Prof. Nikolaj Abakumov

Koeficijenti i slobodni članovi polusnih uvjetnih jednažbi

Kod izjednačenja bazisne mreže grada Zagreba 1848 godine, desio se jedan vrlo interesantan slučaj. Pri jednoj kombinaciji polusnih uvjetnih jednadžbi, bili su zadovoljeni potpuno svi uvjeti, ali logaritmi osnovne strane, koji su bili sračunati različitim putevima, nisu bili jednaki. Postojala je razlika čak za 198 jedinica sedme decimale logaritma. Drugim riječima, mreža nije bila izjednačenea. Po predlogu prof. Dr. Čubranića, jedna polusna uvjetna jednadžba bila je zamjenjena drugom i mreža se izjednačila.

U svome članku *Izbor polusnih uvjeta* (1) Dr. Čubranić pokušao je teoretski obrazložiti ovaj slučaj. On završava svoj članak ovim riječima: »*Kako teoretska razlaganja i očekivanja, tako su isto i praktički rezultati pokazali, da u jednoj naročito komplikovanijoj triangulacionoj mreži, kao što su redovito bazisne mreže, valja i te kako voditi računa o izboru polusnih uvjeta.*« Zaključak porazan za teoriju najmanjih kvadrata. Iz ovoga slijedi, da je izjednačenje komplikovanije triangulacione mreže nešto neodređeno. Pokušat ću dokazati da to nije tako. U ovu svrhu moramo se pozabaviti elementarnim pojmovima.

Koeficijente polusnih uvjetnih jednadžbi možemo dobiti na dva načina.

Prvi način sastoji se u tome, da se za koeficijente uzimaju promjene logaritama sinusa odgovarajućih kutova za jednu sekundu. Slobodni članovi, to su razlike suma logaritama brojnika i nazivnika polusnog uvjeta, izražene u sedmoj ili kakvoj drugoj decimali logaritma.

Drugi način sastoji se u tome da se sračuna momentalna sekundna promjena logaritma datog kuta A po formuli:

$$\triangle \log A = Mod \,.\, 10^7 \,.\, Sin\ 1'' \ cotg\ A$$

Da bismo izrazili slobodni član u lučnim sekundama, podjelimo ga sa faktorom

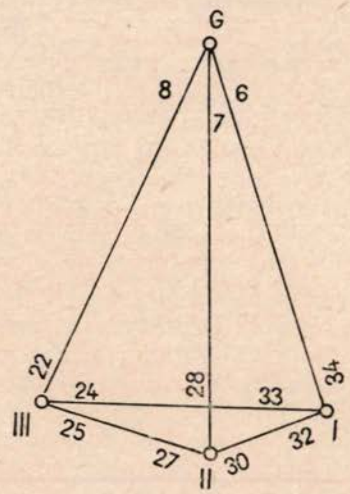
$$Mod \,.\, 10^7 \,.\, \sin 1'' = 21{,}05519$$

Dakle, pri drugom načinu koeficijenti, to su kotangensi odgovarajućih kutova.

Izjednačujući neku bazisnu mrežu logaritmima sa sedam decimala po prvom načinu, dobit ćemo koeficijente izražene u sedmoj decimali logaritma samo sa jednom decimalom. Međutim, kotangense možemo uzeti i sa većim brojem decimala. Ovdje je neophodno potrebno uzeti u obzir jednu činjenicu. Ako želimo dobiti slobodne članove polusnih uvjetnih jednadžbi logaritmima sa sedam decimala, ovim ćemo smanjiti točnost dobivenu od uvođenja kotangensa. Radi toga neophodno je potrebno slobodne članove uvjetnih jednadžbi računati pomoću logaritama sa osam, a još bolje sa deset decimala.

Razjasnit ćemo ovu misao na jednom primjeru.

Uzet ćemo jedan četverokut s diagonalama iz bazisne mreže grada Zagreba I II III G



Mjereni pravci ovog četverokuta su slijedeći:

G

6	0° 00' 00",00
7	17° 57' 48",76
8	29° 34' 03",81

III

22	0° 00' 00",00
24	64° 31' 44",72
25	71° 02' 35",10

II

27	0° 00' 00",00
28	97° 21' 11",18
30	169° 00' 02",51

I

32	0° 00' 00",00
33	4° 29' 14",58
34	90° 23' 27",88

Sferne ekscese

$\triangle$ G II III ε = 0",016; $\triangle$ I II III ε = 0",001 $\triangle$ G I II ε = 0",022

I—II i II—III to su nezavisno izmjereni bazisi.

