Ing. Ivan Tomkiewicz — Ljubljana

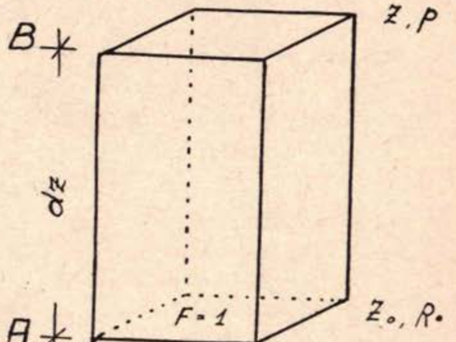
Barometrična formula

Barometrično višinomerstvo je posebno poglavje v višinomerstvu. V barometričnem višinomerstvu pa ima najvažnejše mesto barometrična formula. V praksi se uporabljajo razne poenostavljene formule, točna formula pa je dosti komplicirana in njen izvod hočem podati v tej raspravi.

Barometrična formula podaja funkcijski odnos atmosferskega pritiska z ozirom na višino ali njegovo spremembo z višino. Dobimo je po sledečem razglabanju:

Sprememba atmosferskega pritiska med dvema druga nad drugo ležečima točkama je enaka teži zračnega stebra med njima, čigar prerez je enak enoti. Vendar to velja le v razmerah, da je gostota zraka konstantna. Ta pa se z višino tudi spreminja in to ne linearno, ampak po neki krivulji. Zato velja gornja predpostavka le za take višinske razlike, da je srednja gostota zadovoljiv predstavnik gostote celotnega stebra. S tem zaidemo v infinitezimalno področje. Za večje višinske razlike pa se je treba poslužiti sumiranja. Točki A in B sta druga nad drugo za diferencijal višine dz, ki je tako velik, da je gostota s obeh točkah praktično ista, to je, da je konstantna s ozirom na višino.

Sprememba atmosferskega pritiska je torej enaka teži zračnega stebra prereza $F = 1$:



$$-dp = \gamma \cdot dz \qquad 1$$

Za γ imamo izraz:

$$\gamma = \varrho \cdot g \qquad 2$$

kar vnesemo v enačbo 1 in dobimo

$$-dp = \varrho \cdot g \cdot dz \qquad 3$$

Gornja enačba v tej obliki ni primerna za integracijo, ker sta ϱ in g funkciji raznih spremenljivih količin. Te odnose je treba dognati.

Oglejmo si najprej jakost zemeljskega gravitacijskega polja. Ta zavisi od odaljenosti enote mase od centra zemlje. Vendar pa jakost zemelskega gravitacijskega polja tudi v enakih razdaljah od zemeljskega centra kot je to slučaj na zemeljski površini v nivoju morja, na vseh mestih ni enaka. Zmanjšuje je komponenta centrifugalne sile, katere velikost je odvisna od geografske širine. Zato je tudi jakost zemeljskega gravitacijskega polja funkcija geografske širine. S pomočjo številnih opazovanj je profesor Helmert določil konstante enačbe, ki podaja zavisnost jakosti zemeljskega gravitacijskega polja na zemeljski površini od geografske širine. V literaturi je najti to enačbo v tej obliki:

$$g_{\varphi,0} = g_{45,0} \cdot (1 - 0.002644 \cdot \cos 2\varphi) \qquad 4$$

kjer je $g_{45,0}$ vrednost jakosti zem. gravitacijskega polja za geografsko širino tudi s nivoju morja.

Vrednost jakosti zem. gravitacijskega polja pa se spreminja tudi z absolutno višino, ker se s tem spreminja oddaljenost od zemeljskega centra. Da ta vpliv zajamemo, moramo poseči po Newtonovi gravitacijski formuli, po kateri sledi, da je jakost zem. gravitacijskega polja obratno proporcionalna kvadratu oddaljenosti enote mase od centra zemlje. Potemtakem lahko napišemo sledeče sorazmerje:

$$g_0 \cdot R^2 = g_z \cdot (R + z)^2 . \qquad 5$$

kjer je $R = 6{,}370.000$ približna srednja vrednost radija zemlje, »z« absolutna višina, g_0 in g_z pa vrednosti jakosti zem. gravitacijskega polja ob morski gladini oz. pri abs. višini z.

