Leo Randić — Zagreb

O konstrukciji vertikala u stereografskoj projekciji

I.

Neke metode praktične astronomije traže, da se opažaju zvijezde, koje zadovoljavaju neke posebne uvjete. Potrebno je stoga izvršiti izbor zvijezda na osnovu postavljenih uvjeta. Tako moraju, na primjer, kod metode Pjevcova zvijezde biti na jednakoj zenitnoj daljini i jednako daleko od meridijana u izvjesnom pojasu. U zemljama gdje se često upotrebljava ta metoda koriste se posebne tablice za pronalaženje zvjezdanih parova, ali kod nas su te tablice vrlo rijetke ili ih uopće nema. Zbog toga je najbolje pri sastavljanju programa opažanja upotrebiti stereografsku projekciju nebeske sfere, tako da na karti imamo ucrtane položaje zvijezda i mrežu ekvatorskih koordinata. Na prozirnom materijalu, koji se stavlja iznad karte ucrtamo mrežu almukantarata i vertikala, na taj način, da se dade pomicati, pa možemo ostvariti sve moguće položaje, koji se zbivaju u toku dnevnog kretanja nebeskog svoda.

Za centar projekcije uzima se nebeski pol i onda se svi satni krugovi preslikavaju kao pravci, koji prolaze kroz središte, a nebeske paralele, kao koncentrični krugovi sa središtem u nebeskom polu. Mreža almukantarata preslikava se kao niz krugova, kojima su središta, doduše, na projekciji meridijana, ali ne padaju zajedno u projekciju zenita. Projekcije su vertikala takodjer krugovi, kojima središta leže na istom pravcu i problem konstrukcije sastoji se u tome, da se odredi središte svakog pojedinog vertikala, odnosno da se ucrta sam vertikal. Postupak konstruiranja karte i mreže almukantarata i vertikala izveo je Witram[1], a njegov postupak su kod nas opisali M. Terzić[2] i V. Tretjakov[3], dok ga je prof. Abakumov obrađivao u svojim predavanjima. Smatrati ćemo stoga Witramov postupak kao poznat i obratiti pažnju na mogućnost drukčijih konstrukcija projekcije vertikala.

Pojavljuju se dvije osnovne mogućnosti: grafičko rješenje u slučaju karte manje veličine i analitičko izračunavanje pojedinih točaka u slučaju, kad je karta toliko velika, da se ne mogu upotrebiti obična pomagala za crtanje.

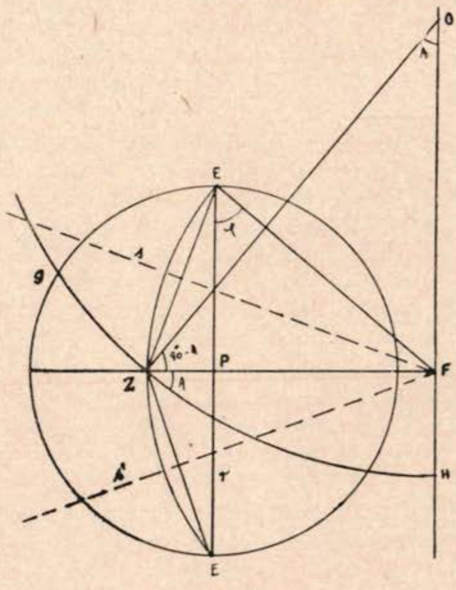
a) grafičko rješenje. Kako smo već spomenuli središte krugova projekcije vertikala nalaze se sva na jednom pravcu. Iz kartografije znamo, da je taj pravac okomit na pravac projekcije meridijana, a udaljen je za veličinu

$$PF = r \; tg \; \varphi \tag{1}$$

od projekcije nebeskog pola P. (vidi sl. 1.), gdje je r polumjer osnovnog kruga, koji nam pretstavlja projekciju ekvatora, a φ je geografska širina mjesta, za koje se karta izrađuje. Grafički ćemo to riješiti najjednostavnije, ako na karti, na kojoj već imamo nacrtan krug polumjera r oko projekcije pola P i povučen pravac projekcije meridijana koji je određen točkom P i projekcijom zenita Z, povučemo promjer $E\ E'$ okomito na projekciju meridijana PZ. Tada u točki E nanesemo kut φ čiji će nam krak sjeći pravac PZ u traženoj točki F. Kroz točku F povučemo paralelu s pravcem EPE' i to je traženi pravac, na kojem leže središta projekcija vertikala.