I—II = 1698,88340 met ± 1,94 ^{mm}

I—III = 1171,62258 „ ± 0,23

Izjednačimo ovaj četverokut dva puta, ne uzimajući u obzir bazisni uvjet. Prvo ćemo uzeti za pol najpovoljniju točku II

$$\frac{\text{I II . II III . II G}}{\text{II III . II G . I II}} = \frac{\sin(25 - 24)\sin(8 - 7)\sin(34 - 32)}{\sin(33 - 32)\sin(25 - 22)\sin(7 - 6)} \quad 1$$

Zatim najlošiju točku G

$$\frac{G\,I\,.\,G\,II\,.\,G\,III}{G\,II\;G\,III\;G\,I} = \frac{\sin(30-28)\sin(25-22)\sin(34-33)}{\sin(34-32)\sin(28-27)\sin(24-22)}\;1$$

Za figurne uvjetne jednadžbe uzet ćemo trokute za koje su izračunati sferni ekscesi.

I u prvom i u drugom slučaju koeficijente i slobodne članove dobit ćemo iz logaritamskih tablica sa sedam decimala, izrazivši ih u jedinicama sedme decimale.

Polus u točci II

— (7) + (8) — (22) + (25) — (27) + (28) + 1",314 = 0
— (6) + (7) — (28) + (30) — (32) + (34) + 7,948 = 0
— (24) + (25) — (27) + (30) — (32) + (33) + 7,470 = 0
64,9 (6) — 167,5 (7) + 102,6 (8) + 7,2 (22) — 184,3 (24) + 177,1 (25) + 268,3 (32) — 268,2 (33) — 0,1 (34) — 423,3 = 0

Polus u točci G

Figurne uvjetne jednadžbe iste
+ 2,8 (22) — 10,0 (24) + 7,2 (25) — 2,7 (27) — 4,3 (28) + 7,0 (30) — 0,1 (32) — 1,5 (33) + 1,6 (34) + 38,8 = 0

Riješivši ove uvjetne jednadžbe, dobit ćemo slijedeće popravke:

Pravci	Polus II	Polus G	II—G
6	+ 1",205	+ 1",205	0",000
7	— 0,793	— 0,790	— 0,003
8	— 0,412	— 0,415	+ 0,003
22	+ 0,332	+ 0,329	+ 0,003
24	+ 0,871	+ 0,881	— 0,010
25	— 1,203	— 1,210	+ 0,007
27	+ 1,074	+ 1,072	+ 0,002
28	+ 0,915	+ 0,922	— 0,007
30	— 1,989	— 1,994	+ 0,005
32	+ 1,793	+ 1,784	+ 0,009
33	— 0,540	— 0,530	— 0,010
34	— 1,253	— 1,254	+ 0,001

Razlike II—G nisu tako velike, ali ako nakon izjednačenja izračunamo bazis I—II, počevši sa bazisa II—III dvjema putevima:

$$(I-II) = (II-III)\,\frac{\sin(25-22)\,\sin(7-6)}{\sin(8-7)\,\sin(34-32)}$$

$$(I-II) = (II-III)\,\frac{\sin(25-24)}{\sin(33-32)}$$

onda u prvom slučaju (najpovoljniji polus) dobit ćemo potpunu suglasnost.

$$\log\ (\mathrm{I—II}) = 3{,}2301744.3$$
$$\text{,,}\quad = \ldots\ldots 44.2$$

Izračunavanje izvršeno je logaritmima sa sedam decimala, zadržavajući osmu decimalu.

U drugom slučaju, prvi put daje isti logaritam 3,2301744,2; ali drugi koji prolazi po oštrim uktovima — 3,2301736,3 — razlika 7,9 jedinica sedme decimale. Kod relativno male duljine bazisa, ovo će dati promjenu 3^{mm}. Veličina naravno neznatna, ali u datom slučaju nas interesira principijelno pitanje. Na kakav ćemo način likvidirati i ovu neznatnu razliku?

Primjenivši u datom slučaju drugu metodu, u kojoj koeficijenti polusnih uvjetnih jednadžbi su kotangensi odgovarajućih kuteva, a slobodni članovi izračunati logaritmom sa deset decimala, dobit ćemo ove polusne uvjetne jednadžbe:

Polus u točci II

$$+ 3{,}08436\ (6) - 7{,}95418\ (7) + 4{,}86982\ (8) + 0{,}34316\ (22) + 8{,}41471\ (25) + 12{,}74891\ (32) - 12{,}74208\ (33) - 0{,}00683\ (24) - 20{,}15778 = 0$$

$$\text{Slobodni član} = -\frac{424{,}426}{21{,}05519} = -20{,}15778$$

Polus u točci G

$$+ 0{,}13286\ (22) - 0{,}47635\ (24) + 0{,}34349\ (25) - 0{,}12905\ (27) - 0{,}20268\ (28) + 0{,}23173\ (30) - 0{,}00683\ (32) - 0{,}07162\ (33) + 0{,}7845\ (34) + 1{,}838573 = 0$$

$$\text{Slobodni član} = +\frac{38{,}7115}{21{,}05519} = 1{,}838573$$

Pravci	Polus II	Polus G	II—G
6	+ 1,2054	+ 1,2054	0,0000
7	— 0,7930	— 0,7930	0,0000
8	— 0,4124	— 0,4123	— 0,0001
22	+ 0,3326	+ 0,3327	— 0,0001
24	+ 0,8700	+ 0,8698	+ 0,0002
25	— 1,2027	— 1,2025	— 0,0002
27	+ 1,0739	+ 1,7039	0,0000
28	+ 0,9147	+ 0,9146	+ 0,0001
30	— 1,9886	— 1.9885	— 0,0001
32	+ 1,7935	+ 1,7937	— 0,0002
33	— 0,5410	— 0,5412	+ 0,0002
34	— 1,2525	— 1,2525	0,0000

Zadržali smo i četvrtu decimalu bez zaokruženja.

Dobili smo potpunu suglasnost do treće decimale, a da se četvrta decimala razlikuje maksimum za dvije jedinice

prvi put log (I—II) = 3,2301744,3
drugi put log (I—II) = 3,2301745,3

Razlika 0,8 za logaritam sa sedam decimala je normalna. Ali i ovu razliku, koja se pojavljuje po drugom putu, a nastala je od oštrih kuteva, možemo umanjiti, ako radi interpolacije izračunamo sekundne promjene po formuli:

$$\triangle \log A = \mathrm{Mod}\ 10^7 \cdot \sin 1'' \cot g A$$

Zaista, drugi će put tada dati logaritam

3,2301744,5

Dakle druga metoda omogućava izjednačenje i dobivanje točnih rezultata i za slučaj nepovoljnih polusnih uvjetnih jednadžbi.

Primjenimo ovu metodu na onu kombinaciju polusnih uvjetnih jednadžbi, kod izjednačenja bazisne mreže grada Zagreba, koja je zatajila i koju je dr. Čubranić u gore spomenutom članku (1) označio sa II.

Polusne uvjetne jednadžbe izgledat će ovakve: (figurne su date u članku I 2)

XIII

(II) G Z K

+ 0,33434 (4) — 3,01426 (5) + 2,67992 (7) + 1,69253 (10)
— 2,29493 (13) + 0,60240 (15) + 1,24895 (18) — 1,63824 (20)
+ 0,38921 (21) — 3,82481 = 0

XIV

(III) G Z K

+ 0,12071 (4) — 1,73500 (5) + 1,61429 (8) + 1,38966 (10)
— 2,12228 (14) + 0,73262 (15) + 0,89689 (17) — 1,06260 (20)
+ 0,16571 (21) — 2,99427 = 0

XV

(K) B G Z

+ 0,66880 (1) — 1,71564 (2) + 1,04684 (3) + 0,74920 (4) — 1,88579 (5)
+ 1,13659 (9) + 1,72379 (10) — 1,73232 (12) + 0,00853 (15)
+ 6,04112 = 0

XVI

(II) III Z K

+ 1,69253 (10) — 12,76037 (13) + 11,06784 (14) + 4,76124 (17)
— 5,15053 (18) + 0,38929 (21) + 1,88611 (23) — 3,27580 (25)
+ 1,38959 (26) + 6,33122 = 0

XVII

(II) III G I

$+ 3{,}08436\ (6) — 7{,}95418\ (7) + 4{,}86982\ (8) + 0{,}34316\ (22)$
$— 8{,}75787\ (24) + 8{,}41471\ (25) + 12{,}74891\ (32) — 12{,}74208\ (33)$
$— 0{,}00683\ (3) — 20{,}15778 = 0$

XVIII

(II) III I K

$+ 4{,}76124\ (17) — 6{,}44661\ (18) + 1{,}68537\ (19) + 8{,}75787\ (24)$
$— 10{,}14756\ (25) + 1{,}28969\ (26) — 12{,}72955\ (32) + 12{,}74208\ (33)$
$— 0{,}01253\ (36) + 22{,}65418 = 0$

XIX

Bazisni uvjet

$+ 4{,}71624\ (17) — 6{,}44661\ (18) + 1{,}68537\ (19) — 1{,}38969\ (25)$
$+ 1{,}38969\ (26) + 0{,}01253\ (32) — 0{,}01253\ (36) + 16{,}22878 = 0$

XX

(I) G Z K

$+ 0{,}73862\ (4) — 146{,}89848\ (5) + 146{,}15986\ (6) + 2{,}40972\ (10)$
$— 2{,}83474\ (11) + 0{,}42502\ (15) + 78{,}53139\ (19) — 79{,}80915\ (20)$
$+ 1{,}27776\ (21) — 88{,}17516 = 0$

Prva zaokružena točka svakog četverokuta je ujedno i točka pola.