Gornjo enačbo preoblikujemo kot sledi

$$g_z = g_0 \cdot \frac{R^2}{(R + z)^2} = \sim g_0 \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot z}{R}\right) \qquad 6$$

Če uvedemo v enačbo 6 vrednost za R, potem dobimo

$$g_z = g_0 \cdot (1 - \frac{2 \cdot z}{6{,}370.000}) = g_0 \cdot (1 - 0{,}000\,000\,3147 \cdot z) \qquad 7$$

Ta enačba podaja zavisnost zem. gravitacijskega polja od abs. višine za isto geografsko širino. S kombinacijo enačb 4 in 7 pa dobimo končno izraz, ki podaja zavisnost zem. gravitacijskega polja od geografske širine in od absolutne višine, kar predstavlja enačba 8:

$$g_{\varphi,0} = g_{45,0} \cdot (1 - 0{,}002.644 \cdot \cos 2\,\varphi) \cdot (1 - 0{,}000\,000\,3147 \cdot z) \qquad 8$$

Iz enačbe 3 nam je odelati še gostoto zraka, ki je funkcija temperature, pritiska in vlage zraka. Izhajamo iz plinske enačbe, do katere se pride s kombinacijo Boylovega in Charlesovega zakona.

Boylov zakon se glasi:

$$p_1 \cdot v_1 = p_2 \cdot v \qquad 9$$

T = konst

v = specifični volumen

enačbo 9 prevedemo na obliko

$$v = \frac{p_1 \cdot v_1}{p_2} \qquad 10$$

Charlesov zakon pa še glasi:

$$\frac{v}{v_2} = \frac{T_1}{T_2} \qquad 11$$

p = konst

T = absolutna temperatura

ali

$$v = \frac{v_2 \cdot T_1}{T_2} \qquad 12$$

Če izenačimo enačbi 10 in 12, dobimo

$$\frac{p_1 \cdot v_1}{p_2 \cdot v_2} = \frac{T_1}{T_2} \qquad 13$$

Očividno je, da lahko pišemo tako:

$$p \cdot v = C \cdot T \tag{14}$$

Zanima nas konstanta C; do nje pridemo, če se poslužimo že zgoraj citiranega *Boylovega* zakona (en. 9) in *Gay-Lussacovega* zakona ki se glasi:

$$v_t = v_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t) \tag{15}$$

kjer je $\alpha = 1/273$ plinski razteznostni koeficijent. S pomočjo enačb 9 in 15 se dobi odnos

$$p \cdot v = p_0 \cdot v_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t) \tag{16}$$

Preiti hočemo na absolutno temperaturo s pomočjo enačb

$$T = 273 + t \quad \text{ali} \quad t = T - 273 \tag{17}$$

kjer je T v stopinjah *Kalvina*, t pa v stopinjah Celzijusa.

Z upoštevanjem enačbe 17 pišemo lahko enačbo 16 tako

$$p \cdot v = p_0 \cdot v_0 \cdot \frac{T}{273} \tag{18}$$

Po primerjavi enačb 14 in 18 dobimo izraz za konstanto C

$$C = \frac{p_0 \cdot v_0}{273} \tag{19}$$

v_0 je specifični volumen za standardne vrednosti pritiska in temperature ($p_0 = 1013{,}31$ mb in $T_0 = 273^0$ K).

Konstanta C je plinska konstanta in se v sodobni literaturi označuje z R. Ugotovljeno je da je R v sledečem odnosu z univerzalno plinsko konstanto R^*.

