Geodetski list GLASILO SAVEZA GEODETSKIH DRUŠTAVA FEDERATIVNE NARODNE REPUBLIKE JUGOSLAVIJE

GODINA VI. (29) — APRIL — SEPTEMBAR 1952 — BROJ 4—9

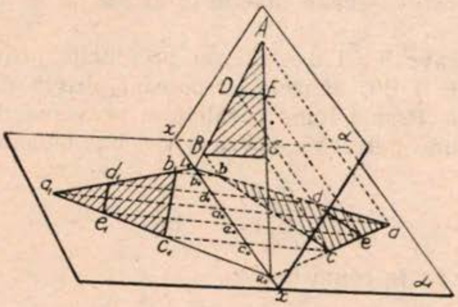
Ing. Sergije Berenov — Beograd

Afina tranformacija

PERSPEKTIVNE AFINE FIGURE

Ako se trougao A B C projecira paralelnim zracima na neku ravan onda se dobija trougao a b c (sl. 1). Pri takvom projeciranju menja se kako oblik trougla tako i dimenzije njegovih pojedinih delova ali ipak projekcija a b c ima izvesne elemente i svojstva trougla A B C i to:

1. Svakoj tački trougla A B C odgovara srodna njoj tačka trougla a b c. Pri ovom se obe srodne prave seku u tački koja je na liniji xx (sl. 1) preseka



Sl. 1

ravni α i α_1. Linija xx je osovina srodnosti.

3. Ako povučemo liniju D E paralelnu sa B C, onda će projekcije ovih linija biti takođe međusobno paralelne t. j. de//bc.

4. Odnos otsečaka između triju tačaka koje leže na jednoj pravoj trougla A B C jednak je odnosu odgovarajućih otsečaka između projekcija ovih tačaka koje leže na srodnnoj pravoj trougla abc. Na primjer, za stranu B A trougla imamo:

$$\frac{BD}{DA} = \frac{bd}{da} \tag{1}$$

5. Odnos paralelnih otsečaka B C i D E jednak je odnosu odgovarajućih paralelnih otsečaka b c i d e.

Ovakav preobražaj trougla A B C u trougao a b c zove se afinoperspektivnim ili srodnim. Ovde kao perspektivni položaj dveju figura smatra se takav kada su prave, koje spajaju odgovarajuće tačke, međusobno paralelne.

Ako ravan α okrenemo oko prave x x (osovine srodnosti) tako da ova padne u ravan α_1, onda će trouglovi A B C i a b c biti u istoj ravni. Pri ovom, ako je ravan okrenuta u pravcu označenom strelicom (slika1), onda će trougao A B C zauzeti položaj $a_1\ b_1\ c_1$. Oba trougla A B C ($a_1\ b_1\ c_1$) i a b c, koji se posle okretanja nalaze u istoj ravni, imaju isto međusobno geometrijsko srodstvo, koje smo već konstatovali. Stvarno, prava L_0 B D A zauzeće položaj L_0 $b_1\ d_1\ a_1$ i pošto pri okretanju otsečci nisu se menjali onda je

$$DB = b_1\,d_1 \text{ i } DA = d_1\,a_1 \tag{2}$$

Postojeći odnos otsečaka pre okretanja

$$\frac{BD}{DA} = \frac{bd}{da} \qquad \text{(Vidi sl. 1)}$$

zamenjuje se sada na osnovu (2) odnosom

$$\frac{b_1 d_1}{d_1 a_1} = \frac{bd}{da}$$

što znači da svojstvo navedeno pod 4 ostaje na snazi i u odnosu na trouglove $a_1\ b_1\ c_1$ i a b c.

Iz nepromenljivosti otsečaka takođe proizlazi da su prave $d\,d_1$ i $a\,a_1$ međusobno paralelne.

Do okretanja prave b c i d e bile su projekcije pravih B C i D E. Posle okretanja, prave D E i B C zauzele su položaj pravih $d_1\ e_1$ i $b_1\ c_1$ koje su međusobno paralelne. Prema tome paralelnim pravama $d_1\ e_1$ i $b_1\ c_1$ odgovaraju takođe međusobno paralelne prave d e i b c. Odakle, očevidno proizlazi:

$$\frac{d_1 e_1}{b_1 c_1} = \frac{de}{bc}$$

Pošto je $e\,e_1 \,//\, c\,c_1$, to ćemo imati:

$$\frac{e\,e_0}{c\,c_0} = \frac{e_0 K_0}{c_0 K_0} \quad \text{i} \quad \frac{e_1 e_0}{c_1 c_0} = \frac{e_0 K_0}{c_0 K^0} \quad \text{odakle} \quad \frac{e\,e_0}{c\,c_0} = \frac{e_1 e_0}{c_1 c_0}$$

ili

$$\frac{e\,e_0}{e_1 e_0} = \frac{c\,c_0}{c_1 c_0}$$

Kao što se iz prednjeg odnosa vidi osovina srodnosti x x deli prave, koje spajaju srodne tačke, na otsečke u istom odnosu.

Na osnovu prednjeg možemo dobiti projekciju srodnih figura u istoj ravni ne služeći se paralelnim projektovanjem.

Primer: Zadana su tri para srodnih tački A i A_1; B i B_1; C i C_1 (slika 2); odrediti elemente srodnosti pri uslovu $A\,A_1 \,//\, B\,B_1 \,//\, C\,C_1$ (svojstvo perspektivno-afine srodnosti).

Ako produžimo prave B C i $B_1\ C_1$, one će se seći u tačci D; isto tako ako produžimo prave A B i $A_1\ B_1$, one će se seći u tački E. Treba dokazati da je prava koja spaja D i E osovina srodnosti. Ako produžimo pravu A C, ona će seći pravu A C, ona će seći pravu E D u nekoj drugoj tački F_1. Iz $\Delta E B B_0$ i $\Delta E A A_0$ imamo:

$$\frac{A A_0}{B B_0} = \frac{E A_0}{E B_0}$$

a iz $\Delta E B_1 B_0$ i $\Delta E A_1 A_0$ imamo:

$$\frac{A_1 A_0}{B_1 B_0} = \frac{E A_0}{E B_0}$$

odakle sledi:

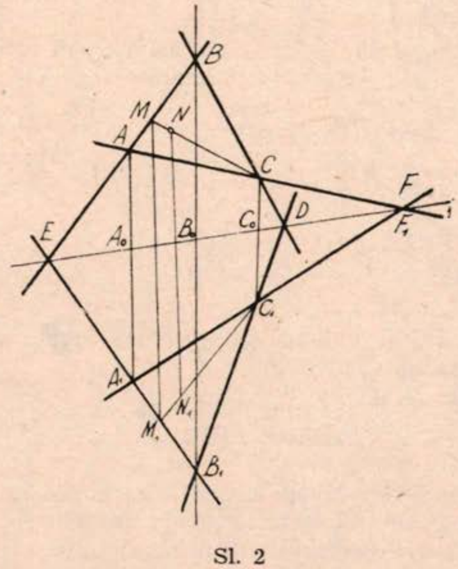
$$\frac{A A_0}{B B_0} = \frac{A_1 A_0}{B_1 B_0}$$

ili

$$\frac{B B_0}{B_1 B_0} = \frac{A A_0}{A_1 A_0}$$

Na isti način dobićemo $$\frac{B B_0}{B_1 B_0} = \frac{C C_0}{C_1 C_0} \qquad (2)$$ odakle

$$\frac{A A_0}{A_1 A_0} = \frac{C C_0}{C_1 C_0}$$

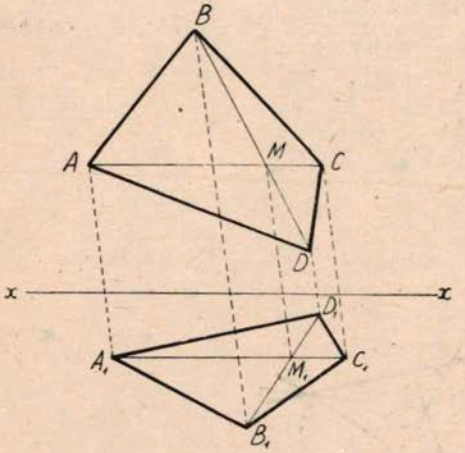


Sl. 2

Iz poslednjeg odnosa zaključujemo da linija $A_0 C_0$ deli otsečke prava koje spajaju srodne tačke A i A_1, C i C_1 (tačke treće linije) u istom odnosu pa je prema tome $A_0 C_0$ linija srodnosti.

Pošto tačke E i D leže na toj liniji, to je linija E D osovina srodnosti za tri strane srodnih trouglova te prema tome tačka F mora pasti u tačku F_1. Kada smo odredili osovinu srodnosti, onda lako možemo odrediti i ostale srodne tačke dveju srodnih figura (na primer, tačke N i N_1). U tu svrhu spajamo tačku N sa nekom tačkom koja je data (n. pr. C) i produžimo je do preseka M sa suprotnom stranom A B. Ako kroz tačku M povučemo paralelu sa pravom $B B_1$, dobićemo na pravoj $A_1 B_1$ tačku M_1, koja je srodna tački M; kad tačku M_1 spojimo sa C_1 pa iz tačke N povučemo paralelu sa pravom $B B_1$ dobićemo u preseku te paralele sa pravom $M_1 C_1$ tačku N_1 koja je srodna tački N. Ovo bi bio grafički način transformacije koordinata tačaka. Iz izloženog je jasno, da su trouglovi E B D i B E D (sl. 2) srodni ako uzmemo zajedničku stranu E D kao osovinu srodnosti a tačke B i B_1 kao međusobno srodne tačke.

Pretpostavimo, da imamo dva srodna četverougla A B C D i $A_1 B_1 C_1 D_1$ (sl. 3) i neka je tačka M presek diagonala u prvom četverouglu a tačka M_1 u drugom. Ove tačke M i M_1 su srodne tačke jer se nalaze na preseku srodnih linija. Iz uslova srodnosti A C i $A_1 C_1$ imamo:



Sl. 3

$$\frac{AM}{MC} = \frac{A_1 M_1}{M_1 C_1}$$

iz uslova pak srodnosti B D i $B_1 D_1$ imamo:

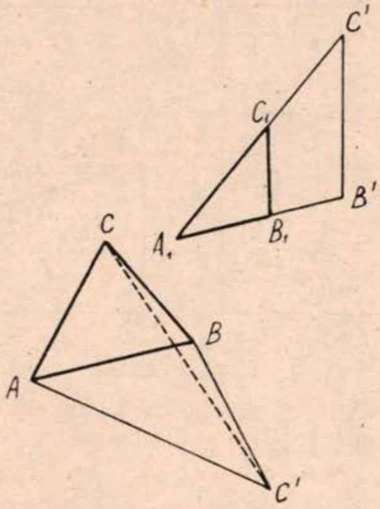
$$\frac{BM}{MD} = \frac{B_1 M_1}{M_1 D_1}$$

Iz prednjih srazmera se vidi da se dijagonale dvaju srodnih četvorougla dele u jednakim odnosima.

AFINE FIGURE

Do sada smo posmatrali perspektivne afine slike (perspektivni položaj, kada su linije koje spajaju srodne tačke dveju srodnih figura međusobno paralelne). Ako uzmemo dve perspektivno afine figure pa jednu od njih srazmerno umanjimo ili uvećamo, a sem toga joj promenimo položaj u odnosu druge ma kako bilo, onda perspektivnost dveju figura više ne postoji ali zato će se afinitet i dalje zadržati, t. j. vrednost razmere otsečaka jedne iste prave ostaće i dalje ista; takve dve figure nazivamo afine figure.

Uzmimo dva proizvoljna trougla ABC i $A_1 B_1 C_1$ (sl. 4) Trouglu $A_1 B_1 C_1$ obrazujemo sličan trougao $A_1 B' C'$ ali tako da strana $A_1 B' = AB$. Ako trougao $A_1 B' C'$ prislonimo po jednakoj strani $A_1 B'$ na trougao ABC dobićemo nov trougao ABC'. Ako sada stranu AB, zajedničku trouglima ABC i ABC', uzmemo kao osovinu srodnosti a tačke C i C' kao međusobno srodne tačke, onda ćemo dobiti dva srodna (perspektivno-afina) trougla ABC i



Sl. 4

ABC'. Celokupnim prethodnim postupkom uspeli smo da $\triangle ABC$ i $\triangle A_1 B_1 C_1$ učinimo afinim. Iz ovoga zaključujemo da gornjim postupkom možemo svaka dva trougla učiniti afinim.

AFINITET DVEJU RAVNIH POVRŠINA

Definicije.

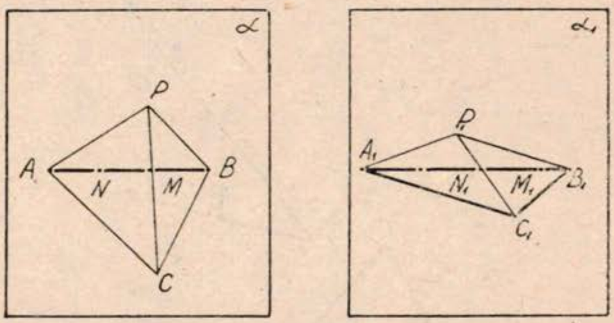
1. Transformacija jedne figure u drugu putem transformacije tačku po tačku jeste takav prelaz da svakoj tački jedne figure odgovara samo jedna — potpuno određena tačka druge figure.

