Ing. Miloje Mitić, savetnik S. G. U. — Beograd

Određivanje srednje vrednosti velike i male poluose srednje elipse grešaka za našu do sada izvršenu triangulaciju III i IV reda

Ako bacimo pogled na formule koje služe za određivanje dozvoljenih linearnih otstupanja poligonskih vlakova, pada nam u oči da se, sa malim izuzetkom, sve one sastoje iz tri člana: prvi je član pretstavnik uticaja slučajnih a drugi sistematskih grešaka merenja dok je treći pretstavnik naslednje položajne greške triangulacije na koju se poligonska mreža oslanja.

U nedostatku podataka, kod nas je bilo uobičajeno da se služimo formulama u kojima su koeficijenti bili sračunati na osnovu podataka merenja u inostranstvu te prema tome podataka često puta nerealnih u odnosu na naše terene. Da bismo jednom došli do formula dozvoljenih otstupanja primjenljivih na naše terenske prilike. Savezna geodetska uprava stavila je sebi u zadatak da na osnovu naših postojećih podataka odredi prethodno pomenute koeficijente. U ovom članku zadržaćemo se samo na određivanju trećega člana formule.

Da bi ova vrednost položajne greške bila što realnije određena uzeti su u obzir podaci sa teritorije cele države a sem toga podaci raznih geodetskih ustanova.

Računanje velike poluose A, male poluose B, i direkcionog ugla velike poluose A vršeno je po sledećim formulama:

$$A = m \sqrt{\frac{[aa] + [bb] + \sqrt{([bb] - [aa])^2 + 4\,[ab]^2}}{2\,([aa]\,[bb] - [ab]^2)}}$$

$$B = m \sqrt{\frac{[aa] + [bb] - \sqrt{([bb] - [aa]^2) + 4\,[ab]^2}}{2\,([aa]\,[bb] - [ab]^2)}}$$

$$\operatorname{tg} 2\,\Theta = -\frac{2\,[ab]}{[bb] - [aa]};$$ gde su:

m srednja greška pravca, $m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n - q}}$ (vidi čl. 115 Pravilnika za triangulaciju knj. I); *[aa], [bb] i [ab]* su koeficijenti normalnih jednačina iz kojih se određuju popravke približnih koordinata tačke koje se računa.

Da bi A i B imale realne vrednosti, morao bi biti zadovoljen uslov:

$$[aa]\,[bb] > [ab]^2$$

t. j.

$$[aa] > \frac{[ab]^2}{[bb]}$$

ili

$$[bb] > \frac{[ab]}{[aa]}$$

Ukoliko je desna strana nejednačine manja utoliko postoji veća sigurnost da će gornji uslov biti zadovoljen. Desna strana nejednačine biće utoliko manja ukoliko je imenitelj veći odnosno, ako je $[aa] > [bb]$ onda će uslovi biti zadovoljeni kada je $[bb] > \frac{[ab]^2}{[aa]}$ i obratno, ako je $[bb] > [aa]$ uslov je zadovoljen kada je $[aa] > \frac{[ab]^2}{[bb]}$.

Prema prethodnom, imamo i odgovarajuće formule za dobijanje vrednosti za A, B i Θ na ime:

1) $[aa] > [bb]$. Podelimo u formulama za A, B i Θ i brojitelj i imenitelj sa $[aa]$, pa ćemo dobtii:

$$A = m \sqrt{\frac{1 + \frac{[bb]}{[aa]} + \sqrt{\left(\frac{[bb]}{[aa]} - 1\right)^2 + 4\frac{[ab]^2}{[aa]^2}}}{2\left([bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]}\right)}}$$

$$B = m \sqrt{\frac{1 + \frac{[bb]}{[aa]} - \sqrt{\left(\frac{[bb]}{[aa]} - 1\right)^2 + 4\frac{[ab]^2}{[aa]^2}}}{2\left([bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]}\right)}}$$

$$tg\ 2\ \Theta = -\frac{2\frac{[ab]}{[aa]}}{\frac{[bb]}{[aa]} - 1}$$

Ako sada imenitelj za A i B pomnožimo i podelimo sa $[aa]$ i stavimo:

$$\frac{[bb]}{[aa]} = \alpha; \qquad \frac{[ab]}{[aa]} = \beta$$

dobićemo:

$$A = \frac{m}{\sqrt{[aa]}} \sqrt{\frac{1 + \alpha + \sqrt{(\alpha - 1)^2 + 4\ \beta^2}}{2\ (\alpha - \beta^2)}}$$

$$B = \frac{m}{\sqrt{[aa]}} \sqrt{\frac{1 + \alpha - \sqrt{(\alpha - 1)^2 + 4\ \beta^2}}{2\ (\alpha - \beta^2)}}$$

$$tg\ 2\,\Theta = -\frac{2\ \beta}{(\alpha - 1)}$$

2) $[bb] > [aa]$. Na sličan način kao i prethodno, dobićemo:

$$A = \frac{m}{\sqrt{[bb]}} \sqrt{\frac{1 + \alpha + \sqrt{(\alpha - 1)^2 + 4\ \beta^2}}{2\ (\alpha - \beta^2)}}$$

$$B = \frac{m}{\sqrt{[bb]}} \sqrt{\frac{1 + \alpha - \sqrt{(\alpha - 1)^2 + 4\,\beta^2}}{2\,(\alpha - \beta^2)}}$$

$$tg\ 2\,\Theta = -\frac{2\,\beta}{(\alpha - 1)} \quad \text{gde su:} \quad \frac{[aa]}{[bb]} = \alpha\,; \qquad \frac{[ab]}{[bb]} = \beta$$

Računanje po ovim formulama ne bi bilo racionalno zbog njihovog nezgodnog oblika. Zbog toga su vrednosti korena sračunate u tablici XXVIII (Pravilnika za triangulaciju knj. III) po argumentu α i β a isto tako je Savezna geodetska uprava sračunala tablice za direktno dobijanje ugla Θ isto po argumentu α i β.

Ako uzmemo:

$$M_y^2 + M_x^2 = \frac{m^2}{[bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]}} + \frac{m^2}{[bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]}} \cdot \frac{[bb]}{[aa]} =$$

$$= \frac{m^2}{[bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]}} \left(1 + \frac{[bb]}{[aa]}\right); \text{ a isto tako}$$

$$A^2 + B^2 = m^2 \cdot \frac{[aa] + [bb]}{[aa] \cdot [bb] - [ab]^2} = \frac{m^2}{[bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]}} \cdot \left(1 + \frac{[bb]}{[aa]}\right);$$

zaključujemo da je:

$$M_y^2 + M_x^2 = A^2 + B^2$$

što služi kao kontrole računanja poluose A i B.

Ako stavimo:

$$\sqrt{\frac{1 + \alpha + \sqrt{(\alpha - 1)^2 + 4\,\beta^2}}{2\,(\alpha - \beta^2)}} = K_A\,;$$

$$\sqrt{\frac{1 + \alpha - \sqrt{(\alpha - 1)^2 + 4\,\beta^2}}{2\,(\alpha - \beta^2)}} = K_B\,;$$

onda ćemo definitvno imati:

1) $$[aa] > [bb]\,,$$

$$A = \frac{m}{\sqrt{[aa]}} \cdot K_A\,;$$

$$B = \frac{m}{\sqrt{[aa]}} \cdot K_B\,;$$

$$tg\ 2\,\Theta = -\frac{2\,\beta}{(\alpha - 1)}\,; \qquad \alpha = \frac{[aa]}{[bb]}\,; \qquad \beta = \frac{[ab]}{[aa]}\,;$$

2) $$[bb] > [aa],$$

$$A = \frac{m}{\sqrt{[bb]}} \cdot K_A;$$

$$B = \frac{m}{\sqrt{[bb]}} \cdot K_B;$$

$$tg\ 2\ \Theta = -\frac{2\ \beta}{(\alpha - 1)}; \quad \alpha = \frac{[aa]}{[bb]}; \quad \beta = \frac{[ab]}{[aa]}$$

Na osnovu ovih formula sačinjen je sledeći obrazac za računanje:

Radilište: Nevesinje

Broj tačke	$[aa]$ $[bb]$ $[ab]$ m M_y M_x	$[aa]>[bb]$ $\sqrt{[aa]}$ $\alpha=\frac{[bb]}{[aa]}$ $\beta=\frac{[ab]}{[aa]}$	$[bb]>[aa]$ $\sqrt{[bb]}$ $\alpha=\frac{[aa]}{[bb]}$ $\beta=\frac{[ab]}{[bb]}$	Θ K_A K_B	$[aa]>[bb]$ $A=\frac{m}{\sqrt{[aa]}}\cdot K_A$ $B=\frac{m}{\sqrt{[aa]}}\cdot K_B$ A^2 B^2 A^2+B^2	$[bb]>[aa]$ $A=\frac{m}{\sqrt{[bb]}}\cdot K_A$ $B=\frac{m}{\sqrt{[bb]}}\cdot K_B$ M_y^2 M_x^2 $M_y^2+M_x^2$
△ ⊙ 15 (10.36)	19852 21158 —429 3″,2 0,022 0,023		145,5 0,94 0,98	17°,5 1,03 0,98	 0,00053 0,00049 0,00102	0,023 0,022 0,00049 0,00053 0,00102
△ ⊙ 18 (10.42)	18536 8897 +5570 4″,3 0,051 0,035	136,1 0,48 0,30		114°,5 1,70 0,94	0,52 0,029 0,0027 0,0008 0,0035	 0,0026 0,0012 0,0038

Na osnovu prethodno opisanog postupka sračunate su poluose srednje elipse grešaka za oko 500 trigonometriskih tačaka III reda osnovne mreže, oko 470 tačaka III reda popunjavajuće mreže i oko 2900 tačaka mreža IV reda pa su dobijeni sledeći rezultati:

A — Tačke III reda osnovne mreže

			Osovina A u m	A^2
Za	9	tačaka . . .	0,01	0,0009
„	54	„	0,02	216
„	54	„	0,03	765
„	102	„	0,04	1632
„	69	„	0,05	1725
„	58	„	0,06	2088
„	26	„	0,07	1274
„	24	„	0,08	1536
„	18	„	0,09	1458
„	11	„	0,10	1100
„	10	„	0,11	1210
Za	9	tačaka . . .	0,12	1276
„	5	„	0,13	845
„	7	„	0,14	1372
„	7	„	0,15	225
„	5	„	0,16	1280
„	3	„	0,17	867
„	2	„	0,18	648
„	1	„	0,19	361
„	1	„	0,20	400
„	2	„	0,21	882
„	1	„	0,22	484
„	1	„	0,25	625
$[n]=504$				$[A^2]=2,2278$

$$A_{sred.} = \sqrt{\frac{[A^2]}{[n]}} = \sqrt{\frac{2,2278}{504}}$$

$A_{sred.} = 0,066$

			Osovina B u m	B^2n
Za	1	tačku . . .	0,00	0,0000
„	44	„	0,01	44
„	126	„	0,02	504
„	122	„	0,03	1098
„	95	„	0,04	1520
„	46	„	0,05	1150
„	24	„	0,06	864
„	13	„	0,07	637
„	15	„	0,08	960
„	9	„	0,09	729
„	6	„	0,10	600
„	2	„	0,11	242
„	1	„	0,12	144
$[n] = 504$				$[B^2] = 0,8492$

$$B_{sred.} = \sqrt{\frac{[B^2]}{[n]}} = \sqrt{\frac{0,8492}{504}}$$

$$B_{sred.} = 0,041$$

$$\frac{B_{sred}}{A_{sred.}} = \frac{1}{1,6}$$

B — Tačke III reda popunjavajuće mreže

Osovina	A u m	A^2n
Za 2 tačke . . .	0,00	0,0000
„ 21 „	0,01	21
„ 68 „	0,02	272
„ 86 „	0,03	774
„ 86 „	0,04	1376
„ 61 „	0,05	1525
„ 40 „	0,06	1440
„ 33 „	0,07	1617
„ 21 „	0,08	1344
„ 13 „	0,09	1053
„ 13 „	0,10	1300
„ 8 „	0,11	968
„ 6 „	0,12	864
„ 3 „	0,13	507
„ 3 „	0,14	588
„ 1 „	0,15	225
„ 2 „	0,16	352
„ 2 „	0,18	648
$[n] = 469$	$[A^2]$	$= 1,4874$