$$R = \frac{R^*}{m} \tag{20}$$

kjer je

R^* = univerzalna plinska konstanta in
m = mulekularna teža plina

Z upoštevanjem gornjih označb in izraza 20 napišemo znano plinsko enačbo

$$p \cdot v = R \cdot T = \frac{R^*}{m} \cdot T \tag{21}$$

Iz definicije za specifični volumen sledi odnos:

$$v = \frac{1}{\varrho} \tag{22}$$

kar uvedemo v plinsko enačbo, ter dobimo njene druge oblike

$$p = R \cdot T \cdot \varrho \tag{23}$$

ali

$$\varrho = \frac{p}{R \cdot T} \tag{24}$$

Enačba 24 podaja odvisnost gostote plina od temperature in pritiska, vendar jo je treba še malo modificirati. Ugotovili bomo, kolika je gostota pri standardnih vrednostih za temperaturo in pritisk, to je: $T_0 = 273^0\,K$ in $p_0 =$ $= 1013{,}3$ mb

$$\varrho_0 = \frac{p_0}{R \cdot T_0} \qquad 25$$

Nastavimo razmerje

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{\frac{P}{R \cdot T}}{\frac{P_0}{R \cdot T_0}} = \frac{P}{T} \cdot \frac{273}{1013{,}3}$$

ter končno dobimo zaželjeno obliko

$$\varrho = \varrho_0 \cdot \frac{p}{T} \cdot \frac{273}{1013{,}3} \qquad 26$$

Enačba 26 nam podaja zavisnost gostote zraka od temperature in pritiska. Doslej smo obravnavali le suh zrak in nam je potrebno še zajeti vpliv vlage v zraku na njegovo gostoto.

Vlažni zrak je mešanica dveh sestavin: suhega zraka in vodne pare. Če označimo plinsko konstanto za vodno paro z R', njeno gostoto z ϱ', njen parcijalni pritisk v zraku z e, tedaj se glasi statična enačba za vodno paro:

$$e = R' \cdot T' \cdot \varrho' \qquad 27$$

ali

$$\varrho' = \frac{e}{R' \cdot T'} \qquad 28$$

Statično enačbo za popolnoma suh zrak pa podajata enačbi 23 oz. 24. Pri vlažnem zraku pa imamo dva dela: suhi zrak in vodno paro. V bodoče bomo označevali z p pritisk vlažnega zraka, to je mešanice in pri označbi parcijalnega pritiska vodne pare z e, je parcijalni pritisk suhega zraka v mešanici enak $p - e$ (Daltonov zakon) in njegova gostota

$$\varrho^s = \frac{p - e}{R \cdot T} \qquad 29$$

Gostota vlažnega zraka pa bo

$$\varrho^m = \frac{e}{R' \cdot T'} + \frac{p - e}{RT} \qquad 30$$

(Indeks s pomeni suh in indeks m pomeni moker)

Na podlagi enačbe 20 sledi

$$R^* = m' \cdot R' = m \cdot R; \quad R' = \frac{m}{m'} \cdot R \qquad 31$$

To vpeljemo v enačbo 30

$$\varrho^m = \varepsilon \frac{e}{RT'} = \frac{p - e}{RT} \qquad 32$$

kjer je

$$\varepsilon = \frac{m'}{m} = 0{,}622 \qquad 32$$

V mešanici je $T = T'$, zato sledi

$$\varrho^m = \varepsilon \frac{e}{RT} + \frac{p - e}{RT}$$

ali

$$\varrho^m = \frac{p}{R \cdot T} \cdot [1 - (1 - \varepsilon) \frac{e}{p}] \qquad 33$$

Ker je $p/RT = \varrho$ po enačbi 24 gostota popolnoma suhega zraka brez prisotnosti vlage, potem nam enačba 33 pove, da je gostota vlažnega zraka manjša kot gostota suhega.

V enačbo 33 vpeljemo enačbo 24

$$\varrho^m = \varrho \cdot [1 - (1 - \varepsilon) \cdot \frac{e}{p}] \qquad 34$$

Za ϱ vzamemo izraz 26, ter dobimo

$$\varrho^m = \varrho_0 \cdot \frac{p}{T} \cdot \frac{273}{1013{,}3} \cdot [1 - (1 - \varepsilon) \cdot \frac{e}{p}] \qquad 35$$

Enačba 35 nam končno podaja zavisnost gostote zraka od temperature, pritiska in vlage.

