

Dr. Ing. Josip Baturić — Zagreb

Izjednačenje metodom opće aritmetičke sredine

(Svršetak)

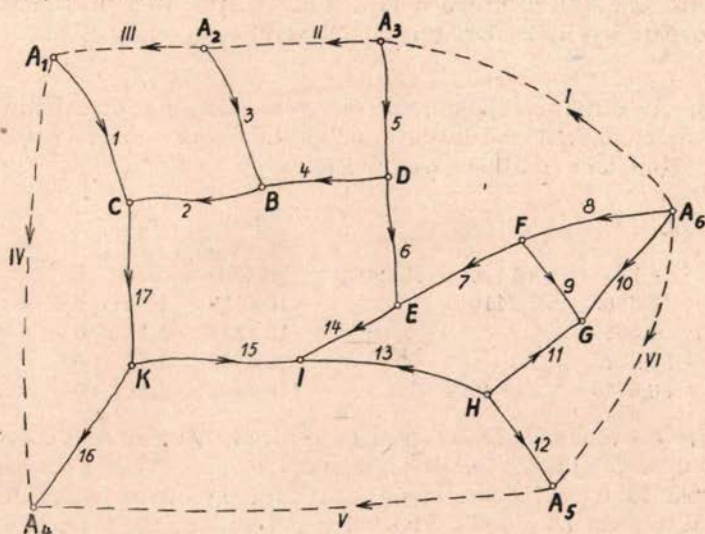
Izjednačenje kompliciranijih nivelacionih mreža

Svaka mreža, koja se može rastaviti na dva centralna sistema i nakon pojedinačnog izjednačenja spojiti u jedan centralni sistem, može se također izjednačiti po metodi opće aritmetičke sredine.

Kod ovakvog rješavanja bitno je ovo:

Vlak koji se upotrebi dva puta, ulazi u račun sa polovičnom vrijednosti kvalitete, odnosno, onaj vlak koji se upotrebi četiri puta dobiva četvrtinu vrijednosti kvalitete.

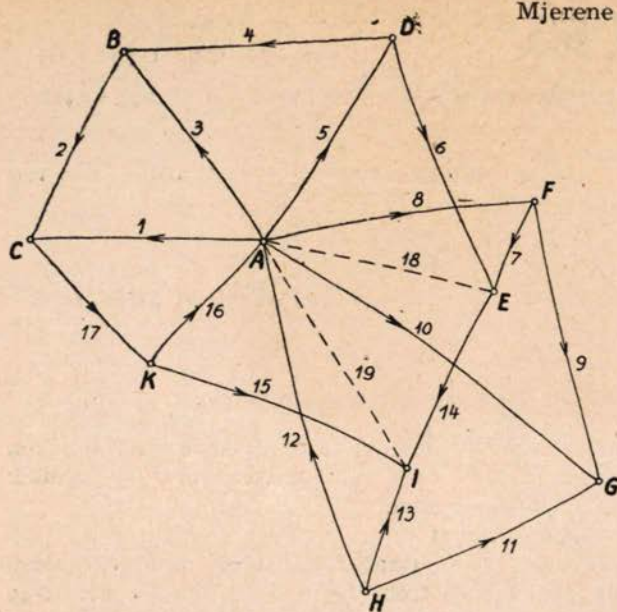
Primjer komplicirane mreže kod koje se koristimo nemjerenim vlakovima, da sačuvamo centralni sistem (Kostić-Svečnikov: Nivelman, str. 442.)
Zadane su ove visinske razlike (sl. 14.)



I	4,3880
II	7,2110
III	13,9640
IV	134,9049
V	129,4904
VI	30,9775

Sl. 14.

U svrhu boljeg pregleda računanja sastavimo drugu skicu mreže u kojoj će se ispoljiti dva moguća sistema centralna. Kod toga spojimo sve zadane točke A_1, A_2, \dots, A_6 u jednu točku A (sl. 15.).



Sl. 15.

Mjerene su ove visinske razlike:

vlak	h	p	$\frac{1}{p}$
1	28,6456	0,91	1,1
2	37,5706	0,667	1,5
3	5,0229	1,667	0,6
4	1,4988	1,43	0,9
5	10,7447	1,11	0,7
6	80,2740	2,00	0,5
7	81,8591	1,43	0,7
8	13,5738	0,91	1,1
10	36,4437	1,11	0,9
11	10,6118	5,00	0,2
12	46,5163	1,25	0,8
13	41,9286	1,667	0,6
14	64,3112	1,00	1,0
15	5,1328	1,43	0,7
16	139,1728	0,476	2,1
17	69,6088	1,43	0,7

Napomena: Budući da se u ovom primjeru izjednačuje najprije u jednom a zatim u suprotnom smjeru preko nemjerenih vlakova 18 i 19 nije potrebno uzimati polovične kvalitete. Drugim riječima: nijedan vlak ne ulazi u račun dva puta.