Točku F možemo dobiti i na drugi način, ako je shvatimo kao središte projekcije I. vertikala EZE'. Tada je točka F sjecište simetrale s dužine EZ i simetrale s' dužine ZE'.

Točku O, središte projekcije vertikala nekog azimuta A dobit ćemo sada vrlo jednostavno. Dovoljno je u točki Z nanijeti kut $90^0 - A$, pa će nam sjecište kraka tog kuta s okomicom u točki F biti upravo točka O. Iz svojstva stereografske projekcije proizlazi, naime, da tangenta na krug projekcije GZH u točki Z zatvara s projekcijom meridijana PZ upravo kut A — azimut zadanog vertikala. Kako središte projekcije vertikala mora ležati na normali u točki Z, koja zatvara s projekcijom meridijana kut $90^0 - A$, a istovremeno i na okomici kroz F, to je onda njihova zajednička točka, sjecište O, traženo središte.



Sl. 1.

b) analitičko rješenje. Već iz slike 1. vidimo, da točka O odlazi sve dalje od F, kad se smanjuje azimut A. U slučaju, da su dimenzije karte malo veće naći će se točka O izvan crtaćeg papira, odnosno crtaćeg stola i morat ćemo konstruirati projekciju vertikala, na taj način, da analitički odredimo veći broj točaka te projekcije. U postupku Witrama, koji su izložili Terzić Tretjakov i prof. Abakumov u svojim predavanjima, uzima se projekcija meridijana, kao koordinatna os x, a okomica na nju u točki P kao os y. Za samo izračunavanje koristi se pomoćni kut λ, koji je polarni kut u O tražene točke K na vertikalu, s obzirom na pravac OF (vidi sl. 2.). Polazeći od proizvoljno odabrane vrijednosti nezavisno promjenljive koordinate x izračunava se λ iz formule

(2) $$\sin \lambda = (x + r \operatorname{tg} \varphi) : R$$

;dje je φ geografska širina, r polumjer projekcije ekvatora, koji smo proiz-
'oljno odabrali prema veličini karte, a R je polumjer projekcije vertikala, koji
zračunamo iz formule:

3) $$R = OZ = r : (\cos \varphi \sin A)$$

;dje je A azimut dotičnog vertikala. Pomoću poznatog λ izračunamo tada
lrugu koordinatu y po formuli:

4) $$y = R \cos A - R \cos \lambda$$

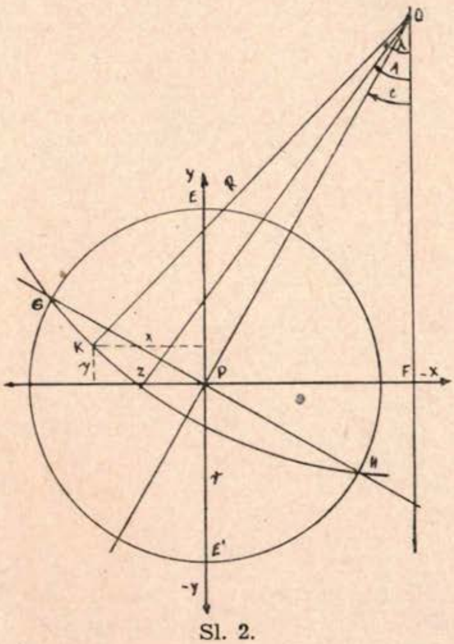
Terzić preporuča u svrhu pojednostavljenja računanja, da se formula (2) na-
ıiše drukčije:

2a) $$\sin \lambda = (x/r + tg\ \varphi) : r/R$$

tada uzimajući okrugle vrijenosti x/r izračunava λ, a iz njega y. Bit će
neđutim jednostavnije, ako se λ uzme kao nezavisno promjenljiva, te se iz
ablica neposredno uzimaju vrijednosti sin λ i cos λ za okrugle stupnje-
re λ, pa se pomoću jednadžbe (4) izračuna y, a pomoću

5) $$x = R \sin \lambda - r\ tg\ \varphi$$

rrijednosti koordinate x. Na taj se način izbjegne interpolacija i traženje po-
ebnih vrijednosti λ u trigonometrijskim tablicama, a za nanašanje koordinata
ıije trud gotovo nimalo uvećan, zato što vrijednosti x nisu okrugli brojevi.

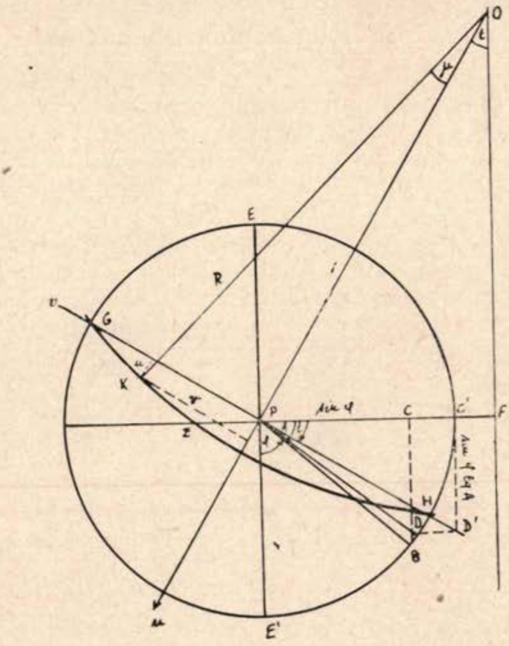


Sl. 2.

Samo izračunavanje koordinata pojedinih točaka može se još znatnije
ıbrzati, ako se koordinatni sistem svrsishodnije izabere. Već na slici 2. vidimo,
la projekcija vertikala leži nesimetrično prema koordinatnim osima i prema
ome treba svaku točku vertikala izračunavati posebno. S druge strane opa-

žamo, da je pravac PO os simetrije za projekciju vertikala, pa će biti najpri rodnije odabrati taj pravac kao koordinatnu os u, a pravac HPG kao koordi natnu os v. Potrebno je dakle prije svega odrediti os PO, odnosno os HPG.

Najjednostavnije je konstruirati os PO (vidi sl. 3.) spajajući P s točkom O ali u ovom našem slučaju to je nemoguće izvesti, jer je točka O suviše daleko Preostaje nam da konstruiramo pravac HPG, koji je okomit na PO. Označim li kut u P što ga zatvaraju pravci HPG i FPZ sa t, tada nam t pretstavlja satni kut presjecišta zadanog vertikala i ekvatora. U stereografskoj projekcij vertikal se preslikava u krug GZH, ekvator u krug $EGE'H$, presjecište u



Sl. 3.

točku G odnosno H, satni krug presjecišta u pravac GPH, a meridijan u pravac FPZ, pa je kut kod P satni kut t. Vezu, koja povezuje satni kut t i azimut A možemo dobiti iz sfernog trokuta: pol, zenit, presjecište G, imajući u vidu, da je stranica PG upravo jednaka 90^0, jer je G na ekvatoru. Tražena relacija glasi:

$$\text{(6)} \qquad tg\ t = sin\ \varphi\ tg\ A.$$

Na osnovu ove relacije možemo vrlo jednostavno konstruirati grafičk kut t, t. j. pravac HPG. U tu svrhu nanesimo u točki P kut φ idući od pravca PE'. Tako dobijemo točku B i smatrajući polumjer osnovnog kruga za jedinicu, bit će dužina PC, koju dobijemo spustivši iz B okomicu na pravac PF jednaka $PC = sin\,\varphi$. Nanesemo li sada od pravca FP zadani kut A dobijemo točku D, koja je od pravca FP udaljena za veličinu $CD = sin\ \varphi\ tg\ A$. Prenesemo li dužinu CD na okomicu u C' dobijemo točku D', koja nam spojena s P

