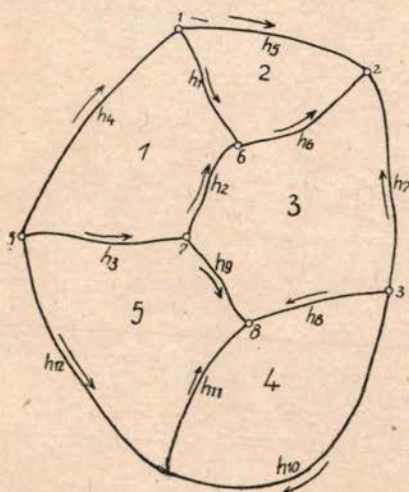


Izjednačenje nivelmanske mreže metodom postupnih približavanja

Izjednačenje uvjeta u nivelmanskoj mreži metodom postupnih približavanja prikazano je u Katastarskom pravilniku IV. dio (Nivelman). Međutim postoje i drugi načini takvog izjednačenja. Ovdje ću prikazati dva vrlo jednostavna načina, *Voglerov* i *Jameysonov*, koja se primjenjuju u inozemnoj praksi, dok kod nas, čini se, nisu poznata. Postupak izjednačenja jednim i drugim načinom objasniti ću na primjeru izjednačenja slobodne nivelmanske mreže prikazane na slici. Ova se mreža sastoji iz 5 zatvorenih poligona, sa $i = 12$ izmjerenih visinskih razlika i $r = 8$ čvornih repere. Broj t nezavisnih uvjeta prema tome će biti: $t = i - (r - 1) = 12 - (8 - 1) = 5$.



$h'_1 = 25,396$ m	$s_1 = 7$ km
$h'_2 = 6,699$	$s_2 = 6$
$h'_3 = 45,117$	$s_3 = 9$
$h'_4 = 26,476$	$s_4 = 17$
$h'_5 = 56,766$	$s_5 = 14$
$h'_6 = 31,412$	$s_6 = 11$
$h'_7 = 69,424$	$s_7 = 13$
$h'_8 = 48,929$	$s_8 = 10$
$h'_9 = 17,568$	$s_9 = 8$
$h'_{10} = 21,449$	$s_{10} = 23$
$h'_{11} = 27,518$	$s_{11} = 9$
$h'_{12} = 35,196$	$s_{12} = 14$

1. Voglerov način (Tablica br. 1.)

U 1. stupac upišemo broj poligona od 1 do 6. (šesti vanjski poligon uzimamo radi kontrole kod računanja).

U 2. stupac upišemo izmjerene visinske razlike h' u pojedinim zatvorenim poligonima (idući u smjeru satne kazaljke) i zatim izračunamo njihove sume, t. j. pogreške f zatvaranja poligona. Za kontrolu mora biti: $[f] = f$ vanjskog poligona, t. j. $0,056 + \times,958 + 0,048 + 0,038 + \times,971 = 0,071$. Lijevo u stupcu upišemo broj graničnog poligona, pri čemu sa predznakom $+$ ili $-$ označimo da li visinska razlika ulazi u granični poligon s istim ili obratnim predznakom.

U 3. stupac upišemo dužine S u km pojedinih vlakova (općenito recipročne vrijednosti težina p) i zatim izračunamo njihove sume $[s]$, t. j. dužine pojedinih poligona (općenito $[1/p]$).

