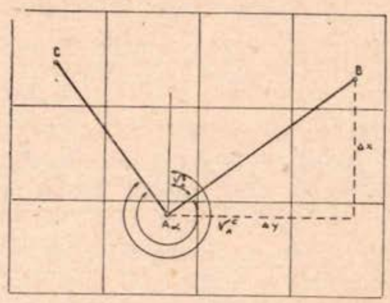
$$s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \qquad \ldots\ldots\; 6$$

Totalni diferencijal enačbe 6 pa je

$$ds = d\Delta x \cdot \cos \nu + d\Delta y \cdot \sin \nu \qquad \ldots\ldots\; 7$$



Skica 1



Skica 2

Če diferenciramo enačbo 7 po ν, dobimo nagib, pri katerem je ds maksimalen.

$$\frac{d\,(ds)}{d\,\nu} = -\,d\Delta x \cdot \sin \nu + d\Delta y \cdot \cos \nu = 0$$

$$\frac{d\Delta y}{d\Delta x} = \frac{\sin \nu}{\cos \nu} = tg\,\nu \qquad \ldots\ldots\; 8$$

Ker gre tu za slučajne pogreške, lahko pišemo

$$d\Delta y = d\Delta x \qquad \ldots\ldots\; 9$$

Če to upoštevamo v enačbi 8, dobimo

$$tg\,\nu = 1 \;;\; \nu = 45^0$$

Iz tega bi sklepali, da je netočnost dolžine linije odvisna od nagiba ν te linije, kar je razvidno že iz enačbe 7. Na netočnost linije, odčitane na načrtu pa vpliva v glavnem nastavljanje trikotnika nonijskega merila in od samega odčitovanja. *To pa ne more biti odvisno od nagiba linije,* kar hočem matematično dokazati. Ker gre le za slučajne napake, je treba enačbo 7 pisati tako:

$$ds = \sqrt{d\Delta x^2 \cdot \cos^2 \nu + d\Delta y^2 \cdot \sin^2 \nu} \qquad \ldots\ldots\; 10$$

z upoštevanjem enačbe 9 pa dobimo

$$ds = d\Delta x = d\Delta y \qquad \ldots\ldots\; 11$$

S tem je dokazana neodvisnost točnosti na načrtu odčitane linije od njenega nagiba.

Ugotovimo, koliko znaša številčno $d\Delta x$ oz. $d\Delta y$ na načrtu v merilu 1:1000. Izrazimo Δx s koordinatama

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad \ldots\ldots\ 12$$

Totalni diferencijal gornje enačbe je

$$d\Delta x = dx_2 - dx_1 \qquad \ldots\ldots\ 13$$

Netočnost čitanja koordinat x_2 oz. x_1 je le vsled slučajnih napak, zato je potrebno pisati enačbo 13 na sledeči način

$$d\Delta x = \sqrt{dx^2{}_2 + dx^2{}_1} \qquad \ldots\ldots\ 14$$

Pravtako smemo pisati

$$dx_2 = dx_1 = dx \qquad \ldots\ldots\ 15$$

Z upoštevanjem enačbe 15 dobi enačba 14 sledečo obliko

$$d\Delta x = dx \cdot \sqrt{2} \qquad \ldots\ldots\ 16$$

Koliko pa znaša številčno dx? Napako napravimo pri določevanju razdalje »*de*« (skica 1). To pa določimo tako, da nastavimo ter čitamo tako pri »*d*« kot pri »*e*«. Na obeh mestih lahko pogrešimo za en nonijev podatek, ki znaša običajno 0,0001 m. V merilu 1:1000 pa znaša to 0,1 m. V celoti je razdalja »*de*« obremenjena z napako $0{,}1 \cdot \sqrt{2} = 0{,}14$ m kar pa je enako dx. Po enačbi 16 dobimo za $d\Delta x = 0{,}2$ m. Sledi sklep, da je netočnost linije, določene iz odčitanih koordinat iz načrta vsled netočnega nastavljanja in odčitavanja enaka 0,2 m.

Kako pa je s točnostjo direktno odčitane linije. Pri tem nastavimo in odčitamo na njenem začetku in koncu ter bo njena napaka $0{,}1 \cdot \sqrt{2} = 0{,}14$. Točnost direktno odčitane linije je torej nekaj večja kot linije, določene iz odčitanih koordinat.

Sedaj bomo proučili še točnost nagiba. Če odčitamo nagib s transporterjem, je točnost nagiba dana s točnostjo transporterja. S kolotačnim transporterjem, na katerem lahko direktno čitamo 2′, odčitamo nagib na 3′ — 4′ točno, z oz. na to, da imamo dva nastavka. Z dobrim steklenim (ali celoloidnim) transporterjem, s kakršnimi navado razpolagajo terenske sekcije, pa lahko običajno cenimo 10′.