daje u P kut t, odnosno traženi pravac HPG, jer je $C'D' = tg\ t$. Iz ovog vidimo, da na ovaj način možemo konstruirati pravac koordinatne osi v kad su kutevi A maleni, dok će u protivnom slučaju, za $A > 50^0$ točka D' otići suviše daleko, ali tada će točka O biti blizu, pa konstruiramo neposredno OP.

Konstruirajući koordinatnu os v dobili smo istovremeno i dvije točke projekcije vertikala; to su točke H i G. Ostale ćemo točke lako dobiti izračunavanjem koordinata u i v služeći se pomoćnim kutem μ što ga zatvara radij vektor R s polarnom osi u. Iz slike slijedi:

(7) $$u = R \cos \mu - d$$

(8) $$v = R \sin \mu,$$

gdje je

(9) $$d = OP = r\ tg\ \varphi : \sin t.$$

Prema svemu izloženom tekao bi postupak za izračunavanje projekcije vertikala slijedećim redom: Za dati azimut A vertikala i uz poznate r i φ

1) izračuna se R iz (3),
2) izračuna se t iz (6),
3) izračuna se d iz (9),
4) za okrugle stupnjeve μ vadi se iz tablice $\sin\mu$ i $\cos\mu$, pa se izračuna v iz (8) i u iz (7),
5) s poznatim t ucrtaju se koordinatne osi i nanesu izračunate koordinate točaka, koje spojimo i dobijemo traženu projekciju vertikala.

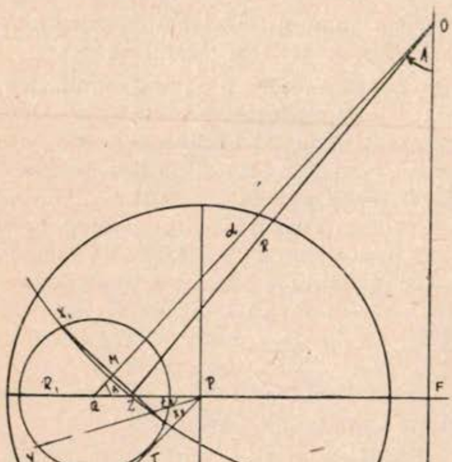
Sada možemo usporediti izračunavanje koordinata u, v s izračunavanjem koordinata x, y. Veličinu R treba izračunati u oba slučaja i prema tome nema nikakve razlike. Veličinu t ne treba izračunati kod određivanja koordinata x, y, već samo za koordinate u, v. Tu treba ipak imati na umu, da izračunavši t po formuli (6) u isto vrijeme dobivamo dvije točke pojekcije vertikala: H i G. Samo izračunavanje po formuli (6) brže je nego izračunavanje jednog para vrijednosti x i y, koji daju samo jednu točku projekcije vertikala. Budući da se i kod izračunavanja x, y treba izračunati veličinu $r\ tg\ \varphi$, to će izračunavanje veličine d biti ekvivalentno vremenu izračunavanja izraza $R \cos A$ u formuli za y. Računanje u po jednadžbi (7) jednako je računanju x po jednadžbi (5) ili λ po jednadžbi (2) odnosno (2 a), dok je računanje v iz (8) jednostavnije, dakle brže od računanja y iz (4). Na osnovu toga može se reći, da je izračunavanje parova u, v nešto brže od izračunavanja parova x, y.