Br. polig	h' m		S km	Približavanja						v mm	h m	v ¹	v ² S	⊙
				1	2	3	4	5	6					
1	2		3	4						5	6	7	8	9
1				80	0	2	0,4	0,64	0					80,6
-2	h ₄	25,396	7	56	0	8	4	5	0	56				
-3	h ₂	x3,301	6	x0		x6		x		x85	25,381	225	32,1	
-5	h ₃	x54,883	9	x87			1	x		x8	x3,299	4	0,7	
+6	h ₆	26,476	17	x76				x8	0	x87	x54,870	169	18,8	
	f ₁	= 0,056	39	0	8	4	5	0	0	x74	26,450	676	39,8	
				55	32	9	0	0	0,03					9,0
-1	h ₄	x74,604	7	x58	x68	x83	0	0	1	x58				
+6	h ₅	56,766	14	10		4		1		15	x74,619			
-3	h ₆	x68,588	11		15	6			x	6	56,772	36	2,6	
	f ₂	= x,958	32	x68	x83	0	0	1	0	21	x68,600	441	40,1	
				48	91	0	0,2	0,08	0					91,0
-1	h ₂	6,699	6	48	66	0	x7	x8	0	48				
-2	h ₆	31,412	11	9	x2			1		2	6,701			
+6	h ₇	x30,576	13		x85	x4			0	x79	31,391	324	24,9	
-4	h ₈	48,929	10	9	x86	3		1		x	48,928	1	0,1	
-5	h ₉	x82,432	8		x89		1			x0	x82,422	100	12,5	
	f ₃	= 0,048	48	66	0	x7	x8	0	0	0	0,000			
				34	0	5	0	0,10	0					39,1
-3	h ₈	x51,071	10	38	0	14	0	2	0	38				
+6	h ₁₀	21,449	23	x1	14	x7		x		1	x51,072			
-5	h ₁₁	27,518	9	x79		x2		x	0	x70	21,419	900	39,1	
	f ₄	= 0,038	42	0	14	0	2	0	0	x1	27,509	81	9,0	
				21	2	0	0,9	0	0,02					9,9
-1	h ₃	45,117	9	x71	x2	3	6	0	x	x71				
-3	h ₉	17,568	8	13			x9	1		13	45,130			
-4	h ₁₁	x72,482	9		11		x9			10	17,578			
+6	h ₁₂	x62,804	14			3	x8	0		9	x72,491			
	f ₅	= x,971	40	x2	3	6	0	1	0	x7	x64,801	9	0,6	
				62	8	7	0,6	0,31	0,05					0,0
+1	h ₄	26,476	17	71	26	8	7	5	2	71				
+2	h ₅	56,766	14	x76				x8	0	x74	26,450			
+3	h ₇	x30,576	13			7			x	6	56,772			
+4	h ₁₀	21,449	23		x82				0	x82	x30,558			
+5	h ₁₂	x64,804	14	x79		x2		x	0	x70	21,419			
	f ₆	= 0,071	81	26	8	7	5	2	0	x7	x64,801			
											0,000			
												220,3	220,6	
														$m = \pm \sqrt{\frac{220,6}{3}}$
														$= \pm 6,7 \frac{mm}{km}$

U 4. stupcu izjednačujemo približavanjem. U našem slučaju bilo je potrebno šest približavanja. Međutim u nekim drugim slučajevima broj približavanja može biti veći ili manji.

1. približavanje (stupac 4/1)

Najprije izračunamo za svaki poligon vrijednost kv. sr. pogreške $\omega^2 = f_{mm}^2 : [s]_{km}$ (općenito $\omega^2 = f_{mm}^2 : [1/p]$). Za 1. poligon $\omega^2 = 56^2 : 39 = 80$, za 2. poligon $\omega^2 = 42^2 : 32 = 55$ i t. d. Vrijednosti za ω^2 upišemo za svaki poligon gore iznad crte. Zatim ispod svakog ω^2 upišemo odgovarajuću pogrešku zatvaranja f u mm. Negativne vrijednosti upišemo izražene u dekadskoj dopuni. Izjednačenje počnemo s poligonom, koji ima najveću pogrešku ω^2 . To je 1. poligon sa $\omega^2 = 80$. Ovaj broj zaokružimo. Odredimo popravke v' u mm za visinske razlike u tom poligonu tako, da pogrešku zatvaranja $f = 56$ mm podijelimo proporcionalno dužinama vlakova (općenito proporcionalno recipročnim vrijednostima težina). Popravke v' imaju obratni predznak od predznaka pogreške f . Negativne popravke upisujemo izražene u dekadskoj dopuni. Dakle, za h_1 je $v'_1 = \frac{-56}{39} \cdot 7 = -10 = \times 0$, za h_2 je $v'_2 = \frac{-56}{39} \cdot 6 = -9 = \times 1$ i t. d. Kontrola $f + [v'] = 0$, t. j. $56 + \times 0 + \times 1 + \times 87 + \times 76 = 0$. Izračunate popravke v' upišemo s odgovarajućim predznakom i u granične poligone. Dakle upišemo: $-v'_1 = -\times 0 = +10$ za h_1 u 2. poligon, $-v'_2 = -\times 1 = +9$ za h_2 u 3. poligon, $-v'_3 = -\times 87 = +13$ za h_3 u 5. poligon i konačno $v'_4 = \times 76$ za h_4 u 6. poligon. U 4. poligonu nijedna visinska razlika nije dobila popravak, budući da taj poligon ne graniči sa izjednačenim 1. poligonom. Zato ćemo i njega izjednačiti na isti način kao i 1. poligon. Zaokružimo njegovu pogrešku $\omega^2 = 34$ i odredimo popravke v' . Dakle, za h_8 je $v'_8 = \frac{-38}{42} \cdot 10 = \times 1$, za h_{10} je $v'_{10} = \frac{-38}{42} \cdot 23 = \times 79$ i t. d. Kontrola: $38 + \times 1 + \times 79 + \times 2 = 0$. I ove popravke upišemo s odgovarajućim predznakom u granične poligone, t. j. $-v'_8 = -\times 1 = +9$ za h_8 u 3. poligon, $v'_{10} = \times 79$ za h_{10} u 6. poligon i $-v'_{11} = -\times 2 = +8$ za h_{11} u 5. poligon. Sada odredimo nove pogreške zatvaranja f' pojedinih poligona, t. j. zbrojimo prvobitne pogreške f sa upisanim popravcima v' . Za 1. poligon već smo prije odredili da je $f'_1 = 0$, za 2. poligon $f'_2 = \times 58 + 10 = \times 68$, za 3. poligon $f'_3 = 48 + 9 + 9 = 66$ i t. d. Kontrola: $[f'] = f'$ vanjskog poligona, t. j. $0 + \times 68 + 66 + \times 2 = 26$.

