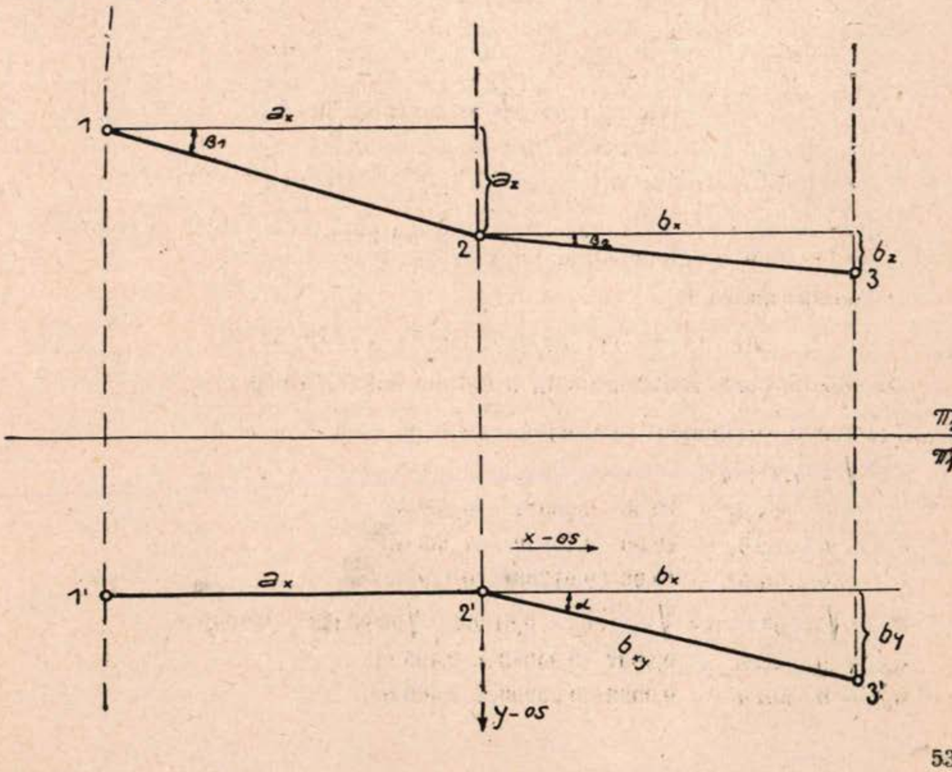
Ing. Ivan Tomkiewicz — Ljubljana

Naloga iz uporabne geodezije v HC Moste, Slovenija

Tehnična operativa često postavlja pred geometra in geod. inženirja najrazličnejše, na prvi pogled ne preveč enostavne naloge. Naj navedem tak primer iz HC moste, Slovenija.

Pri tej znani hidrocentrali so se vršila zaključna dela. V derivaciji za četrti agregat, ki vodi iz umetnega jezera na Završnici do strojnice ob Savi, je bilo potrebno montirati tlačni cevovod od vodostana do turbin. Ta jekleni cevovod se lomi in je nastalo vprašanje, kolik je prostorni kot tega loma, da bi se lahko naročilo v tovarni ustrezno koleno. Z geodetskim instrumentom se direktno ne da izmeriti. Izmeriti se dajo le horizontalni kot α, ki ga oklepata oba kraka cevovoda in vertikalna kota β_1 in β_2 ki ga oklepata oba kraka z horizontalo (skica 1).



Naloga se da rešiti na ta način, da stvar opazujemo v Evklidovem tridimenzionalnem prostoru E_3. Oba kraka cevovoda si zamislimo kot vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ v desnem Descartovem triedru.