Vlakovima koji su direktno spojeni sa zadanim točkama promjenimo vrijednosti, dodavanjem zadanih visinskih razlika tako, kao da polaze iz zajedničke točke A: Kod toga kvalitete ostaju iste.

Vlak	h_{red}	p	$\frac{1}{p}$
1	28,6456 + 4,3880 + 7,2110 + 13,9640	54,2086	0,91 1,1
3	5,0229 + 4,3880 + 7,2110	16,6219	1,667 0,6
5	10,7447 + 4,3880	15,1327	1,11 0,9
12	5,1328 - 30,9775	- 25,8447	1,43 0,7
16	41,9286 - 30,9775 - 129,4904	- 118,5393	1,667 0,6

Riješimo najprije šesterokut E D B C K I sa centrom u točki A. Vlakovi 18 i 19 su nemjereni, t. j. njihova kvaliteta jednaka je nuli. Vlak 6 bi trebalo uzeti sa vlakom 18 u serijskom spoju, ali radi kvalitete vlaka 18, koja je jednaka nuli, otpada i upotreba vlaka 6 u prvom smjeru, a upotreba vlaka 15 u drugom smjeru otpada radi kvalitete vlaka 19, koja je također jednaka nuli.

Točku I možemo odrediti samo jednim smjerom budući da vlakovi 18 i 19 ne postoje. Izjednačenje započinje jednim smjerom sa vlakom 5. Isto tako možemo odrediti točku E samo jednim smjerom.

Suprotnim smjerom, počev sa vlakom 16 odredi se točka E.

Tablica 36

vlak	h	p	$\frac{1}{P}$	Δh	p Δh	$\frac{p\Delta h}{\sum p}$	vlak	h	p	$\frac{1}{P}$	Δh	p Δh	$\frac{p\Delta h}{\sum p}$
5	15,1327		0,9				-16	118,5393		0,6			
4	1,4988		0,7				-17	-64,3112		1,0			
(B)	16,6315	0,625	1,6	96	60	26	(C)	54,2281	0,625	1,6	195	122	79
3	16,6219	1,667					1	54,2086	0,91				
B	16,6245	2,292	0,44				C	54,2165	1,535	0,65			
2	37,5706		1,5				-2	-37,5706		1,50			
(C)	54,1951	0,515	1,94	135	69,5	49	(B)	16,6459	0,465	2,15	240	112	52
1	54,2086	0,910					3	16,6219	1,667				
C	54,2037	1,425	0,70				B	16,6271	2,132	0,47			
17	64,3112		1,00				-4	-1,4988		0,70			
(K)	118,5149	0,588	1,70	244	144	64	(D)	15,1283	0,86	1,17	44	37,8	19
-16	118,5393	1,667					5	15,1327	1,11				
K	118,5329	2,255	0,44				D	15,1308	1,97	0,51			
15	46,5163		0,80				6	80,2740		0,50			
I1	165,0492	0,806	1,24				E1	95,4048	0,99	1,01			

Analognim postupkom rješavamo peterokut E F G H I sa centrom u točki A. Jednim smjerom odredimo točku I a suprotnim smjerom točku E.

Ovdje otpada upotreba vlaka 7 u jednom smjeru, a vlaka 13 u drugom smjeru.

Tablica 37

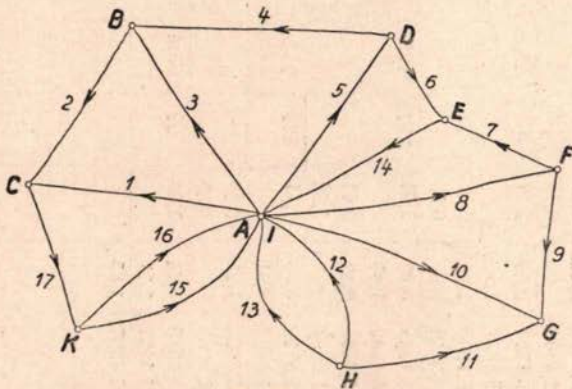
vlak	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p\Delta h$	$\frac{p\Delta h}{\sum p}$	vlak	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p\Delta h$	$\frac{p\Delta h}{\sum p}$
8	13,5738		1,1				-12	25,8447		0,7			
9	22,8683		0,8				11	10,6118		0,2			
(G)	36,4421	0,526	1,9	16	8,4	5	(G)	36,4565	1,11	0,9	128	142	64
10	36,4437	1,110					10	36,4437	1,11				
G	36,4432	1,636	0,61				G	36,4501	2,22	0,45			
-11	-10,6118		0,20				-9	-22,8683		0,80			
(H)	25,8314	1,235	0,81	133	164	61	(F)	13,5818	0,80	1,25	80	64	37
-12	25,8447	1,430					8	13,5738	0,91				
H	25,8386	2,665	0,38				F	13,5775	1,71	0,59			
13	139,1728		2,10				7	81,5775		0,70			
I _{II}	165,0114	0,403	2,48				E _{II}	95,4366	0,775	1,29			