Enačbi 8 in 35 uvedemo v enačbo 3 kot sledi

$$- dp = \varrho_0 \cdot \frac{p}{T} \cdot \frac{273}{1013{,}3} \cdot [1 - (1 - \varepsilon) \cdot \frac{e}{p}] \cdot g_{45,0} \cdot (1 - 0{,}002644 \cdot \cos 2\varphi) \cdot$$
$$\cdot (1 - 0{,}0000003147 \cdot z) \cdot dz \qquad 36$$

ali z upoštevanjem enačb 17

$$- dp = \varrho_0 \cdot p \cdot \frac{g_{45,0}}{1013{,}3} \cdot (1 - \alpha \cdot t) \cdot [1 - (1 - \varepsilon) \frac{e}{p}] \cdot$$
$$\cdot (1 - 0{,}002644 \cdot \cos 2\varphi) \cdot (1 - 0{,}0000003147 \cdot z) \cdot dz \qquad 37$$

Enačba 36 oz. 37 predstavlja barometrično diferencijalno enačbo. Za točko z geografsko širino φ_1, nastopijo kot funkcije nadmorske višine z količine p, T oz. t, e, in g. Točna rešitev te enačbe bi bila zelo težka oz. nemogoča, ker ne razpolagamo z kakimi točnimi funkcijonalnimi matematičnimi odnosi količin T oz. t in e (Hannova formula je empirična in približna) v odvisnost z abs. višino. Da moremo gornjo enačbo integrirati, potem moramo uvesti srednje vrednosti za T oz. t, e in g. Na praktično točnost rezultatov to ne vpliva. V tem slučaju lahko pišemo enačbo 37 v sledeči enostavni obliki

$$- dp = C_1 \cdot p \cdot dz \qquad 38$$

kjer je

$$C_1 = \varrho_0 \cdot \frac{g_{45,0}}{1013{,}3} (1 - \alpha\, t_{sr}) \cdot [1 - (1 - \varepsilon) \cdot \frac{e_{sr}}{p_{sr}}] \cdot$$
$$\cdot (1 - 0{,}002644 \cdot \cos 2\varphi) \cdot (1 - 0{,}0000003147 \cdot z_{sr}) \qquad 39$$

Enačbo 38 razvijemo in integriramo

$$-\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = C_1 \cdot \int_{z_0}^{z} \cdot dz$$

$$ln\, p_0 - ln\, p = C_1 \cdot (z - z_0) \quad 40$$

Enačbo 40 razvijemo še naprej

$$p = p_0 \cdot e^{-C_1 \cdot Z - Z_0} \quad 41$$

(tu je e = osnova naravnih logaritmov)

To je Laplaceova enačba, ki podaja zavisnost zračnega pritiska z višino. Ta enačba pa omogoča določanje vičinske razlike med dvema druga nad drugo ležečima točkama, če poznamo vrednosti zračnega pritiska na obeh točkah in še srednje vrednosti za T oz. t, e in g. Enačbo 40 je treba za praktično uporabo v višinomerstvu predhodno še predelati.

$$\triangle z = z - z_0 = \frac{1}{C_1} \cdot (ln\, p_0 - ln\, p)$$

Če sedaj uvedemo v enačbo 42 vrednost za konstanto C_1 iz enačbe 39, nadalje uvedemo Briggsove logaritme in razvijemo binome v vrste ter zanemarimo člene višjih stopenj, dobimo obliko

$$\triangle z = z - z_0 = \frac{1013,3}{\varrho_0 \cdot g_{45\,0} \cdot M} \cdot (1 + \alpha \cdot t_{sr}) \cdot [1 + (1 - \varepsilon) \cdot \frac{e_{sr}}{p_{sr}}] \cdot$$

$$\cdot (1 + 0,002644 \cdot \cos 2\varphi) \cdot (1 + 0,000\,000\,3147 \cdot z_{sr}) \cdot (\log p_0 - \log p) \quad 43$$

kjer je M = modul naravnih logaritmov. Opomniti moram, da predstavlja »z« v členu, ki podaja spremembo jakosti zemeljskega gravitacijskega polja z višino, absolutno višino ter jo bom odslej označeval z Z_a v razliko od relativnih višin, ki so v gornjih enačbah označene z »z«.