U nekim slučajevima može se dogoditi, da s poligonom, koji se prvi izjednačuje, ne graniči više poligona. U tom slučaju treba opet, kako smo to učinili na početku, izabrati između ovih poligona onaj, koji ima najveću pogrešku ω^2 i izjednačiti ga. Takav postupak treba produžiti, dok konačno ne ostane nijedan poligon bez popravka.

2. približavanje (stupac 4/2)

Drugo približavanje vrši se na isti način kao i prvo približavanje. Upišemo pogreške zatvaranja f' dobivene nakon 1. približavanja i odredimo iz njih nove pogreške $\omega'^2 = 0$, za 2. poligon $\omega'^2 = \frac{32^2}{32} = 32$, za 3. poligon $\omega'^2 = \frac{66^2}{48} = 91$ i t. d. Izjednačenje počnemo s 3. poligonom, koji ima najveću pogrešku $\omega'^2 = 91$. Budući da ovaj poligon graniči sa svima ostalim poligo-

nima, to će svaki od tih poligona dobiti odgovarajući popravak v'' . Izračunamo nove pogreške zatvaranja f'' . Za 1. poligon $f_1'' = 8$, za 2. poligon $f_2'' = \times 83$ i t. d. Kontrola $[f''] = f''$ vanjskog poligona, t. j. $8 + \times 83 + 0 + 14 + + 3 = 8$.

3. približavanje (stupac 4/3)

Izjednačenje počnemo s 2. poligonom, koji ima najveću pogrešku $\omega''_2 = 9$. Nakon izjednačenja ovog poligona ostat će netaknuti poligoni 4. i 5. Budući da 4. poligon ima veću pogrešku ω''_4 , nego 5. poligon, to ćemo ga izjednačiti. Izračunamo nove pogreške zatvaranja f'' . Za kontrolu mora biti $[f''] = f''$ vanjskog poligona.

U 4. približavanju (stupac 4/4) izjednačimo 5. poligon, a u 5. približavanju (stupac 4/5) najprije izjednačimo 1. i zatim 4. poligon. Kako vidimo, nakon svakog približavanja pogreške zatvaranja f se smanjuju, dok konačno u 6. približavanju (stupac 4/6) nakon izjednačenja 6. poligona posve nestaju.

U 5. stupcu upišemo za svaki poligon prvobitnu pogrešku zatvaranja f i zatim izračunamo definitivne vrijednosti popravaka v , kao sume popravaka dobivenih iz pojedinih približavanja. Na primjer u 1. poligonu za h_1 dobivamo $v_1 = \times 0 + \times 6 + \times = \times 85$, za h_2 dobivamo $v_2 = \times 1 + 8 + \times = \times 3$ i t. d. U graničnim poligonima moramo dobiti iste apsolutne vrijednosti. Za kontrolu u svakom poligonu mora biti: $f + [v] = 0$. Na primjer, za 1. poligon: $56 + \times 85 + \times 8 + 87 + 74 = 0$ i t. d.

U 6. stupcu računamo definitivne visinske razlike $h = h' + v$. Na primjer, u 1. poligonu $h_1 = 25,396 + \times 85 = 25,381$ i t. d. U graničnim poligonima moramo dobiti iste apsolutne vrijednosti. Za kontrolu u svakom poligonu mora biti $[h] = 0$.

Računamo srednju pogrešku jedinice težine m .