2. Osobina figure da se, prilikom transformacije, ne menja po vrsti naziva se osobina nepromenljivosti — invarijantna.

3. Brojni odnosi, koji se odnose na jednu figuru a koji se ne menjaju prilikom transformacije, zovu se invarijante za datu transformaciju a za dati slučaj.

Postoji li među dvema ravnima α i α_1 takav slučaj da svakoj tački jedne ravni odgovara određena tačka na drugoj tako da kod druge ravni bude sačuvan odnos koji postoji kod prve, onda kažemo da su te dve ravni u afinom odnosu.

Neka su nam date dve ravni α i α_1 (slika 5). Uzmimo u ravni α jedan proizvoljni trougao A B C a u ravni α_1 proizvoljni trougao $A_1 B_1 C_1$. U ravni α uzmimo proizvoljnu tačku P. Koristeći princip afiniteta figura, nađimo u ravni α_1 tačku P_1 koja će biti srodna tački P. Ako spojimo tačku P sa tačkama A B C dobićemo četverougao P A C B, čije se dijagonale seku u tački M. Ranije smo utvrdili da su dva četvorougla afina, ako im se dijagonale seku u



Sl. 5

određenom odnosu. Iz prednjeg sleduje da, za određivanje tačka P_1, potrebno je na strani $A_1 B_1$ trougla $A_1 B_1 C_1$ odrediti tačku M_1 koja će zadovoljavati odnos.

$$\frac{A_1 M_1}{M_1 B_1} = \frac{A M}{M B}$$

Spojivši tačke C_1 i M_1 dobili smo pravu na čijem će se produženju nalaziti tačka P_1 a njen položaj određuje se iz odnosa

$$\frac{C_1 M_1}{M_1 P_1} = \frac{C M}{MP}$$

Ako sada tačku P_1 spojimo sa tačkama A_1 i B_1, dobićemo četvorougao P_1 A_1 C_1 B_1 koji je afini četverouglu P A C B a tačka P_1 je srodna tački P. Iz prednjeg postupka se vidi da je tačka P jedina tačka u ravni koja zadovoljava uslov afiniteta četvorouglova P A C B i P_1 A_1 C_1 B_1. Ako bi hteli na stranama A B i $A_1 B_1$ naći srodne tačke, dovoljno je na jednoj od tih strana uzeti jednu tačku (na primer N na strani A B) pa će se iz odnosa

$$\frac{A_1 N_1}{N_1 B_1} = \frac{A N}{N B}$$

odrediti i položaj srodne tačke na drugoj strani (tačka N_1 na strani $A_1 B_1$). Prednjim postupkom ustanovili smo afinitet među tačkama ravni α i α_1. Kao što se iz toga vidi, za ustanovljenje afiniteta dovoljno je imati tri određene tačke u jednoj ravni (koje ne leže na pravoj liniji) i odgovarajuće tri tačke (istog svojstva) u drugoj ravni.

FORMULE AFINE TRANSFORMACIJE U DEKARTOVOM KOORDINATNOM SISTEMU ZA SLUČAJ TROUGLOVA

Znamo da pri afinoj transformaciji triju tačaka $M_1\,M_3\,M_2$ koje se nalaze na jednoj pravoj mora da bude sačuvan odnos

$$\frac{M_1\,M_3}{M_3\,M_2} \tag{3}$$

(invarianta afine transformacije). Označimo sa y, x koordinate jedne tačke u jednom sistemu a sa y' x' koordinate te iste tačke u drugom sistemu. Sada ćemo dokazati da jednačine:

$$\begin{aligned} y' &= a_1\,y + b_1\,x + C_1 \\ x' &= a_2\,y + b_2\,x + C_2 \end{aligned} \tag{4}$$

pretstavljaju jednačine afine transformacije. Stvorimo afini odnos formuli (3) t. j.

$$\frac{M_1\,M_3}{M_3\,M_2} = \frac{M'_1\,M'_3}{M'_3\,M'_2} = \frac{y'_3 - y'_1}{y'_2 - y'_3} \tag{5}$$

Na osnovu formule (4) imamo

$$\frac{y'_3 - y'_1}{y'_2 - y'_3} = \frac{a_1\,(y_3 - y_1) + b_1\,(x_3 - x_1)}{a_1\,(y_2 - y_3) + b_1\,(x_2 - x_3)} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3} \times$$

$$\times \quad \frac{a_1 + b_1\,\dfrac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1}}{a_1 + b_1\,\dfrac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3}} \tag{6}$$

Pošto sve tri tačke leže na jednoj istoj pravoj to mora postojati odnos:

$$\frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1} = \frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3} \tag{7}$$

te se prema tome jednačina (6) pretvara u

$$\frac{y'_3 - y'_1}{y'_2 - y'_3} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3}$$

što znači da je kod transformacije pomoću formula (4) sačuvan odnos afiniteta.

Dokazali smo da su jednačine afine transformacije u Dekartovom koordinatnom sistemu:

$$\begin{aligned} y' &= a_1\,y + b_1\,x + c_1 \\ x' &= a_2\,y + b_2\,x + c_2 \end{aligned} \qquad (8($$

U ovim jednačinama imamo 6 koeficijenata koji karakterišu ovu afinu transformaciju. Videli smo da je za ustanovljenje afiniteta između ravni α i α_1 dovoljno imati i u jednoj i u drugoj ravni po 3 zadane odgovarajuće tačke koje ne leže na istoj pravoj. Uzmimo takve tri tačke radi određivanja vrednosti koeficijenata afinih transformacionih jednačina. Neka su to tačke $M_1\,(y_1\,x_1)$,

M_2 $(y_2\, x_2)$, M_3 $(y_3\, x_3)$ i njima odgovarajuće tačke u drugoj ravni M'_1 $(y'_1\, x'_1)$, M'_2 $(y'\, x'_2)$, M'_3 $(y'_3\, x'_3)$. Izvešćemo formule radi određivanja koeficijenta a_1, b_1 i a_2, b_2 y jednačinama (8). U tu svrhu napišimo trans. jednačine za tačke M_1, M_2, M^3 na osnovu (8):