Naravno, da se ove uvjetne jednadžbe nakon izjednačenja ne će u potpunosti zadovoljiti, pošto su nam potrebne popravke samo sa tri decimale.

Niže je naveden spisak korelata i dobivenih popravka pravaca, pri čemu su radi upoređenja navedeni i popravci pravaca dobivenih kombinacijom polusnih uvjetnih jednadžbi koje je dr. Čubranić označio sa I.

Korelati

K_1	= — 0,999054	K_{11}	= — 52,902829
K_2	= — 0,427395	K_{12}	= — 1,172942
K_3	= — 2,442448	K_{13}	= — 155,229186
K_4	= — 0,157877	K_{14}	= + 170,566303
K_5	= + 0,440146	K_{15}	= — 1,863239
K_6	= — 0,256928	K_{16}	= + 27,927597
K_7	= + 0,083572	K_{17}	= — 52,558452
K_8	= + 1,256048	K_{18}	= — 52,514666
K_9	= + 19,155431	K_{19}	= — 0,127340
K_{10}	= + 34,039141	K_{20}	= + 1,103899

Popravci

Broj prav.	I riješ.	II riješ.	Broj prav.	I riješ.	II riješ.
1	— 1,342	— 1,330	19	— 1,853	— 1,873
2	+ 2,032	+ 2,024	20	— 1,503	— 1,489
3	— 0,690	— 0,694	21	+ 0,267	+ 0,265
4	+ 1,600	+ 1,590	22	+ 0,455	+ 0,471
5	— 0,230	— 0,232	23	— 0,239	— 0,228
6	+ 0,521	+ 0,535	24	+ 0,528	+ 0,518
7	— 1,383	— 1,387	25	— 2,107	— 2,103
8	+ 0,033	+ 0,028	26	— 0,312	— 0,306
9	— 2,040	— 2,034	27	+ 0,962	+ 0,951
10	+ 0,607	+ 0,604	28	+ 0,794	+ 0,796
11	— 0,499	— 0,510	29	— 0,045	— 0,043
12	+ 0,752	+ 0,752	30	— 1,561	— 1,590
13	+ 0,120	+ 0,131	31	— 1,158	— 1,173
14	+ 0,004	+ 0,010	32	+ 1,871	+ 1,865
15	— 0,794	— 0,789	33	— 0,442	— 0,441
16	— 0,381	— 0,371	34	— 1,818	— 1,774
17	+ 0,543	+ 0,544	35	+ 0,438	+ 0,440
18	+ 2,826	+ 2,820	36	+ 0,381	+ 0,376

Razlika između ove dvije kombinacije sasvim je neznatna. Ako i prvu kombinaciju izjednačimo po drugoj metodi, dobit ćemo potpuno jednoznačne rezultate.

Logaritam osnovne strane Zagreb - Brezovica, izračunat na razne načine iz drugih popravaka iznosi:

1. Iz bazisa I—II preko trokuta I II G, I G Z, Z G B = 4,0466319,5
2. „ „ „ „ „ I II K, I K Z, Z K B = 4,0466319,5
3. „ „ „ „ „ I II Z, I K Z, Z K B = 4,0466316,5
4. „ „ „ „ „ II III G, II G Z, Z G B = 4,0466320,0

Ovo su rezultati dobiveni logaritmima sa sedam decimala, zadržavajući i osmu decimalu.

Ako izračunamo istu stranu sa većim brojem decimala dobit ćemo:

	4,04663185
	195
	166
	189
sredina	4,04663184

Dakle, po drugoj metodi, izbor polusnih uvjetnih jednadžbi ne igra nikakvu ulogu. Pri svakoj kombinaciji dobit ćemo jedne te iste rezultate.

LITERATURA

(1) Dr. ing. N. Čubranić: Izbor polusnih uvjeta, Geodetski list broj 7 i 8 Zagreb, 1948. g.

(2) Prof. Nikolaj Abakumov i dr. ing. N. Čubranić: Bazisna mreža grada Zagreba, Geodetski list broj 5 i 6 Zagreb, 1948 god.