Za kosinus kota Θ, ki ga oklepata oba vektorja med seboj sledi iz vektorske analize sledeča znana enačba:

$$\cos\Theta = \cos(\vec{a}\,\vec{b}) = \cos(x\,\vec{a})\cdot\cos(x\,\vec{b}) + \cos(y\,\vec{a})\cdot\cos(y\,\vec{b}) +$$
$$+ \cos(z\,\vec{a})\cdot\cos(z\,\vec{b}) \qquad \ldots.\ 1$$

Da bo vsakomur jasno, hočem en. 1 nakratko izvesti. Oba vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ bom izrazil s pomočjo nujnih koordinat ter osnovnih enotnih vektorjev Descartovega triedra.

$$\vec{a} = a_x i + a_y j + a_z k$$
$$\vec{b} = b_x x + b_y j + b_z k \qquad \ldots.\ 2$$

Če postavimo koordinatno izhodišče v točko 2 (skica 1) potem bosta absolutna iznosa obeh vektorjev izražena z enačbama:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \text{ in } b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} \qquad \ldots.\ 3$$

Ker je prostor metričen, se da nastaviti skalarni produkt kot sledi

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot\cos\Theta = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z \qquad \ldots.\ 4$$

iz te enačbe dobimo za cos Θ

$$\cos\Theta = \frac{a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z}{a\cdot b} = \cos(x\,a)\cdot\cos(x\,b) +$$
$$+ \cos(y\,\vec{a})\cdot\cos(y\,\vec{b}) + \cos(z\,\vec{a})\cdot\cos(z\,\vec{b}) \qquad \ldots.\ 5$$

$$\text{kjer je } \cos(x\,\vec{a}) = \frac{a_x}{a} \text{ itd. } \cos(x\,\vec{b}) = \frac{b_x}{b} \text{ itd.}$$

Naj izvedem izračun iskanega prostorskega kota po enačbi 1 za naš primer v HC Moste. Radi preglednosti je izračun izveden v 4 točkah.

1. Podatki (skica 1)

$$\beta_1 = 7^0\,48'\,56'',\ \beta_2 = 0^0\,44'\,17'',\ \alpha = 19^0\,52'\,33''$$

Za dolžino obeh vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ volimo dolžino 10 m.

2. Izračun komponent vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ po oseh x, y in z.

$a = \sqrt{= a_z^2 + a_x^2}$

$a_x = a\cdot\cos\beta_1 = 10{,}00\cdot 0{,}99071 = 9{,}907$ m

$a_z = a\cdot\sin\beta_1 = 10{,}00\cdot 0{,}13599 = 1{,}360$ m

$b_z = b\cdot\sin\beta^2 = 10{,}00\cdot 0{,}01288 = 0{,}129$ m

$b_{xy} = \sqrt{= b^2 - b_z^2}\ \sqrt{= 100 - 0{,}01664} = \sqrt{99{,}98336} = 9{,}9992$ m

$b_x = b\cdot\cos\alpha = 9{,}9992\cdot 0{,}94043 = 9{,}405$ m

$b_y = b\cdot\sin\alpha = 9{,}9992\cdot 0{,}33998 = 3{,}400$ m

3. Izračun smernih kozinusov:

$$\text{vektor } \vec{a} : \cos(x\vec{a}) = \frac{a_x}{a} = \frac{9{,}907}{10{,}00} = 0{,}99071$$

$$\cos(y\vec{a}) = \frac{a_y}{a} = \frac{0{,}00}{10{,}00} = 0{,}00$$

$$\cos(z\vec{a}) = \frac{a_z}{a} = \frac{1{,}360}{10{,}00} = 0{,}13599$$

$$\text{vektor } b : \cos(x\vec{b}) = \frac{b_x}{b} = \frac{9{,}405}{10{,}00} = 0{,}94043$$

$$\cos(y\vec{b}) = \frac{b_y}{b} = \frac{3{,}400}{10{,}00} = 0{,}33998$$

$$\cos(z\vec{b}) = \frac{b_z}{b} = \frac{0{,}129}{10{,}00} = 0{,}01288$$

4. Izračun prostornega kota Θ med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Z ozirom na izhodišče koordinatnega sistema imajo komponente vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sledeče predznake:

$$a_x = -9{,}907 \qquad b_x = +9{,}405$$
$$a_y = 0{,}000 \qquad b_y = +3{,}400$$
$$a_z = +1{,}360 \qquad b_z = -0{,}129$$

Predznaki smernih cozinusov bodo tedaj:

$$\cos(x\vec{a}) = -0{,}99071 \qquad \cos(x\vec{b}) = +0{,}94043$$
$$\cos(y\vec{a}) = 0{,}000 \qquad \cos(y\vec{b}) = -0{,}33998$$
$$\cos(z\vec{a}) = +0{,}13599 \qquad \cos(z\vec{b}) = -0{,}01288$$