V enačbo 43 uvedem številčne vrednosti za konstante:

M = 0,434294
p_0 = 0,001293 gr/cm
$g_{45\,0}$ = 980,63 cm/sec $\quad \varepsilon = 0,622$
ϱ_0 = 1013,33 mb

Dimenzije volim v CGS sistemu in z upoštevanjem, da bi dobili višinske razlike v metrih, dobimo končno za računanje primerno obliko točne barometrične formule

$$\triangle z = z - z_0 = 18400 \cdot (\log p_0 - \log p) \cdot (1 + \alpha\, t_{sr}) \cdot$$

$$(1 + 0,378 \frac{e_{sr}}{p_{sr}}) \cdot (1 + 0,002644 \cdot \cos 2\varphi) \cdot (1 + 0,0000003147 \cdot z_{a_{sr}}) \quad 44$$

Obdelati nam je še določanje raznih količin, ki so sestavni deli gornje enačbe.

Zračni pritisk p določimo s čitanjem na živosrebrnem barometru ali pa na aneroidu. Običajno se čita v mm živosrebrnega stebra, nakar se s pomočjo tabel pretvori v mb. Pri tako odčitanih vrednostih za pritisk je treba še upoštevati različne korekcije, nakar jih je mogoče uvesti v račun.

Temperatura zraka t se meri s termometrom v_0 C.

Geografsko širino φ in absolutno višino se določi približno s pomočjo topografske karte.

Parcijalni pritisk e vodne pare v skupnem pritisku vlažnega zraka se meri z psihrometrom. To je instrument, ki je sestavljen iz dveh enakih termometrov, katerega eden rezervoar je ovit z mokro krpico iz muselina. Voda krpice izhlapeva, zato pa jemlje toploto od živega srebra v rezervoarju, ta pa od obdajajočega zraka. Temperatura vlažnega termometra (označimo jo z T_v) bo vsled tega nižja ali kvečem enaka temperaturi suhega termometra (označimo jo z T). Diferenca $T - T_v$ pa je v matematični zvezi z parcijalnim pritiskom vodne pare v vlažnem zraku. Ta zveza podana z analitičnim izrazom se imenuje psihrometročna enačba in njeno izvedbo bom sedaj podal.

Množino vlage v zraku izražamo na razne načine. Tu moram omeniti enega in to je odnos mešanice. To je razmerje gostote vodne pare napram gostoti suhega zraka v mešanici. Označimo ga z x:

$$x = \frac{\varrho'}{\varrho^s} \qquad 45$$

Z upoštevanjem enačb 28 in 29 dobimo

$$x = \frac{\varepsilon \cdot e}{p - e} \qquad 46$$

ali približno

$$x = \frac{\varepsilon \cdot e}{p} \qquad 47$$

Tu moramo omeniti, da parcijalni pritisk vodne pare e ni konstanten. Zrak more ob prisotnosti zadostne količine vode pri dani temperaturi T lahko sprejme le neko navzgor omejeno količino vlage. Tedaj je parcijalni pritisk vodne pare o mešanici maksimalen ter ga označujemo z E. Tedaj pravimo, da je zrak z vlago zasičen, čeprav je v bivstvu le prostor zasičen z vlago oz. z vodno paro.

Za zrak zasičen z vodno paro bo odnos mešanice enak

$$x_s = \frac{\varepsilon \cdot E}{p - E} \qquad 48$$

ali približno

$$x_s = \frac{\varepsilon \cdot E}{p} \qquad 49$$

Za nastavitev psihrometrične enačbe je potreben sledeč premislek. Nezasičeni zrak, ki prihaja do vlažnega rezervoarja psihrometra, ima x gramov vodne pare na vsak gram suhega zraka pri temperaturi T. Radi izhlapevanja pa se zrak okoli vlažnega rezervoarja z vodno paro zasiti ter odhaja zasičen z x_{sv} gramov vodne pare pri temperaturi T_v. Med procesom je izhlapelo