$y'_1 = a_1 y_1 + b_1 x_1 + c_1 \quad \cdots \quad (9)$	$x'_1 = a_2 y_1 + b_2 x_1 + c_2 \quad \cdots \quad (12)$
$y'_2 = a_1 y_2 + b_1 x_2 + c_1 \quad \cdots \quad (10)$	$x'_2 = a_2 y_2 + b_2 x_2 + c_2 \quad \cdots \quad (13)$
$y'_3 = a_1 y_3 + b_1 x_3 + c_1 \quad \cdots \quad (11)$	$x'_3 = a_2 y_3 + b_2 x_3 + c_2 \quad \cdots \quad (14)$

oduzmimo jednačinu (10) od jednačine (9), i jednačinu (11) od (10) dobićemo:

$$y'_1 - y'_2 = a_1 (y_1 - y_2) + b_1 (x_1 - x_2) \tag{15}$$

$$y'_2 - y_3 = a_1 (y_2 - y_3) + b_1 (x_2 - x_3) \tag{16}$$

Jednačinu (15) množimo sa $(x_3 - x_3)$ a jednačinu (16) množimo sa $(x_1 - x_2)$ dobićemo:

$$(y'_1 - y'_2)(x_2 - x_3) = a_1 (y_1 - y_2)(x_2 - x_3) + b_1 (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) \quad .. \quad (17)$$

$$(y'_2 - y'_3)(x_1 - x_2) = a_1 (y_2 - y_3)(x_1 - x_2) + b_1 (x_2 - x_3)(x_1 - x_2) \quad .. \quad (18)$$

oduzmimo jednačinu (18) od jednačine (17), dobićemo

$$(x_2 - x_3)(y'_1 - y'_2) - (x_1 - x_2)(y'_2 - y'_3) = a_1 (y_1 - y_2)(x_2 - x_3) - \\ - a_1 (x_1 - x_2)(y_2 - y_3)$$

odakle

$$a_1 = \frac{(x_2 - x_3)\,(y'_1 - y'_2) - (x_1 - x_2)\,(y'_2 - y'_3)}{(x_2 - x_3)\,(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)\,(y_2 - y_3)} \tag{20}$$

istim postupkom dobićemo vrednost koeficijenta b_1:

$$b_1 = \frac{-(y_2 - y_3)\,(y'_1 - y'_2) + (y_1 - y_2)\,(y'_2 - y'_3)}{(y_2 - y_3)\,(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)\,(y_2 - y_3)} \tag{21}$$

Oduzmimo jednačinu (13) od jednačine (12) i jednačinu (14) od (13) dobićemo:

$$x'_1 - x'_2 = a_2 (y_1 - y_2) + b_2 (x_1 - x_2) \tag{22}$$

$$x'_2 - x'_3 = a_2 (y_2 - y_3) + b_3 (x_2 - x_3) \tag{23}$$

jednačinu (22) množimo sa $(x_2 - x_3)$, jednačinu (23) množimo sa $(x_1 - x_2$ dobićemo:

$$(x'_1 - x'_2)(x_2 - x_3) = a_2 (y_1 - y_2)\;(x_1 - x_2) + b_2 (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) \quad \cdots \quad (24)$$

$$(x'_2 - x'_3)(x_1 - x_2) = a_2 (y_2 - y_3)\;(x_1 - x_2) + b_2 (x_2 - x_3)(x_1 - x_2) \quad \cdots \quad (25)$$

oduzmimo jednačinu (25) od jednačine (24), dobićemo:

$$(x'_1 - x'_2)(x_2 - x_3) - (x'_2 - x'_3)(x_1 - x_2) \\ = a_2 (y_1 - y_2)(x_2 - x_3) - a_2 (y_2 - y_3)(x_1 - x_2)$$

odakle

$$a_2 = \frac{(x_2 - x_3)\,(x'_1 - x'_2) - (x_1 - x_2)\,(x'_2 - x'_3)}{(x_2 - x_3)\,(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)\,(y_2 - y_3)} \tag{26}$$

istim postupkom dobićemo vrednost koeficijenata b_2

$$b_2 = \frac{-(y_2 - y_3)(x'_1 - x'_2) - (y_1 - y_2)(x'_2 - x'_3)}{(x_2 - x_3)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y_2 - y_3)} \qquad (27)$$

U jednačinama (20), (21), (26) i (27) koje određuju koeficijente a_1, b_1, a_2 i b_2 imenitelj je isti a ne može biti jednak nuli jer smo postavili uslov da se tri tačke ne nalaze na jednoj istoj pravi, što znači da su vrednosti koeficijenata a_1, b_1, a_2 i b_2 realne. Kada sada nađene vrednosti za a_1, b_1, a_2 i b_2 zamenimo u jednačine (8) dobićemo vrednosti za C_1 i C_2

$$c_1 = y'_1 - a_1 y_1 - b_1 x_1 = y'_2 - a_1 y_2 - b_1 x_2 = y'_3 - a_1 y_3 - b_1 x_3 \quad . \; . \quad (28)$$

$$\begin{aligned} c_2 &= x'_1 - a_2 y_1 - b_2 x_1 = x'_2 - a_2 y_2 - b_2 x_2 = \\ &= x'_3 - a_2 y_3 - b_2 x_3 - b_2 x_3 \end{aligned} \quad . \; . \quad (29)$$

Iz jednačina (28) i (29) vidi se da dobijamo 3 puta iste vrednosti za C_1 i C_2, jer smo ih odredili iz tri tačke. Praktično dozvoljeno je da se ove vrednosti međusobno razlikuju najviše za jedinicu tačnosti računanja (ova razlika proizlazi usled zaokrugljivanja brojeva prilikom računanja). Računanje koeficijenata C_1 i C_2 služi nam između ostalog kao kontrola računanja koeficijenata a_1, b_1, a_2 i b_2, jer ako se sve vrednosti za C_1 i C_2 međusobno ne slažu, to znači da smo i koeficijente a_1, b_1, a_2 i b_2 pogrešno sračunali.

U opštem obliku transformacione jednačine (8) iz jednog sistema u drugi za tačku M (y , x) glase:

$$y'_i = a_1 y_i + b_1 x_i + c_1 \qquad (30)$$

$$x'_i = a_2 y_i + b_2 x_i + c_2 \qquad (31)$$

Važno je naglasiti da, pri ovom načinu transformacije, nije potrebno izraziti koordinate tačaka u jednoj istoj jedinici mere (npr. ili sve u metrima ili sve u hvatima), jer su izrazi za koeficijente količnici te bi se faktori pretvaranja skratili, što znači da možemo direktno, bez ikakvog pretvaranja, vršiti transformaciju koordinata bilo u jednom bilo u drugom sistemu mera.