Pa izračunajmo nagib iz odčitanih koordinat

$$\nu = \mathrm{arc}\,tg\ \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \ldots\ldots\ 17$$

Totalni diferencijal dν je

$$d\nu = \frac{\cos \nu}{s} \cdot d\Delta y - \frac{\sin \nu}{s} \cdot d\Delta x \qquad \ldots\ldots\ 18$$

Enačba 18 kaže, da je dν odvisen od nagiba ν. Slično kot preje lahko ugotovimo, da je $d\nu_{max}$ pri $\nu = 45^0$ itd. Vendar tudi $d\nu$ iz istih razlogov kot »*ds*« ne more zaviseti od nagiba ν. Enačbo 20 je treba pisati tako:

$$d\nu = \sqrt{\frac{\cos^2 \cdot \nu}{s^2} \cdot d\Delta y^2 + \frac{\sin^2 \nu}{s^2} \cdot d\Delta x^2} \qquad \ldots\ldots\ 19$$

ter z upoštevanjem enačbe 10

$$d\nu = \frac{d\Delta x}{s} = \frac{d\Delta y}{s} \quad .... \quad 20$$

Torej v resnici tudi netočnost nagiba ne zavisi od samega nagiba. Kolika je ta netočnost v številkah? Za načrt v merilu 1:1000 pri dolžini linije $s = 100$ m in $dx = dy = ds = 0{,}2$ m bo

$$d\nu = \frac{0{,}2}{100{,}0} \cdot 3438 = 6'$$

Netočnost kota, ki je razlika dveh nagibov, dobimo potem po enačbi

$$d\alpha = d\nu \cdot \sqrt{2} \quad .... \quad 21$$

Iz gornjega je razvidno, da je nagibe boljše določiti iz koordinat, ker pri dolžini linije 600 m dosežemo točnost 1'. Pri krajših razdaljah pa se lahko uporabi tudi kolotačni transporter. Pri daljših linijah ima metoda z računom odločno prednost pred kolotačnim transporterjem. Drugi manj točni transporterji pa sploh ne pridejo v poštev.

Tako pri določanju dolžin linij kot nagibov se pri obeh metodah približno enako zamudimo. Nobena od tih dveh metod ne kaže ekonomije časa. Metoda s koordinatami ima vendar to prednost, da razpolagamo s koordinatami krajišč, kar nam pride prav pri njih izkoličenju na terenu s pomočjo poligonske mreže. Taka krajišča so na pr. temena trasnega poligona komunikacij, začetki in konci krivin itd.

Ta celotna študija je narejena le z ozirom na slučajne pogreške, ki se neizogibno pojavijo pri nastavljanju in odčitavanju. Pri tem smo privzeli, kot da se da vpliv deformacije papirja na veličine koordinat, dolžin in nagibov linij določiti povsem brez napake. To pa ni slučaj, kajti tudi pri ugotovljanju deformacij se doseže neko omejeno točnost. Vse zgoraj omenjene količine so že zaradi tega obremenjene z nekimi napakami, to je z neko netočnostjo. Zanima nas, koliko to znese pri eni oz. drugi metodi.

Proučimo to najprej pri prvi metodi. Poiščemo totalni diferencijal enačbe 1:

$$d\,(ds) = s \cdot \sin^2 \nu \cdot d\sigma + s \cdot \cos^2 \nu \cdot d\sigma' \quad .... \quad 22$$

Na enačbo 24 apliciramo zakon o kopičenju napak, ter dobimo sledečo obliko

$$d\,(ds) = \sqrt{s^2 \cdot \sin^4 \nu \cdot d\sigma^2 + s^2 \cdot \cos_h \nu \cdot d\sigma^{\prime 2}} \quad .... \quad 23$$

$d\sigma$ in $d'\sigma$ lahko izrazimo na sledeč način:

$$d\sigma \cong \frac{k}{\Delta y} = \frac{k}{s \cdot \sin \nu} \text{ in } d\sigma' \cong \frac{k}{\Delta x} = \frac{k}{s \cdot \cos \nu} \quad .... \quad 24$$

Če vnesemo izraze 24 v enačbo 23, dobimo končno

$$d\,(ds) = k \quad .... \quad 25$$

Z »k« sem označil netočnost določenja prave razdalje med črtami decimetrske mreže ter znaša pri načrtu 1:1000 radi dvojnega nastavka $k = 0{,}14$ m kar je tudi vrednost za $d\,(ds)$.