U 7. stupcu izračunamo kvadrate popravaka v^2 . U 8. stupcu najprije izračunamo kvocijente $v_2 : s$ (općenito pv^2), a zatim njihovu sumu $[v^2 : s] = 220,3$. U 9. stupcu izračunamo sumu svih zaokruženih ω^2 . Za kontrolu mora biti: $[v^2 : s] = [\omega^2]$.

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v^2 : s]}{t}} = \pm \sqrt{\frac{220,3}{5}} = \pm 6,7 \text{ mm/km}$$

Treba napomenuti, da je *Voglerov* način posve strog način izjednačenja.

2. Jameysonov način (Tablica br. 2.)

1., 2. i 3. stupac isti je kao u tablici br. 1. Šesti vanjski poligon uzimamo ovdje, da bismo ubrzali izjednačenje. Iz istog razloga preporuča se da se najprije upiše poligon s najvećom pogreškom, zatim poligon s drugom po veličini pogreškom i t. d.

U 4. stupcu izjednačujemo približavanjem. U našem primjeru trebalo je uzeti tri približavanja.

1. približavanje (stupac 4/1)

Izjednačimo prvi poligon. U lijevom dijelu stupca upišemo izmjerene visinske razlike h' (radi skraćivanja upisujemo samo decimale) i zatim upišemo pogrešku zatvaranja f . U srednjem dijelu stupca izračunamo popravke $v =$

$= \frac{-f}{s} \cdot s$. Za kontrolu mora biti $[v] = -f$. U desnom dijelu stupca izračunamo popravljene visinske razlike $h = h' + v$. Za kontrolu mora biti $[h] = 0$.

Izjednačimo *drugi* poligon. Lijevo u stupcu upišemo za h_5 i h_6 izmjerene vrijednosti, dok za h_1 upišemo vrijednost dobivenu izjednačenjem prvog poligona. Odredimo novu pogrešku zatvaranja f . Izračunamo popravke v i zatim popravljene visinske razlike.

Izjednačimo *treći* poligon. Ovdje za h_7 , h_8 i h_9 upišemo izmjerene vrijednosti, a za h_2 i h_6 vrijednosti dobivene izjednačenjem 1. i 2. poligona.

Izjednačimo *četvrti* poligon. Za h_{10} i h_{11} upisujemo izmjerene vrijednosti, dok za h_8 vrijednost dobivenu izjednačenjem 3. poligona.

Izjednačimo *peti* poligon. Za h_{12} uzimamo izmjerenu vrijednost, a za h_3 , h_9 i h_{11} vrijednosti dobivene izjednačenjem 1., 3. i 4. poligona.

Na kraju izjednačujemo *šesti* vanjski poligon. Ovdje za sve visinske razlike uzimamo vrijednosti dobivene izjednačenjem prethodnih poligona.

2. približavanje (stupac 4/2)

Izjednačujemo *prvi* poligon; pritom za sve visinske razlike uzimamo vrijednosti dobivene u graničnim poligonima u *prvom* približavanju. Dakle, za h_1 iz 2. poligona, za h_2 iz 3., za h_3 iz 5. i za h_4 iz 6. poligona.

Izjednačujemo *drugi* poligon. Za h_5 i h_6 uzimamo vrijednosti dobivene u 5. i 6. poligonu u *prvom* približavanju, a za h_1 vrijednost dobivenu u 1. poligonu u *drugom* približavanju.

Izjednačujemo *treći* poligon. Za h_7 , h_8 i h_9 uzimamo vrijednosti dobivene u 6., 4. i 5. poligonu u *prvom* približavanju, dok za h_2 i h_6 dobivene u 1. i 2. poligonu u *drugom* približavanju.

Izjednačujemo *četvrti* poligon. Za h_{10} i h_{11} iz 6. i 5. poligona u *prvom* približavanju, a za h_8 iz 3. poligona u *drugom* približavanju.

Izjednačujemo *peti* poligon. Za h_{12} iz 6. poligona u *prvom* približavanju, dok za h_3 , h_9 i h_{11} iz 1., 3. i 4. poligona u *drugom* približavanju.

Izjednačujemo *šesti* poligon. Za sve visinske razlike uzimamo vrijednosti dobivene izjednačenjem prethodnih poligona u *drugom* približavanju.

3. približavanje (stupac 4/3)

U *trećem* približavanju ponavlja se isti postupak kao i u *drugom*. Nakon ovog približavanja vidimo, da u svim graničnim poligonima visinske razlike imaju istu apsolutnu vrijednost.