Osovina	B u m	B^2n
Za 5 tačaka . . .	0,00	0,0000
„ 81 „	0,01	81
„ 131 „	0,02	524
„ 105 „	0,03	945
„ 66 „	0,04	1056
„ 39 „	0,05	975
„ 20 „	0,06	720
„ 13 „	0,07	637
„ 5 „	0,08	320
„ 2 „	0,09	182
„ 2 „	0,10	200
$[n] = 469$	$[B^2]$	$= 0,5640$

$$B_{sred} = \sqrt{\frac{[B^2]}{[n]}} = \sqrt{\frac{0,5640}{469}}$$

$$B_{sred} = 0,035$$

$$\frac{B_{sred}}{A_{sred}} = \frac{1}{1,6}$$

$$A_{sred} = \sqrt{\frac{[A^2]}{[n]}} = \sqrt{\frac{1,4874}{469}}$$

$$A_{sred} = 0,056$$

C — Tačke mreže IV reda

Osovina	A u m	A^2n
Za 17 tačaka . . .	0,00	0,0000
„ 290 „	0,01	290
„ 735 „	0,02	2940
„ 674 „	0,03	6066
„ 433 „	0,04	6928
„ 255 „	0,05	6375
„ 167 „	0,06	6012
„ 89 „	0,07	4361
„ 89 „	0,08	5696
„ 52 „	0,09	4212
„ 35 „	0,10	3500
„ 14 „	0,11	1694
„ 13 „	0,12	1872
„ 12 „	0,13	2028
„ 5 „	0,14	980
„ 5 „	0,15	1125
„ 4 „	0,16	1024
„ 4 „	0,17	1156
„ 1 „	0,18	324
„ 1 „	0,21	441
„ 1 „	0,23	529
$[n] = 2896$	$[A^2]$	$= 5,7553$

Osovina		B u m	B^2n
Za 53	tačke . . .	0,00	0,0000
„ 838	„	0,01	838
„ 009	„	0,02	4036
„ 513	„	0,03	4617
„ 247	„	0,04	3952
„ 114	„	0,05	2850
„ 60	„	0,06	2160
„ 36	„	0,07	1764
„ 14	„	0,08	896
„ 5	„	0,09	405
„ 4	„	0,10	400
„ 2	„	0,11	242
„ 1	„	0,12	144
$[n] = 2896$		$[B^2]$ =	2,2304

$$B_{sred} = \sqrt{\frac{[B^2]}{[n]}} = \sqrt{\frac{2,2304}{2896}}$$

$$B_{sred} = 0,028$$

$$\frac{B_{sred}}{A_{sred}} = \frac{1}{1,6}$$

$$A_{sred} = \sqrt{\frac{[A^2]}{[n]}} = \sqrt{\frac{5,7553}{2896}}$$

$$A_{sred} = 0,045$$

Interesantno je podvući da u sva tri slučaja odnos male i velike poluose iznosi 1/1,6. Iz ovoga se može zaključiti da je raspored pravaca iz kojih su tačke određivane bio dosta dobar jer elipse nisu mnogo razvučene.

Kod računanja srednjih vrednosti poluosa pravilno bi bilo računati po formuli:

$$A_{sred} = \sqrt{\frac{[pA^2]}{[p]}}$$

t. j. uzeti u obzir težinu $p = 1/m^2$ gde je m srednja greška određivanja poluosa koja je zavisna od načina određivanja koordinata trigonometriskih tačaka (rasporeda pravaca, dužine prvaca itd.). Međutim, radi uprošćavanja samog računanja poluosa, pretpostavili smo da su sve tačke istog reda određene, približno sa istom tačnošću — što ustvari, sa malim izuzetkom, i jeste — te je u tom slučaju $p = 1$, pa onda dobijemo formulu po kojoj je računato, t. j.

$$A_{sred} = \sqrt{\frac{[A^2]}{[n]}}, \quad B_{sred} = \sqrt{\frac{[B^2]}{[n]}}$$

Ovde su A i B poluose grupe od n tačaka a $[A^2]$ je zbir nA^2 pojedinih grupa odnosno $[n]$ je zbir svih tačaka iz kojih su računate srednje vrednosti poluosa.