No osnovna se prednost izračunavanja točaka pomoću u i v sastoji u tome, što je za jednu projekciju vertikala potrebno izračunati dva puta manje parova u, v nego parova x, y. Iz jednadžbe (8) vidimo, da ćemo za negativne vrijednosti μ dobiti negativne vrijednosti v, ali će one po apsolutnoj veličini biti jednake onima za pozitivne vrijednosti μ. Prema tome izračunavamo v samo jednom, označujemo ih s oba predznaka i nanašamo s obje strane točke P na osi v. Vrijednosti u su prema jednadžbi (7) jednake i za pozitivne i za negativne vrijednosti μ, pa ih opet izračunavamo samo za jednu polovinu projekcije vertikala. Vidimo dakle da je zgodan izbor koordinatnog sistema dva puta ubrzao izračunavanje projekcije vertikala.

II.

Kod izrade programa opažanja za astrolab s prizmom možemo se također korisno poslužiti stereografskom projekcijom nebeske sfere. Tu se opet susrećemo s problemom konstrukcije projekcije vertikala, ali u posebnom obliku Dok smo u prijašnjoj konstrukciji određivali samo nekoliko vertikala, ali u punoj dužini, dotle nam u ovom slučaju treba odrediti samo presjecište vertikala s projekcijom almukantarata $z = 30^0$, ali ne jednog vertikala, već redom unaokolo po cijelom alkumukantaratu. Na taj način možemo pomoću označene projekcije almukantara vrlo jednostavno pronaći zvijezde, koje se nalaze na traženoj zenitnoj daljini i na samoj projekciji pročitati azimut zvijezde u tom položaju. Istovremeno ćemo pomoću ucrtanog meridijana moći očitati na rubu zvjezdane karte trenutak zvjezdanog vremena prolaza kroz almukantarat Uzmemo li dovoljno veliku kartu onda možemo prema oznaci od po 5^0 očitati azimut točnošću do $0{,}5^0$, što će biti posve dovoljno da nađemo zvijezdu u vidnom polju instrumenta.

Konstrukcija same karte u pogledu nanašanja zvijezda po deklinaciji i rektascenziji, kao i konstrukcija projekcije almukantarata posve je jednaka postupku Witrama, kako je opisan kod Terzića i Tretjakova, što smo već spomenuli u I. dijelu. Potrebno je ovdje naglasiti, da središte Q projekcije almukantarata, koja je također krug, ne će pasti u projekciju središta almukantarata — zenita — kako bi se moglo zaključiti iz izlaganja u članku Terzića, već nešto južnije.



Sl. 4.

Što se tiče nanošenja azimuta na projekciju almakantarata, može se uzeti, da je za vertikale s azimutom od $A = 50^0$ do $A = 130^0$ i od $A = 230^0$ do $A = 310^0$, najzgodnije odrediti središta O, kako je pokazano u I. dijelu, i povlačeći iz njih lukove odrediti njihova presjecišta s almukantaratom. Međutim za vertikale s azimutom od 310^0 do 50^0 i od 130^0 do 230^0 to će biti praktički neizvodljivo, jer će točka O padati suviše daleko, da bi za $A = 0^0$ pala u beskonačnost i projekcija postala pravac poklopivši se s projekcijom meridijana. Zato moramo za te preostale vertikale upotrebiti drugi postupak.

Neka nam na slici 4. vrijede iste oznake kao i na ranijim slikama, samo neka Q označuje projekciju središta almukantarata $z = 30^0$. Iz kartografije znamo da je

(10) $$PZ = r\, tg\,(45^0 - \varphi/_2)$$

(11) $$PQ = r\,[tg\,(60^0 - \varphi/_2) + tg\,(30^0 - \varphi/_2)] : 2 \text{ ili}$$
$$= r \cos \varphi : (\cos 30^0 + \sin \varphi),$$

lok je polumjer R_1, projekcije almukantarata oko Q jednak:

12) $$R_1 = r\,[tg\,(60^0 - \varphi/2) + tg\,(30^0 - \varphi/2)] : 2 \quad \text{ili}$$
$$= r : (\sqrt{3} + 2\,sin\,\varphi)$$