Od rezultata E_I i E_{II} učinimo opću aritmetičku sredinu vrijednosti E kojoj dodamo vlak 14, da dobijemo vrijednost I_{III} . Ova vrijednost sa I^I i I_{II} daje konačno izjednačenu vrijednost I (vidi tab. 38).

Spojimo li sada točke A i I u jednu točku (sl. 16.) nastaje novi oblik otvorenog centralnog sistema (točke H nije spojena sa točkom K) koji se rješava jednostavnije.

Tablica 38

vlak	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p\Delta h$	$\frac{p\Delta h}{\sum p}$
E _I	95,4048	0,990		318	315	178
E _{II}	95,4366	0,775				
E	95,4188	1,765	0,57			
14	69,6088		0,70			
I _{III}	165,0276	0,788	1,27	216	170	107
I _I	165,0492	0,806				
	165,0385	1,594		271	431	216
I _{II}	165,0114	0,403				
I	165,0330	1,997				



Sl. 16.

Prethodno treba vlakove 13, 15 i 14 koji su vezani na točku I vezati na točku A redukcijom vivinske razlike od točke A do točke I:

vlak		h_{red}	p	$\frac{1}{p}$
13	— 165,0330 + 139,1728	— 25,8602	0,476	2,1
14	— 165,0330 + 69,6088	— 95,4242	1,43	0,7
15	— 165,0330 + 46,5163	— 118,5167	1,25	0,8

Jednim smjerom, počev sa vlakom 15 i 16 određuju se uzastopno vrijednosti K_1 , C_1 , B_1 , D_1 , E_1 , F_1 i G_1 , pomoću kojih drugim, suprotnim smjerom, počev sa vlakom 12 i 13 odredimo vrijednosti G_2 , F_2 , i t. d., te konačno izjednačene vrijednosti G , F , i t. d.

Tablica 39

vlak	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	p Δh	$\frac{p\Delta h}{\sum p}$	vlak	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	p Δh	$\frac{1}{p}$
-15	118,5167	1,250		226	282	97	-12	25,8447	1,430		155	222	116
-16	118,5393	1,667					-13	25,8602	0,476				
K ₁	11,5296	2,917	0,34				H ₁	25,8486	1,906	0,52			
-17	-64,3112	1,00	1,00				11	10,6118	1,39	0,20			
(C)	54,2184	0,746	1,34	98	73,2	44	G ₂	36,4604	1,85	0,72	207	287	89
I	54,2086	0,910					G ₁	36,4397	3,24				
C ₁	54,2130	1,656	0,60				G	36,4486	0,8				
-2	-37,5706	1,50	1,50				-9	-22,8683	1,25	0,8	148	285	60
(B)	16,6424	0,476	2,10	205	97,6	46	F ₂	13,5803	1,81				
3	16,6219	1,667					F ₁	13,5655	3,06				
B ₁	16,6265	2,143	0,47				F	13,5715	0,7				
-4	-1,4988	0,70	0,70				7	81,8591	1,43	0,7	145	207	54
(D)	15,1277	0,855	1,17	50	42,7	22	E ₂	95,4306	2,42				
5	15,1327	1,110					E ₁	95,4161	3,85				
D ₁	15,1305	1,965	0,51				E	95,4215	0,5				
6	80,2740	0,50	0,50				-6	-80,2740	2,000	0,5	170		86
(E)	95,4045	0,99	1,01	197	195	81	D ₂	15,1475	1,965				
-14	95,4242	1,43	0,41				D ₁	15,1305	3,965			340	
E ₁	95,4161	2,42	0,70				D	15,1391	1,430	0,7	114		46
-7	-81,8591	0,90	1,11	168	151	83	4	1,4988	2,143				
(F)	13,5570	0,91	0,55				B ₂	16,6379	3,573	1,5			
8	13,5738	1,81	0,80				B ₁	16,6265	0,667	1,5	113		32
F ₁	13,5655	1,85	1,35	99	73,4	40	B	16,6311	1,656				
9	22,8683	1,11					2	37,5706	2,323	1,00			
(G)	36,4338	0,74	0,70				C ₂	54,2017	1,000	1,00	86		22
10	36,4437	1,11					C ₁	54,2130	2,917				
G ₁	36,4397	1,85					C	54,2098	3,917				
							17	64,3112					
							K ₂	118,5210					
							K ₁	118,5296					
							K	118,5274					