Radi kontrole sračunaćemo i prosečne vrednosti poluosa po formuli:

$$A_{pros} = \frac{[A]}{n}; \quad B_{pros} = \frac{[B]}{n}.$$

tako dobijemo:

III. r. osn. $\quad A_{pros} = \frac{28,10}{504} = 0,056; \quad B_{pros} = \frac{18,02}{504} = 0,036$

III. r. pop. $\quad A_{pros} = \frac{22,74}{469} = 0,048; \quad B_{pros} = \frac{14,06}{469} = 0,030$

IV. r. $A_{pros} = \frac{107,49}{2896} = 0,037;$ $B_{pros} = \frac{67,96}{2896} = 0,023$

Po formuli $A_{pros} = A_{sred}$ 0,8; $B_{pros} = B_{sred}$ 0,8; imamo:

III. r. osn. $A_{pros} = 0,066.0,8 = 0,053;$ $B_{pros} = 0,041.0,8 = 0,032$

III. r. pop. $A_{pros} = 0,056.0,8 = 0,045;$ $B_{pros} = 0,035.0,8 = 0,028$

IV. r. $A_{pros} = 0,045.0,8 = 0,036;$ $B_{pros} = 0,028.0,8 = 0,022$

Sračunaćemo na kraju srednju relativnu grešku M_r prosečne dužine strane S po formuli: $M_{r\,sred} = \frac{M_{l\,sred}\sqrt{2}}{S}$, gde je $M_{l\,sred} = \sqrt{A^2_{sred} + B^2_{sred}}$, te dobijamo:

III. r. osn. $S = 7$ km; $M_{l\,sred} = 0,078;$ $M_{r\,sred} = \frac{0,078\sqrt{2}}{7000} = \frac{1}{70000};$

III. r. pop. $S = 4,5$ km; $M_{l\,sred} = 0,066;$ $M_{r\,sred} = \frac{0,066\sqrt{2}}{4500} = \frac{1}{480000};$

IV. r. $S = 1,8$ km; $M_{l\,sred} = 0,052;$ $M_{r\,sred} = \frac{0,052\sqrt{2}}{1800} = \frac{1}{25000}.$

Ovo je ustvari srednja relativna slučajna greška dužine trigonometriske strane određene iz koordinata. Ako bismo imali vrednost ove dužine dobijene direktnim merenjem, stvorili bismo mogućnost da uzmemo u obzir i sistematsku grešku te bi treći član formule za dozvoljeno linearno otstupanje u poligonskom vlaku bio još tačnije određen. No i ovako nađena vrednost za mrežu IV. reda ($M_{l\,sred} = 0,052$, — u njemačkim formulama III. član iznosi 0,05 —) praktično zadovoljava s obzirom na tačnost koja se traži za poligonsku mrežu.

DÉTERMINATION DE VALEUR MOYENNE DES DEMI- AXES D' ELLIPSE MOYENNE DES ERREURS DANS LA TRIANGULATION DE III. ET IV ORDRE YOUGOSLAVE

Dans cet article l A. donne le procédé de calculation et les résultats des recherches concernant les valeurs des demi-axes d' ellipse des erreurs commises d' après les erreurs moyennes des coordonées des 504 paints trigonomètrques du III ordre primordial, des 469 points trigonométriüues du IV ordre.

Les valeurs moyennes des demi-axes A_{sred} B_{sred} ainsi que les résultats de calculation sont donnes dans les tables pages 30, 31, 32. Les erreurs relatives accidentelles moyennes de longeur de côtés trigonométriques déterminees d'après les coordonnèes sont mentionnées à la page 33. Pour le réseau de IV ordre cet erreur est M_l=0,052 m.

Les récherches ont été faites afin d'étudier le membre constant dans la formule de tolérance des cheminements polygonaux.