Te podatke vstavimo v enačbo za cos Θ

$$\cos\Theta = \cos(x\vec{a}) \cdot \cos(x\vec{b}) + \cos(z\vec{a}) \cdot \cos(z\vec{b}) \qquad \ldots\ 6$$
$$\cos\Theta = -0{,}99071 \cdot +0{,}94043 + 0{,}13599 \cdot -0{,}01288$$
$$\cos\Theta = -0{,}93344$$
$$\Theta = 158^0\ 59'$$

Ta postopek je pregleden a dolg. Nastaviti hočemo enačbo, ki nas hitreje dovede do cilja. Poskusimo izraziti kozinuse malo drugače:

$$\cos(x\vec{a}) = \frac{a_z}{a} = \cos\beta_1,\ \cos(z\vec{a}) = \frac{a_x}{a} = \sin\beta_1$$

$$\cos(x\vec{b}) = \frac{b_x}{b} = \cos\beta_2 \cdot \cos a,\ \cos(z\vec{b}) = \frac{b_z}{b} = \sin\beta_2$$

$b_{xy} = b \cdot \cos\beta_2,\ b_x = b_{xy} \cdot \cos a = b \cdot \cos\beta_2 \cdot \cos a,\ b_z = b \cdot \sin\beta_2$

Gornje izraze vnesimo v en 6 ter dobivamo

$$\cos\Theta = \cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2 \cdot \cos a + \sin\beta_1 \cdot \sin\beta_2 \qquad \ldots.\ 7$$

S to enačbo lahko hitro pridemo do rezultata.

Problem je s tem rešen. Ostane pa odprto vprašanje kontrole. V geodetski dejavnosti na splošno računamo vse s kontrolami. Tu pa je vprašanje kontrole še posebno pereče. Tako kovinsko koleno je zelo drago in škoda, ki bi nastala radi nepravilnih podatkov bi bila velika. Vsled tega želimo izračunati kot na nek drug od prvega čim bolj nezavisen način. Tu si pomagamo s prostorsko analitičko geometrijo. Bivstvo je v tem, da ležita vektorja a in b v eni ravnini te tvorita kateti nekega trikotnika. Tako je mogoče prostorski problem spremeniti v ravninskega. Naj pokažem izvedbo celotnega računa, ki ga podam v treh točkah.

1. Točke 1, 2 in 3 imajo vsaka svoje prostorske koordinate: (skica 1)

Točka 1 ... $x_1 = -9{,}9071$ točka 2 ... $x_2 = 0{,}000$

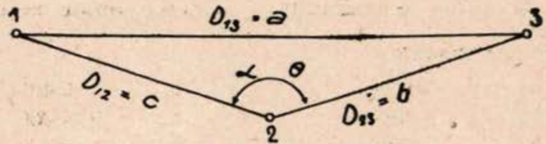
$y_1 = 0{,}000$ $y_2 = 0{,}000$

$z_1 = +1{,}3599$ $z_2 = 0{,}000$

Točka 3 ... $x_3 = +9{,}4043$

$z_3 = -0{,}1288$

$y_3 = +3{,}3998$



skica 2

2. Izračun medsebojnih razdalj:

$$D_{12} = \sqrt{x_1^2 + z_1^2} = 10{,}00 \text{ m}$$

$$D_{23} = \sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2} = 10{,}00 \text{ m}$$

$$D_{13} = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + y_3^2 + (z_1 - z_3)^2} = 19{,}66482 \text{ m}$$

3. Izračun kotov.

Opravka imamo s trikotnikom z danimi stranicami (skica 2).

Kot α izračunamo po znani enačbi:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s \cdot (s - a)}{b \cdot c}} = 0{,}182311$$

$$2s = a + b + c = 39{,}66418 \text{ m}; \ \alpha = 158^0\,59'$$

ali po enačbi:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s - b) \cdot (s - c)}{b \cdot c}} = 0{,}98324, \ \alpha = 158^0\,59'$$