Konačno izjednačimo još vrijednost H:

Tablica 40

vlak	h	p	$\frac{1}{p}$	Δh	$\frac{p h}{p}$	$\frac{p h}{p}$	vlak	h	p	$\frac{1}{p}$
H ₁	25,8368	1,906		118	225	33	G	36,4486		
H ₂	25,8486	5,0					-11	10,6118		0,2
H	25,8401	6,906					H ₂	25,8368	5,0	0,2

Rezultati izjednačenja su ovi:

vlak			h_{izjed}	h_{mj}	v	v	
1	54,2098	—	25,5630	28,6468	28,6456	12	11
2	—	16,6311	+ 54,2098	37,5787	37,5706	81	81
3	16,6311	—	11,5990	5,0321	5,0229	92	91
4	16,6311	—	15,1391	1,4920	1,4988	—68	—68
5	15,1391	—	4,3880	10,7511	10,7447	64	64
6	95,4215	—	15,1391	80,2824	80,2740	84	84
7	95,4215	—	13,5715	81,8500	81,8591	—91	—91
8	13,5715			13,5715	13,5738	—23	—23
9	—	13,5715	+ 36,4486	22,8771	22,8683	88	87
10	36,4486			36,4486	36,4437	49	49
11	—	25,8401	+ 36,4486	10,6085	10,6118	—33	—33
12	—	25,8401	+ 30,9775	5,1374	5,1328	46	47
13	—	25,8401	+ 165,0330	139,1929	139,1728	201	201
14	—	95,4215	+ 165,0330	69,6115	69,6088	27	27
15	—	118,5274	+ 165,0330	46,5056	46,5163	—107	—107
16	—	118,5274	+ 160,4679	41,9405	41,9286	119	119
17	118,5274	—	54,2098	64,3176	64,3112	64	64

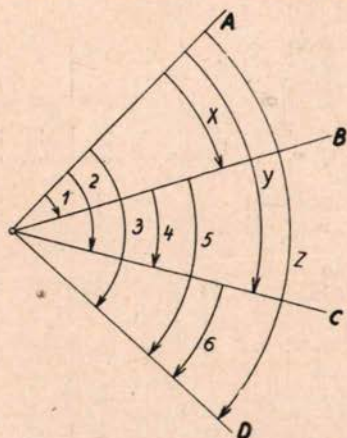
Posljednja rubrika sadrži odstupanja v koja nastaju pri izjednačenju po metodi najmanjih kvadrata. Usporedimo li odstupanja v vidimo, da je izjednačenje po jednoj i drugoj metodi ekvivalentno.

Izjednačenje girusa

Osim nivelacionih vlakova mogu se izjednačiti i kutovi mjereni na jednom stajalištu u više kombinacija.

Zbog boljeg pregleda kod izjednačivanja treba skicu mjerenja kutova na svakom stajalištu pretvoriti u takav oblik, koji odgovara nivelacionoj mreži.

Primjer. (Čuřik: Počet vyrovňavaci str. 107.) Izjednačiti treba kutove 1, 2, ... 6 ako su kvalitete za svaki kut jednake (sl. 17.)



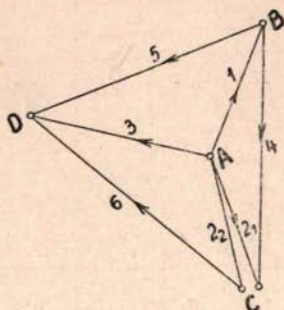
Sl. 17.

Podaci su ovi:

Kut	0	'	"	p
1	38	15	06	1
2	70	20	24	1
3	125	42	37	1
4	32	05	21	1
5	87	27	32	1
6	55	22	10	1

Skicu kutova u slici 17. pretvorimo u oblik nivelacione mreže (sl. 18.). Pravci A B C D zamijenjeni su točkama a kutovi vlakovima sa centrom u točki A. Tako na pr. kut 1 između pravaca A i B u prvoj skici zamijeni se vlakom 1, sada između točaka A i B sa strelicom u smjeru točke B, i t. d.