ı polumjer R projekcije vertikala određen je već s

3) $$R = r : cos\,\varphi\,sin\,A.$$

)alje je

13) $$OF = R\,cos\,A$$

1) $$FP = r\,tg\,\varphi$$

Povučemo li pravac kroz točke O i Q zaklapat će u točki Q kut β s pro-
ekcijom meridijana. Kut β možemo izračunati iz formule

14) $$tg\,\beta = OF : (FP + PQ).$$

Jdaljenost središta O od središta Q bit će jednaka:

15) $$d = OQ = R\,cos\,A : sin\,\beta.$$

Pomoću veličina d, R i R_1 možemo sada izračunati sjecište radikalne osi pravcem OQ, t. j. točku M. Iz analitičke geometrije znamo da je

16) $$QM = (R^2{}_1 + d^2 - R) : 2d.$$

Znamo nadalje, da je radikalna os ona zajednička sekanta dva kruga, koja ırolazi kroz njihova međusobna sjecišta i stoji okomito na spojnici njihovih redišta. Prema tome, ako u točki M podignemo okomicu na OQ, sjeći će ona ırojekciju almukantarata oko Q u točkama X_1 i X_2, a prema svojstvima radi-
:alne osi, te su točke ujedno sjecište projekcije almukantarata s projekcijom ·ertikala, koje smo trebali odrediti.

Postupak bi ukratko bio slijedeći: iz (3), (13), (1), (11) i (14) pomoću za-
lanog A, r i φ izračunamo kut β. Na osnovu toga ucrtamo kroz točku Q ıravac OQ. Izračunavši d iz (15) odredimo dužinu MQ pomoću (16) nanesemo e na pravac OQ i odredimo točku M. Položivši kroz M okomicu dobijemo tra-
ena presjecišta X_1 i X_2.

Možemo brže doći do projekcija traženih presjecišta ako izračunamo nji-
ıov satni kut. U sfernom trokutu: zenit, pol, presjecište zadanog vertikala i lmukantara poznati su nam elementi: zenitna daljina $z = 30^0$, zadani zimut A, daljina pol-zenit jednaka $90^0 - \varphi$, pa izračunamo satni kut po for-
nuli za četiri susjedna elementa:

17) $$cotg\,t_a = cos\,\varphi\,cotg\,z\,cosec\,A + sin\,\varphi\,cotg\,A.$$

Budući da zbog svojstva stereografske projekcije satni kut ostaje nepro-
nijenjen, to će i u projekciji satni kut presjecišta vertikala i almukantarata stati isti. Prema tome dovoljno je u točki P povući pravac — projekciju satnog ruga kroz presjecište — koji zatvara kut t_a s projekcijom meridijana. 'očka Y, sjecište tog pravca s projekcijom almukantarata dati će nam traženu rojekciju presjecišta.

Očito je, da će pravac sjeći krug projekcije almukantarata u dvije točke, li će nam gotovo uvijek neposredan pogled na crtež dati jasan odgovor, koje e sjecište pravo. Izbor među sjecištima bit će otežan samo ako je pravac blizu oložaja tangiranja kruga almukantarata. U tom slučaju bit će najbolje, da dredimo azimut vertikala kroz diralište T satnog kruga i almukantarata rema formuli:

18) $$cos\,A_t = -\,tg\,\varphi\,tg\,z.$$

Znademo li azimut točke dodira, nije teško odrediti pravo sjecište. U slu čaju pozitivnog t, t. j. za vertikale u I. i II. kvadrantu (brojeći od točke juga bit će za azimute $A < At$. udaljenije sjecište od točke P ono pravo, za $A > At$ bliže sjecište, dok će za negativne t, t. j. za vertikale u III. i IV kvadrantu biti obrnuto, za $A < At$ bit će pravo sjecište bliže točki P, a z $A > At$ dalje.