Da bi smo izbegli računanje sa velikim brojevima, izvršićemo neke izmene naših osnovnih formula (30) i (31). U tu svrhu uzećemo pomoćnu tačku (M_0 (y_0, x_0) čije će koordinate y_0 i x_0 biti najmanje između koordinata datih tačaka a sem toga zaokružene na jednu hiljadu vrednosti koordinata u prvom sistemu. Na primer $y_0 = -43\,000{,}00$ i $x_0 = +85\,000{,}00$. Onda će transformirane koordinate tačke M_0 u drugom sistemu biti:

$$y'_0 = a_1 y_0 + b_1 x_0 + c_1 \quad . \; . \; . \quad (32)$$

$$x'_0 = a_2 y_0 + b_2 x_0 + c_2 \quad . \; . \; . \quad (33)$$

odbijajući jednačinu (32) od (30) i (33) od (31) dobićemo:

$$y'_i - y'_0 = a_1 (y_i - y_0) + b_1 (x_i - x_0) \quad \text{odnosno} \qquad (34)$$

$$y'_0 = y'_i - a_1 (y_i - x_0) - b_1 (x_i - x_0) \qquad (36)$$

$$x'_i - x'_0 = a_2 (y_i - y_0) + b_2 (x_i - x_0) \quad \text{odnosno} \qquad (35)$$

$$x'_0 = x'_i - a_2 (x_i = y_0) - b_2 (x_i - x_0) \qquad (37)$$

Po formulama (36) i (37) mi možemo tri puta dobiti vrednosti y'_0, x'_0 t. j. iz tačaka M_1 (y_1, x_1), M_2 (y_2, x_2) i M_3 (y_3, x_3), na ime:

$$\begin{aligned} y'_0 &= y'_1 - a_1 (y_1 - y_0) - b_1 (x_1 - x_0) = y'_2 - a_1 (y_2 - y_0) - \\ &- b_1 (x_2 - x_0) = y'_3 - a_1 (y_3 - y_0) - b_1 (x_3 - x_0) \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} x'_0 &= x'_1 - a_2 (y_1 - y_0) - b_2 (x_1 - x_0) = x'_2 - a_2 (y_2 - y_0) - \\ &- b_2 (x_2 - x_0) = x'_3 - a_2 (y_3 - y_0) - b_2 (x_3 - x_0) \end{aligned} \tag{36}$$

Kao što je dobijanje triju vrednosti za koeficijente C_1 i C_2 služilo kao kontrola računanja koeficijenata a_1, b_1, a_2 i b_2 isto tako i dobijanje triju vrednosti za y'_0 i x'_0 služi kao kontrola za računanje koeficijenata a_1, b_1, a_2 i b_2 u slučaju kada se uzima pomoćna tačka M'_0. Kad smo odrediti koordinate y'_0 i x'_0 možemo iz formula (34) i (35) dobiti definitivni oblik transform. jednačina za slučaj kada uzimamo pomoćnu tačku M_0 t. j.

$$\begin{aligned} y'_i &= y'_0 + a_1 (y_i - y_0) + b_1 (x_i - x_0) \\ x'_i &= x'_0 + a_2 (x_i - x_0) + b_2 (x_i - x^0) \end{aligned} \tag{40}$$

Takvim postupkom u mnogome smo skratili samo računanje jer umesto proizvoda a_1 y_i, b_1 x_i itd. imamo proizvode $a_1 (y_i - y_0)$, $b_1 (x_i - x_0)$ itd., a kao što se odmah vidi vrednosti $y_i - y_0$, $x_i - x_0$ su uvek male jer smo tako izabrali pomoćnu tačku M_0.

Već smo naglasili da jednačine (20), (21), (26) i (27) imaju jednake imenitelje. Da bismo uprostili ove formule, označićemo imenitelj sa $2P_0$. Ako analiziramo ovaj imenitelj, videćemo da on pretstavlja duplu površinu trougla čija su temena date tri tačke u prvom sistemu. Znači imaćemo:

$$\begin{aligned} 2P_0 &= (x_2 - x_3) (y_1 - y_2) - (x_1 - x_2) (y_2 - y_3) = \\ &= x_2 y_1 - x_2 y_2 - x_3 (y_1 - y_2) - x_1 (y_2 - y_3) + x_2 y_2 - x_2 y_3 = \\ &= y_1 (x_2 - x_3) + y_2 (x_3 - x_1) + y_3 (x_1 - x_2) \end{aligned} \tag{41}$$

Ako posmatramo brojitelje jednačina (20), (21), (26) i (27) videćemo da, posle jedne male njihove transformacije i oni u neku ruku pretstavljaju duplu površinu trouglova, koordinate temena kojih imaju apscise iz sistema koji se transformnše, a ordinate iz sestema u koji se transformiše ili obratno, te prema tome ako stavimo:

$$\begin{aligned} 2p_1 &= x_1 (y'_3 - y'_2) + x_2 (y'_1 - y'_3) + x_3 (y'_2 - y'_1) = \\ &- [x_1 (y'_2 - y'_3) + x_2 (y'_3 - y'_1) + x_3 (y'_1 - y'_2)] \end{aligned} \tag{42}$$

$$2p_2 = y_1 (y'_2 - y'_3) + y_2 (y'_3 - y'_1) + y_3 (y'_1 - y'_2) \tag{43}$$

$$2p_3 = - [x_1 (x'_2 - x_3') + x_2 (x'_3 - x'_1) + x_3 (x'_1 - x'_2)] \tag{44}$$

$$2p_4 = y_1 (x'_2 - x'_3) + y_2 (x'_3 - x'_1) + y_3 (x'_1 - x'_2) \tag{45}$$

dobićemo za vrednost koeficijenata a_1 b_1, a_2 i b_2 formule

$$a_1 = \frac{2\,p_1}{2\,p_0} \tag{46}$$

$$b_1 = \frac{2\,p_2}{2\,p_0} \tag{47}$$

$$a_2 = \frac{2\,p_3}{2\,p_0} \tag{48}$$

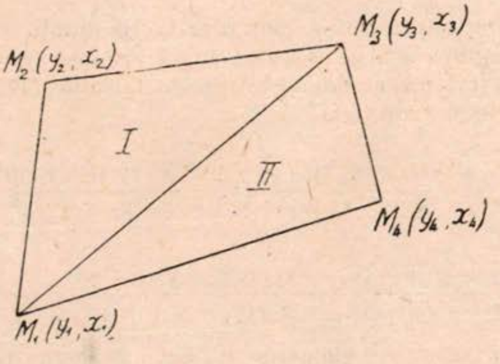
$$b_2 = \frac{2\,p_4}{2\,p_0} \tag{49}$$

Kod ovakvog načina računanja najbolje je upotrebiti metod Elinga. Kod računanja koeficijenata a_1, b_1 a_2 i b_2 potrebno je obratiti pažnju na njihove znake. Pri prelazu iz jednog sistema u drugi ovi su znaci stalni. Tako na primer pri prelazu iz stereografske projekcije u Gaus-Krigerovu znaci za koeficijente a_1, b_1 i b_2 su —, u a_2 ima znak +.

U početku računanja transformacije koordinata iz jednog sistema u drugi najbolje je odrediti znake za koeficijente a_1, b_1, a_2 b_2 po formulama (20), (21), (26) i (27) pa ih posle prenositi na ostale slučajeve.