$x_{sv} - x$ gramov vode pri temperaturi izhlapevanja (T_v) kar se z zadovoljivo točnostjo privzame). Opisani termodinamični proces zajamemo matematično tako:

$$(C_p + x \cdot C'_p) \cdot (T - T_v) = L_v \cdot (x_{sv} - x) \qquad 50$$

kjer je L latentna toplota, C_p in C'_p sta spec. toploti pri konst. pritisku za zrak in vod. paro. C'_p je ca dvakrat večji od C_p, a x je vrstnega reda 0,01, zato se produkt $x \cdot C'_p$ v primerjavi z C_p lahko zanemari in kot približanje vzamemo:

$$C_p \cdot (T - T_v) = L_v \cdot (x_{sv} - x) \qquad 51$$

Sedaj uvedemo enačbi 47 in 49 v enačbo 51

$$C_p \cdot (T - T_v) = L_v \cdot (E_v - e) \cdot \frac{\varepsilon}{p} \qquad 52$$

Enačbo 52 postavimo eksplicite po e

$$e = E_v - \frac{C_p}{\varepsilon \cdot L_v} \cdot (T - T_v) \cdot p \qquad 53$$

Gornja enačba je psihrometrična enačba, kot jo je izvedel August. Za njeno razumevanje je potrebno še malo razložiti neke njene sestavine. Temperaturno razliko $T - T_v$ odčitamo na psihrometru, pritisk p na barometru, e in C_p *sta* znani konstanti. Za L smo dejali, da je latentna toplota izhlapevanja ali kondenzacije vode oz. vodne pare. Ona ni konstanta, ampak zavisi od temperature, pri kateri se izhlapevanje oz. kondenzacija vrši. Obstoja več empiričnih enačb, od katerih eno navedem

$$L = 734 - 0{,}51 \cdot T \; cal \; gr^{-1} \qquad 54$$

Preostane maksimalni parcijalni pritisk vodne pare v vlažnem zraku E. Ugotovljeno je, da je E le funkcija temperature zraka. Enačba, ki to zavisnost podaja, se glasi

$$E = 6{,}11 \cdot 10^{8{,}573 - \frac{2340}{T}} \qquad 55$$

Izvedbo gornje enačbe ne podajam, ker bi s tem zašel predaleč. Je pa matematično točna ob nekih supozicijah. Do nje se pride z integracijo posebne oblike Clausius-Clapeyronove enačbe iz termodinamike. Radi omenjenih supozicij pa enačba 55 ne kaže povsem točno zavisnost E od temperature zraka. Magnus je empirično določil v gornji enačbi konstante, s katerimi njegova enačba povsem odgovarja in s pomočjo katere je za dano temperaturo lahko izračunati E. S tem pa doženemo tudi vrednost za parcijalni dejanski pritisk vodne pare e, ki nam je potreben pri računanju z enačbo 44. Vendar nam e za vsak primer ni treba računati po enačbi 53. To bi bilo prezamudno. Vrednost e vzamemo iz že izračunanih tabel za argumenta $T - T_v$ in T.

Enačba 44 je zelo točna in velja le v primeru, da obe točki ležita druga nad drugo. V geodetski praksi pa je to le redko in ležita obe točki običajno oddaljeni druga od druge tudi po horizontali. Vendar pa ob pogoju, da sta obe točki v istem barometričnem polju, daje enačba 44 zadovoljive rezultate. Mala raziskava pokaže nadalje, da so v enačbi 44 bivstveni le prvi trije členi na desni strani. Ostali trije vplivajo zelo malo na višinsko razliko, zato postavimo v nje neke srednje vrednosti. Za uporabo v Sloveniji vzamemo srednjo geogr. širino $\varphi = 46^0$, srednjo nadmorsko višino $Z_a = 400$ m, za $e_{sr} = 7{,}2$ mm in $p_{sr} = 720$ mm, ker se barometrično višinomerstvo vrši običajno ob poletnih mesecih. Bolj praktična barometrična formula izgleda potem takole

$$\triangle z = z - z_0 = 18\,464 \cdot (\log p_0 - \log p) \cdot (1 + 0{,}003665 \cdot t_{sr}) \qquad 56$$

Vendar pa tudi ta formula ni pripravna za hitro računanje. V to svrho se jo lahko na razne načine pretvori. Razpravljati o tem pa bi išlo preko zamišljenega okvirja tega članka.