Pa poiščimo še totalni diferencijal enačbe 3.

$$d\,(d\nu) = \frac{\sin 2\,\nu}{2}\,(d\sigma - d'\sigma) = \sin\nu \cdot \cos\nu \cdot (d\sigma - d\sigma') \quad \ldots\ldots\ 26$$

Radi aplikacije zakona o kopičenju napak, dobimo sledečo obliko

$$d\,(d\nu) = \sqrt{\sin^2\nu \cdot \cos^2\nu \cdot d\sigma^2 + \sin^2\nu \cdot \cos^2\nu \cdot d\sigma'^2} \quad \ldots\ldots\ 27$$

Z upoštevanjem enačb 24 pa dobimo končno

$$d\,(d\nu) = \frac{k}{s} \quad \ldots\ldots\ 28$$

Številčna vrednost za $d\,(d\nu)$ znaša pri razdalji $s = 100$ m $5'$ ter se manjša linearno z razdaljo.

Kako pa je s koordinatami? One se določajo po enačbah 4 in 5. Izraz

$$\frac{L}{dh + hc} = \frac{L}{L'} = \Psi\,, \quad L' = dh + hc \quad \ldots\ldots\ 29$$

je deformacijski modul. Njegov diferencijal je

$$d\,\Psi = -\frac{L}{L'^2} \cdot dL' = -\frac{dL'}{L} \quad \ldots\ldots\ 30$$

ker je

$$L' = L \quad \ldots\ldots\ 31$$

$d\,\Psi$ je netočnost določitve modula Ψ ter znaža najmanj nekako 0,0014, ker ima dL' številčno vrednost radi dveh nastavkov 0,00014 m. V najslabšem slučaju bodo koordinate vsled tega netočne do 0,14 m, $d_{\Delta}x = d_{\Delta}y = ds = 0{,}2$ m (glej enačbe 11 in 16). Netočnost v nagibu pa bo vsled tega $d\nu = 6'$ za $s = 100$ m ter se z večanjem razdalje linearno manjša (en. 20). Tudi pri upoštevanju tega vpliva da metoda z direktnim odčitovanjem za slučaje, kjer je »*dh*« oz. »*de*« (skica 1) večji od 70 m, za malenkost boljše rezultate kot metoda s koordinatami. V ostalih slučajih, ko je »*dh*« oz. »*de*« manjši od 70 m, pa je metoda s koordinatami točnejša. Na splošno lahko rečemo, da je vpliv netočnega določevanja deformacije na razdalje in nagibe linij pri obeh metodah v srednjem enak.

Poglejmo sedaj oba vpliva skupaj. Netočnost nastavljanja in odčitavanja ter netočnost določevanja deformacije papirja. Kako je to pri metodi z direktnim odčitavanjem? Pri tej metodi je »*ds*« = 0,14 m in *d (ds)* = 0,14 m. Oba vpliva dasta skupno netočnost kot sledi:

$$ds_{tot} = \sqrt{0{,}14^2 + 014^2} = 0{,}20 \text{ m}$$

Pri nagibu pa znaša $d\nu = 3'$ ter $d\,(d\nu) = 1'$ za razdaljo $s = 505$ m. Skupna netočnost pri tej razdlaji znaša

$$d\nu_{tot} = \sqrt{3'^2 + 1'^2} = 3{,}2'$$

Pri metodi s koordinatami pa znaša $ds = 0{,}20$ m) netočnost nastavljanja in odčitovanja) ter $ds = 0{,}10$ m (netočnost določanja deformacij) kot srednja vrednost za »*dh*« oz. »*de*« = 50 m. Skupaj znese

$$ds_{tot} = \sqrt{0,20^2 + 0,10^2} = 0,22 \text{ m}$$

Pri nagibu je vsled prvega vpliva $d\nu = 1,2'$ za razdaljo $s = 500$ m, vsled drugega vpliva pa je pri isti srednji vrednosti za »*dh*« oz. »*de*« ter razdalji $d\nu = 0,7'$. Skupaj znese za to razdaljo

$$d\nu_{tot} = \sqrt{1,2'^2 + 0,7'^2} = 1,4'$$

Te številčne vrednosti nam kažejo, da se da določiti dolžina linije po obeh metodah enako točno. Nagib pa se da po metodi s koordinatami pri daljših razdaljah določiti precej točneje. Vse gornje številke se nanašajo na merilo 1 : 1000. Za druga merila in druge razdalje linij pa je treba točnost posameznih elementov za vsak slučaj posebej izračunati.

Metoda s koordinatami je tudi bolj praktična. To vsled tega, ker je pri njeni uporabi potrebno imeti le nanašalne trikotonike, s katerimi lahko razpolaga vsaka terenska sekcija. Pri metodi z direktnim odčitavanjem pa je potrebno imeti nonijsko merilo ter kolotačni transporter, kar je težje dobiti kot nanašalne trikotnike.

Končni sklep, ki sledi iz te razprave, bi bil, da ima metoda s koordinatami gotove prednosti pred metodo z direktnim odčitavanjem, vsled česar priporočam njeno uporabo pri prenosih projektov v naravo.