Za kut 2 uvedemo dva nova kuta iste veličine ali polovične kvalitete:



Kut	0	'	"	p	$\frac{1}{p}$
2 ₁	70	20	24	0,5	2,0
2 ₂	70	20	24	0,5	2,0

Sl. 18.

Od pravca A jednim smjerom odredimo pravac C₁, odnosno od pravca A drugim suprotnim smjerom odredimo pravac C₂. Od tih se rezultata zatim učini opća aritmetička sredina koja daje izjednačenu vrijednost C:

Sada slijedi račun vrijednosti B₁ i D₁ s pomoću već izjednačenog kuta 2 koji ima recipročnu kvalitetu jednaku nula:

Tablica 42

Kut				p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p \Delta h$	$\frac{p \Delta h}{\sum p}$
	0	'	"					
C	70	20	25,5		0,0			
-4	32	05	21,0		1,0			
(B)	38	15	04,5	1,00	1,0	1,5	1,5	0,8
1	38	15	06,0	1,00				
B ₁	38	15	05,2	2,00	0,5			
5	87	27	32,0		1,0			
(D)	125	42	37,2	0,67	1,5	0,2	0,13	0,1
3	125	42	37,0	1,00				
D ₁	125	42	37,1	1,67				

Suprotnim smjerom odredimo vrijednosti D₂ i B₂ kao i izjednačene vrijednosti D i B:

Tablica 43

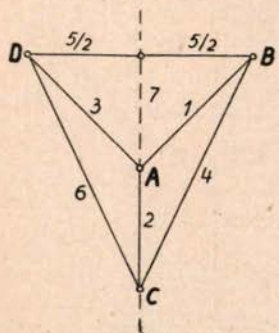
Kut				p	$\frac{1}{p}$	Δh	$p \Delta h$	$\frac{p \Delta h}{\sum p}$
C	°	'	"					
	70	20	25,5		0,0			
6	55	22	10,0		1,0			
D ₂	125	42	35,5	1,00	1,0	1,6	1,6	0,6
D ₁	125	42	37,1	1,67				
D	125	42	36,5	2,67				
-5	87	27	32,0		1,0			
B ₂	38	15	04,5	1,00	1,0	0,7	0,7	0,2
B ₁	38	15	05,2	2,00				
B	38	15	05,0	3,00				

Rješenje odgovara potpuno izjednačenju po metodi najmanjih kvadrata. Rezultati su ovi:

	kut _{mj.}			kut _{izj.}			v	vv
1	38	15	06	38	15	05,0	-1,0	1,00
2	70	20	24	70	20	25,5	1,5	2,25
3	125	42	37	125	42	36,5	-0,5	0,25
4	32	05	21	32	05	20,5	-0,5	0,25
5	87	27	32	87	27	31,5	-0,5	0,25
6	55	22	10	55	22	11,0	1,0	1,00
								<hr/> 5,00 = [v v]

Srednja pogreška za kvalitetu jednaku jedinici je:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v v]}{n - \mu}} = \pm \sqrt{\frac{5,00}{6 - 3}} = \pm 1,29''$$



Sl. 19.

Srednja pogreška, odn. kvaliteta, izjednačenih nepoznanica X, Y, Z pronalaze se u dva neovisna smjera, po mogućnosti simetrično (sl. 19.)

Zbog simetrije zamislimo da postoji nemjereni kut 7 sa kvalitetom jednakom nuli.

Kvalitetu p određujemo počev od pravca A pri čemu kut 5 ne uzimamo u obzir. Naime polovica toga kuta ako je i uzmemo u jednom smjeru preko mjenjenog kuta 7, samo po sebi u računjanju otpada:

Tablica 40

Kut	p	$\frac{1}{p}$	Kut	p	$\frac{1}{p}$	Kut	p	$\frac{1}{p}$
7	0,0	∞	D = 3		1,0	B = 1		1,0
polovica 5		0,5	6		1,0	4		1,0
(D)	0,0	∞	C ₁	0,5	2,0	(C)	0,5	2,0
3	1,0		C ₂	1,5		2	1,0	
D	1,0		C	2,0 = p _y		C ₂	1,5	

Budući da su kvalitete jednake, bit će $p_x = p_y = p_z = 2,0$ te iz toga

$$m_x = m_y = m_z = \pm \frac{m}{\sqrt{p_z}} = \pm \frac{1,29}{\sqrt{2,0}} = \pm 0,91''$$

Rezultati srednjih pogrešaka također se slažu sa rezultatima po metodi najmanjih kvadrata.