Usporedimo li ovaj postupak s onim pomoću radikalne osi, vidimo da j jednadžba (17) mnogo zgodnija, nego računanje po formulama (3), (13), (14 (15) i (16), ali se prednost donekle umanjuje, jer pomoću satnog kuta t_α dobi vamo samo po dvije točke (drugu točku dobijemo, ako nađenu točku preba cimo simetrično prema pravcu PZ), a sa radikalnom osi dobijemo odmah če tiri točke. Doduše, kod računanja po formuli (17) numeričke vrijednosti bi će jednake u prvom i drugom članu formule, jer se radi o ubacivanju vrijednc sti A i $180^0 - A$, pa će zbog toga samo drugi član mijenjati predznak jer j $cotg\ (180^0 - A) = -\ cotg\ A$. Prema tome za azimute I. i IV. kvadranta ima ćemo zbroj oba člana u formuli (17), a u II. i III. njihovu razliku, ali same čla nove bit će dovoljno izračunati samo jedamput. Stoga će još uvijek osta prednost kod postupka po formuli (17).

Za točke vertikala kojima je azimut blizak A_t sjecište pravca i almukar tarata bit će suviše razvučeno i prema tome netočno, pa se može primijeni postupak s radikalnom osi iako duži. Međutim, za naše geografske širine n dolazi ni taj slučaj u obzir, jer točka tangiranja T leži u predjelu većih az muta, kad možemo presjecišta najzgodnije dobiti povlačeći neposredno prc jekcije vertikala iz točke O.

CONSTRUCTION OF THE CELESTIAL VERTICALS IN THE STEREOGRAPHICAL PROJECTION

Stereographical projection of the celestial sphere is very useful for finding the Pewzov pairs of stars, and it is very simple to construct it. The construction of the almucantars quite easy and here we give some hints on the construction of the verticals. For charts small scale it is conviniently to construct them graphically. For that purpose we draw a pe pedicular to meridian in the point **P** (fig. 1.) which produces the points **E E'**. We draw tl angle φ in the point **E** and we get the point **F** as an intersection with the meridian; then v get the centre **O** of the vertical's projection as an intersection of the line through the point (zenith) closing the angle **90-A** with the meridian and the line through the point**F** parallel the line **EE'**. Drawing a circle around **O** with the radius **OZ** we get the projection of vertic of a given azimuth **A**.

For a chart in a bigger scale the point **O** is too far away to be graphically construct and we must construct the vertical's projection calculating many points of it. For that purpo we use the coordinate system with the axes **u** and **v** (fig. 3.) where the axis **v** closes the ang t with the meridian, which we can calculate by the formula (6). Then we calculate the valu **u** and **v** for every point of the vertical from (7), (8), (9) what is two times faster than usir the formulae (2), (3), (4), — Witram's — because the every pair of **u, v** gives us two points vertical's projection which is simetrical to the axes **u** and **v.**

II.

We can use the stereographical projection for choosing the stars for the observatio with the prismatic astrolabe, but it is convenient to mark the azimuth on the almucantar projection. For a given azimuth **A** we calculate the angle β using (3), (13), (1), (11), (14) ar draw the line **OQ** (fig. 4); then we find the length **MQ** from (15) and in the point **M** draw perpendicular which produces the point $X_1 X_2$, as intersections with the almucantar's proje tion. The points X_1 and X_2 are the marks on the almucantar of the given azimuth **A.**

One of the points **X** we can find still faster if we draw a line through the point (projection of the pole in fig. 4) which closes the angle t_a with the meridian, and the inte section of this line with the circle of almucantar's projection gives us the point **X.** We calcula the angle t_a by the formula (17).

LITERATURA

1) F. V. Witram: O priiskanii zvjezdnih par dlja opredjeljenija po sootvjetstvujušči visotam. S. Petrograd 1898.

2) M. Terzić: Prilog za odredbu apsolutnih koordinata λ. φ i A iz astronomskih posm tranja. Godišnjak astronomske opservatorije univerziteta u Beogradu za godinu 1930. Beogra 1929, str. 232—238.

3) V. V. Tretjakov: Praktična astronomija za primjenu u višoj geodeziji. Beogra 1933. Izdanje Vojno Geografskog Instituta, str. 351—355.