U 5. *stupcu* upišemo izjednačene visinske razlike h (cijele brojeve uzimamo iz 2. stupca, a decimale iz 4/3. stupca). Za kontrolu u svakom poligonu mora biti $[h] = 0$.

U 6. *stupcu* izračunamo popravke $v = h - h'$, a u 7. i 8. *stupcu* na isti način kao i u tablici br. 1. računamo srednju pogrešku jedinice težine.

Primjedba: U slučaju *zavisne* mreže postupak izjednačenja ostaje isti, samo s tom razlikom, što zadane visinske razlike, koje ulaze u pojedine zatvorene poligone, ne dobivaju popravke: Zadane visinske razlike za razliku od izmjerenih upisujemo u zgradama.

Razumljivo je, da oba ova načina možemo primijeniti i kod izjednačenja mreže trigonometrijskog i tahimetrijskog nivelmana.

Br. polig	h'		S	Približavanja									h	v	v ²	v ² /S	
	m			1			2			3							m
1	2		3	4									5	6	7	8	
1	-2	h ₁	25,396	7	396	-10	386	379	+1	380	381	0	381	25,381	15	225	32,1
	-3	h ₂	X3,301	6	301	-9	292	298	+1	299	300	0	300	X3,300	4	1	0,2
	-5	h ₃	X54,883	9	883	-13	870	871	+1	872	871	0	871	X54,871	12	144	16,0
	+6	h ₄	26,476	17	476	-24	452	447	+2	449	449	-1	448	26,448	28	784	45,6
		f ₁	= 0,056	39	056	-56	000	995	+5	000	001	-1	000	0,000			
2	-1	h ₂	X74,604	7	644	+7	621	620	-1	619	619	0	619	X74,619	7	49	3,5
	+6	h ₅	56,766	14	766	+14	780	776	-2	774	774	-1	773	56,773	20	400	36,4
	-3	h ₆	X68,588	11	588	+11	599	609	-2	607	609	-1	608	X68,608			
		f ₂	= X,958	32	968	+32	000	005	-5	000	002	-2	000	0,000			
3	-1	h ₂	6,699	6	708	-6	702	701	-1	700	700	0	700	6,700			
	-2	h ₅	31,412	11	401	-10	391	393	-2	391	392	0	392	31,392	17	289	22,3
	+6	h ₇	X30,576	13	576	-12	564	561	-3	558	558	+1	559	X30,559	1	1	0,1
	-4	h ₈	48,929	10	929	-10	919	931	-2	929	928	0	928	48,928	11	121	15,1
	-5	h ₉	X82,432	8	432	-8	424	424	-2	422	421	0	421	X82,421			
	f ₃	= 0,048	48	046	-48	000	010	-10	000	999	+1	000	0,000				
4	-3	h ₈	X51,071	10	081	-12	069	071	+1	072	072	0	072	X51,072	29	841	36,6
	+6	h ₁₀	21,449	23	449	-26	423	417	+2	419	419	+1	420	21,420	10	100	11,1
	-5	h ₁₁	27,518	9	518	-10	508	508	+1	509	508	0	508	27,508			
		f ₄	= 0,038	42	048	-48	000	996	+4	000	999	+1	000	0,000			
5	-1	h ₃	45,117	9	130	-1	129	128	+1	129	129	0	129	45,129			
	-3	h ₉	17,568	8	576	0	576	578	+1	579	579	0	579	17,579			
	-4	h ₁₁	X72,482	9	492	0	492	491	+1	492	492	0	492	X72,492			
	+6	h ₁₂	X64,804	14	804	-1	803	799	+1	800	800	0	800	X64,800	4	16	1,1
		f ₅	= X,971	40	002	-2	000	996	+4	000	000	0	000	0,000			220,1
6 (Vamjski)	+1	h ₄	26,476	17	452	-5	447	449	0	449	448	0	448	26,448			
	+2	h ₅	56,766	14	780	-4	776	774	0	774	773	0	773	56,773			
	+3	h ₇	X30,576	13	564	-3	561	558	0	558	559	0	559	X30,559			
	+4	h ₁₀	21,449	23	423	-6	417	419	0	419	420	0	420	21,420			
	+5	h ₁₂	X64,804	14	803	-4	799	800	0	800	800	0	800	X64,800			
		f ₆	= 0,071	81	022	-22	000	000	0	000	000	0	000	0,000			

$$m = \pm \sqrt{\frac{2 \cdot 220,1}{5}}$$

$$v = \pm 6,7 \frac{mm}{km}$$