ELEMENTI AFINITETA ZA SLUČAJ ČETVOROUGLA

Kad odredimo afinitete dveju ravni α i α_1 iz jedne figure (na primer M_1 M_2 M_3) moramo teoriski dobiti iste elemente afiniteta, kao da smo iste određivali i za susedne figure (na primer M_1 M_3 M_4) pod uslovom da se ove dve



Sl. 6

figure nalaze u istoj ravni. Međutim ovako određeni elementi u praksi ne zadovoljavaju, — ne slažu se međusobno, jer dve susedne figure ne leže u istoj ravni (ako su prostorno velike) pošto se nalaze na zemljinoj površini, koja se usled totalne zakrivljenosti ne može nikad razviti u ravnu figuru. Iz ovog zaključujemo da za određivanje elemenata afiniteta a_1, b_1, a_2 i b_2 možemo uzimati samo tačke sa maksimalnom udaljenošću od 5 km, granica do koje se može smatrati da je dužina luka ravna tetivi s obzirom na grafičku tačnost.

Zato, kad god određujemo elemente a_1, b_1, a_2 i b_2 iz dva susedna trougla, mi nećemo uzimati kao krajnju vrednost prostu aritmetičku sredinu, već opštu, uzimajući kao težine površine trouglova, koje se nalaze u ravni α. Ovakav način rada praktično se primenjuje naime u cilju ubrzanja rada, umesto trougla računaju elemente za četvorougao a neki put i petougao, kada je to s obzirom na tačnost moguće.

Odredimo sada elemente afiniteta za slučaj četvrorougla. Treba odmah naglasiti da je ovim slučajem obuhvaćen i slučaj trougla, jer možemo tada pretpostaviti da nam se dva temena četvorougla poklapaju.

Označimo sa $a_1{}^{I}$ $a_2{}^{I}$ $b_1{}^{I}$ i $b_2{}^{I}$ elemente afiniteta iz I trougla (M_1 M_2 M_3 (sl. 6) a sa $a_1{}^{II}$, $a_2{}^{II}$, $b_1{}^{II}$, i $b_2{}^{II}$ elemente II trougla (M_1 M_3 M_4) i sa a_1, a_2, b_1, b_2 elemente četvorougla (M_1 M_2 M_3 M_4).

Vrednost za a_1 dobijamo kao opštu aritmetičku sredinu iz elemenata $a_1{}^{I}$ i $a_2{}^{II}$ uzevši za težine duple površine odgovarajućih trouglova, na ime:

$$a_1 = \frac{a_1{}^{I}\cdot 2P_0{}^{I} + a_1{}^{II}\cdot 2P_0{}^{II}}{2P_0{}^{I} + 2P_0{}^{II}} = \frac{\frac{2P_1{}^{I}}{2P_0{}^{I}}\cdot 2P_0{}^{I} + \frac{2P_1{}^{II}}{2P_0{}^{II}}\cdot 2P_0{}^{II}}{2P_0{}^{I} + 2P_0{}^{II}} = \frac{2P_1{}^{I} + 2P_1{}^{II}}{2P_0{}^{I} + 2P_0{}^{II}} \qquad (50)$$

Analogno dobijamo vrednosti i za a_2, b_1 i b_2.

Imenitelj u (50) pretstavlja duplu površinu trouglova I i II, a to je dupla površina četverougla M_1 M_2 M_3 M_4, koja je kako je poznato jednaka:

$$\begin{aligned} 2P_0 &= x_1(y_1 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_4) + x_4(y_3 - y_1) = \\ &= (x_2 - x_4)(y_1 - x_3) - (x_1 - x_3)(y_2 - y_4) \quad . \; . \; . \quad (51 \end{aligned}$$

Tako isto i brojitelj formule (50) pretstavlja duplu vrednost »površina« odvovarajućih trouglova a to je u stvari dupla vrdnost »površine« četverougla, i možemo napisati (pišemo analogno brojitelju formule (20).

Dakle, za slučaj četvorougla:

$$a_1 = \frac{2P_1}{2P_0} = \frac{x_1(y'_4 - y'_2) + x_2(y'_3 - y'_1) + x_3(y'_2 - y'_4) + x_4(y'_3 - y'_1)}{x_1(y_4 - y_2) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_2 - y_4) + x_4(y_3 - y_1)} \qquad (53)$$

$$= \frac{(x_2 - x_4)(y'_1 - y'_3) - (x_1 - x_3)(y'_2 - y'_4)}{(x_2 - x_4)(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)(y_2 - y_4)} \qquad (53a)$$

Isto tako dobijamo za ostale elemente (pišemo analogno (21), (26) i (27).

$$b_1 = \frac{2P_2}{2P_0} = \frac{-[y_1(y_4' - y'_2) + y_2(y'_1 - y'_3) + y_3(y'_2 - y'_4) + y_4(y'_3 - y'_1)]}{2P_0} \qquad (54)$$

$$= \frac{(y_1 - y_3)(y'_2 - y'_4) - (y_2 - y_4)(y'_1 - y'_3)}{2P_0} \qquad (54a)$$

$$a_2 = \frac{2P_3}{2P_0} = \frac{x_1(x'_4 - x'_2) + x_2(x'_1 - x'_3) + x_3(x'_2 - x'_4) + x_4(x'_3 - x'_1)}{2P_0} \qquad (55)$$

$$= \frac{(x_2 - x_4)(x'_1 - x'_3) - (x_1 - x_3)(x'_2 - x'_4)}{2P_0} \qquad (55a)$$

$$b_2 = \frac{2P_4}{2P_0} = \frac{-[y_1(x'_4 - x'_2) + y_3(x'_1 - x'_3) + y_3(x'_2 - x'_4) + y_4(x'_3 - x'_1)}{2P_0} \qquad (56)$$

$$= \frac{(y_1 - y_3)(x'_2 - x'_4) - (y_2 - y_4)(x'_1 - x'_3)}{2P_0} \qquad (56a)$$

Dobili smo na taj način elemente (koeficijente) afiniteta dveju ravni sračunatih pomoću koordinata temena četvoro-ugla. Isto tako možemo dobiti opšte formule za računanje elemenata afiniteta iz koordinata temena mnogougaonika sa n strana, t. j.

$$a_1 = \frac{\Sigma x_n (y'_{n-1} - y'_{n+1})}{\Sigma x_n (y_{n-1} - y_{n+1})} \quad (57) \qquad b_1 = \frac{-[\Sigma y_n (x'_{n-1} - x'_{n+1})]}{\Sigma x_n (y_{n-1} - y_{n+1})} \quad (58)$$

$$a_2 = \frac{\Sigma x_n (x'_{n-1} - x'_{n+1})}{\Sigma x_n (x_{n-1} - y_{n+1})} \quad (59) \qquad b_2 = \frac{-[\Sigma y_n (x'_{n-1} - x'_{n+1})]}{\Sigma x_n (y_{n-1} - y_{n+1})} \quad (60)$$

No praksa je pokazala da je, s obzirom na brzinu rada, najracionalniji način računanja elemenata afiniteta pomoću četvorougla. Isto tako iz praktičnih razloga primenjujemo formule (53a), (54a) (55a) i (56a), a ne (53) — (56) koje su namenjene za računanje metodom Elinga.

Glavna geodetska uprava je štampala trig. obrazac 32a za računanje koeficijenata a_1, a_2, b_1 i b_2 i za transformaciju koordinata y_0 i x_0 pomoću dobivenih elemenata te, za rad po ovom obrascu, daje se sledeće objašnjenje (Vidi primer br. 1).

Formular je namenjen za računanje mašinskim putem.

Uzet je primer transformacije koordinata iz stereografske projekcije u Gaus-Krigerovu. Određeni su a_1, b_1, a_2 i b_2 pomoću četvorougla. U stupcu 4 »Skica« ucrtavamo skicu položaza tačaka. U stupcu 2 i 3 upisujemo koordinate datih tačaka (u onoj projekciji iz koje će se transformacijom prevesti u drugu projekciju). U našem slučaju to je stereografska projekcija. Da bismo sačuvali uvek iste znake za a_1, b_1, a_2 i b_2 ispisujemo tačke onim redom koji odgovara kretanju kazaljke na satu. Kako smo već napomenuli u tom slučaju a_1, b_1, i b_2 imaju negativan, a u a_2 pozitivan znak. Stereografske koordinate izražene u hvatima, upisujemo direktno bez pretvaranja u metre (o tome je bilo reči). U stupce 5 i 6 upisujemo koordinate datih tačaka u projekciji u koju treba transformacijom preračunavati koordinate (u našem slučaju u Gaus-Kriger-ovoj projekciji. Dalje se obrazuju razlike: $y_1 - y_3$ i $(y_2 - y_4)$ i t. d.

Pomoću mašine za računanje sastavljamo proizvode $(x_2 - x_4)$ $(y_1 - y_3)$ i t. d. Računamo sa tačnošću na 1 m. Treba primetiti da se razlika $(x_2 - x_4)$ kao činilac pojavljuje 3 puta; isto — $(x^1 - x_3)$ dok se — $(y_2 - y_4)$ i $(y_1 - y_3)$ pojavljuju po dva puta. Kod sastavljanja proizvoda važno je staviti pravilno

Прилог бр.1

GLAVNA GEODETSKA UPRAVA
PRI VLADI FNRJ

Trigonom. obrazac br. 32a — Str. ....

Transformacija koordinata

Računanje koeficijenata a_1, a_2, b_1 i b_2

$$a_1 = \frac{2p_1}{2p_0};\ b_1 = \frac{2p_3}{2p_0};\ a_2 = \frac{2p_2}{2p_0};\ b_2 = \frac{2p_4}{2p_0}$$

$$2p_1 = (x_2 - x_4)(y_1' - y_3') - (x_1 - x_3)(y_2' - y_4')$$

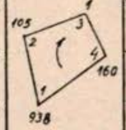
$$2p_2 = (x_2 - x_4)(x_1' - x_3') - (x_1 - x_3)(x_2' - x_4')$$

$$2p_0 = (x_2 - x_4)(y_1 - y_3) - (x_1 - x_3)(y_2 - y_4)$$

$$2p_3 = (y_1 - y_3)(y_2' - y_4') - (y_2 - y_4)(y_1' - y_3')$$

$$2p_4 = (y_1 - y_3)(x_2' - x_4') - (y_2 - y_4)(x_1' - x_3')$$

Sistem: Стереографски | Sistem: Гаус-Кригеров 7 зона

Koordinate su uzete:	±	Y_1 Y_2 Y_3 Y_4	Devet. ostatak	±	X_1 X_2 X_3 X_4	Devet. ostatak	Skica	±	Y_1' Y_2' Y_3' Y_4'	Devet. ostatak	±	X_1' X_2' X_3' X_4'	Devet. ostatak	Tačka T_n
1		2			3		4		5			6		7
	−	44 681 82	6	+	90 607 87	1		+	33 743 63	2	+	88 309 35	0	938 Чока
	−	43 222 81	4	+	88 322 43	3		+	31 084 88	5	+	92 709 20	2	105 Сатог
	−	46 816 77	3	+	85 921 83	0		+	38 009 14	7	+	97 091 46	0	1/(346)
	−	47 922 00	6	+	88 171 84	1		+	39 998 66	5	+	92 775 33	0	160/36
$Y_1 - Y_3$	+	2 134 95	6	+	4 686 04	1	$x_1 - x_3$ / $Y_1' - Y_3'$	−	4 265 51	5	−	8 782 11	0	$x_1' - x_3'$ Четвороугао
$Y_2 - Y_4$	+	4 699 19	2	+	150 59	2	$x_2 - x_4$ / $Y_2' - Y_4'$	−	8 913 78	0	−	66 13	7	$x_2' - x_4'$ 78

$(x_2 - x_4)(Y_1 - Y_3)$ $-(x_1 - x_3)(Y_2 - Y_4)$		$(x_2 - x_4)(Y_1' - Y_3')$ $-(x_1 - x_3)(Y_2' - Y_4')$		$(x_2 - x_4)(x_1' - x_3')$ $-(x_1 - x_3)(x_2' - x_4')$		$-(Y_2 - Y_4)(Y_1' - Y_3')$ $+(Y_1 - Y_3)(Y_2' - Y_4')$		$-(Y_2 - Y_4)(x_1' - x_3')$ $+(Y_1 - Y_3)(x_2' - x_4')$	
	±		±		±		±		±
	+ 321 502		− 642 343		− 1 322 498		+ 20 044 442		+ 41 268 803
	− 22 020 592		+ 41 770 330		+ 309 888		− 19 030 475		− 141 184
$2p_0$	− 21 699 090	$2p_1$	+ 41 127 987	$2p_2$	− 1 012 640	$2p_3$	+ 1 013 967	$2p_4$	+ 41 127 619
		a_1	− 1,89537 84	a_2	+ 0,04666 60	b_1	− 0,04672 85	b_2	− 1,89536 14

Računanje y_0' i x_0': $y_0' = y_n' - a_1(y_n - y_0) - b_1(x_n - x_0)$; $x_0' = x_n' - a_2(y_n - y_0) - b_2(x_n - x_0)$

y_0	±		±		x_0	y_0'	±		±		x_0'
y_0	−	43 000 00	+	85 000 00	x_0	y_0'	+	30 817 91	+	99 016 79	x_0'
		$-a_1(y_n - y_0)$ $-b_1(x_n - x_0)$						$-a_2(y_n - y_0)$ $-b_2(x_n - x_0)$			
1. −8	−	3 187 685	−	7 234 223	3. −8	1. +2	+	78 483	+	178 115	3. +1
	+	262 049	+	43 074			+	10 628 940	+	1 747 201	
$(y_0')_1$		30 817 994		30 817 991	$(y_0')_3$	$(x_0')_1$		99 016 773		99 016 776	$(x_0')_3$
2. +9	−	422 309	−	9 329 052	4. +9	2 −1	+	10 397	+	229 690	4. −1
	+	155 251	+	148 213			+	6 297 206	+	6 011 783	
$(y_0')_2$		30 817 822		30 817 821	$(y_0')_4$	$(x_0')_2$		99 016 803		99 016 803	$(x_0')_4$

Štampa „Geokarta" — Naloc 374/49.

znake. Posle toga računamo $2P_0$. 2p, itd. Ovde $2p_1$ i $2p_4$ moraju se slagati po znaku (+) i po vrednosti do 2 jedinice na 4 mestu (za redovne slučajeve vrednosti koord. razlika), a $2p_3$ i $2p_2$ su suprotnog znaka (—, +) i po vrednosti moraju se slagati za 4 jedinice na 4 mestu. Nije li to slučaj, treba tražiti grešku. Dobijeni koeficijenti a_1 i b_2 imaju isti znak i moraju da se slažu po vrednosti do 2 jedinice trećeg mesta, a a_2 i b_1 su suprotnog znaka (+ i —) i moraju da se slažu do 2 jedinice 4 mesta.

Pošto smo dobili vrednosti a_1, b_1, a_2 i b_2 pristupamo računanju y'_0 i x'_0 transformacija koordinata (y_0 i x_0). Najpre biramo vrednost x_0 (kako smo već napomenuli ona je najbliža najmanja vrednost, zaokrugljena na 1000, od datih vrednosti y. (U primeru je y_0 = — 43 000,00, a isto tako x_0 = + 85 000.00. Zatim obrazujemo razliku $y_n - y_0$; za tačku 1 to je $y_1 - y_0$ = — 44,681,82 — (— 430.00) = — 1681,82 i ovu razliku množimo sa — a_1, pa ćemo dobiti proizvod — a_1 $(y_1 - y_0)$ = — 3187,685 (uzimamo vrednost na mm). Isto tako za tačku 2, $y_2 - y_0$ = — 43 222,81 — (— 43 000) = — 222,81 i opet razliku množimo sa — a_1.

Dakle, praktično govoreći, u mašinu stavimo vrednost a_1 = 1,89 537 84 i pomnožimo sa y_1 — 43 000, y_2 — 43 000. y_3 — 43 000 i y_4 — 43 000. Isto tako računamo vrednosti — b_1 (xn — x_0): na primer za

tačku 1 : $x_1 - x_0$ = + 90607,87 — 85000 — + 5 607,87
tačku 2 : $x_2 - x_0$ = + 88322.43 — 85 000 = + 3 322,43

t. j. stavimo u mašinu vrednost b_1 = 0,04 672 85 i nju množimo sa

x_1 — 85 000 = + 5607,87	dobićemo	+ 262,049
x_2 — 85 000 = + 3322.42	»	+ 155,251
x_3 — 85 000 = + 921,83	»	+ 43,074
x_4 — 85 000 = + 3171,84	»	+ 148,213

Zatim računamo $(y'_0)_1$ i $(y'_0)_3$ i oni moraju međusobno da se slažu do 4 mm.

Isto tako i $(y'_0)_2$ i $(y'_0)_4$ moraju da se slažu međusobno do 4 mm. Ovo slaganje pokazuje nam samo to da je računanje dobro.

Međutim smanjivanje vrednosti $(y'_0)_1$ i $(y'_0)_2$ ili što je jedno isto $(y'_0)_3$ i i $(y'_0)_4$, pokazuje nam stepen približavanja identitetu datih tačaka u jednoj i drugoj projekciji. U našem slučaju imamo $(y'_0)_1 - (y'_0)_2$ = 0,17 m.

Za dalje računanje uzimamo y'_0 kao sredinu iz sve 4 vrednosti i zaokrugljujemo je na cm. Za nas slučaj imamo:

y'_0 = 30 817,91, zatim obrazujemo razlike $y'_0 - (y'_0)_1$ = — 8 cm
$y'_0 - (y'_0)_2$ = + 9 cm
Kontrola + 1 cm

da je sredina y'_0 izračunata dobro.

Za rad na transformaciji koordinata iz stereografske u Gaus-Kriger-ovu dopuštamo razliku $y'_0 - (y'_0)_n$ = ± 10 cm. Ovo nam omogućava da uzimamo strane četvorougaonika do 12 km., a gde nema identičnih tečaka i veće.

Ovde treba obratiti pažnju na jednu važnu prednost određivanja koeficijenata pomoću četvorougla. Ako bi, uzimajući strane četvorougla do 10 km., naišli na slučaj da je razlika $y'_0 - (y'_0)_n$ > 10 cm onda nam to pokazuje da identičnost datih tačaka četvorougla u jednoj i u drugoj projekciji nije najbolja, t. j. mi u tome imamo kriterium za naš rad, i to već u početku rada i ne transformišući ostale tačke.

Međutim ako računamo koeficijente a_1, b_1, a_2 i b_2 pomoću trougla, onda (a što smo već naglasili), kod pravilnog računanja imamo $(y'_0)_1 = (y'_0)_2 = (y'_0)_3$ t. j. naše računanje će se idealno složiti uvek, a mi ipak neznamo da li su date tačke trougla u jednoj i drugoj projekciji identične. Dakle može biti posredi gruba greška a mi je ne vidimo. Sve što je rečeno za računanje veličine y'_0 važi i za računanje x'_0. U našem slučaju je $x'_0 — (x'_0) = \pm 2$ cm.

Još jedanput treba skrenuti pažnju na to da za računanje koeficijenata pomoću trougla nije potreban naročiti formular nego opet koristimo trigonometriski obrazac 32a i primenjujemo opet formule (53a), (54a), (55a) i (56a), samo što u skici obeležavamo jedno teme trougla kao da su u njemu dve tačke i kod upisivanja koordinata tačaka činimo to isto, t. j. upisujemo dva puta jedne iste koordinate. To je u našem primeru sl. 7 slučaj sa tačkama 2 i 3 koje su sjedinjene u jednu istu tačku, jedno teme trougla.

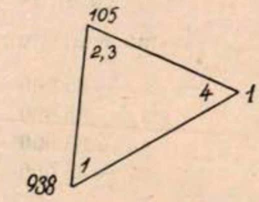
Na taj način otpada štampanje formulara za računanje koeficijenata a_1, b_1, a_2 i b_2 pomoću trougla po formulama (20), (21), (26) i (27).

Transformaciju koordinata pomoću koeficijenata a_1, b_1, a_2 i b_2 i y'_0, x'_0 izračunatih u trig. obr. 32a — vršimo u trig. obr. 24b (Vidi primer br. 2).

Računanje se vrši pomoću formula (40):

$$y'_n = y'_0 + a_1 (y_n — y_0) + b_1 (x_n — x_0)$$

$$x'_n = x'_0 + a_2 (y_n — y_0) + b_2 (x_n — x_0)$$



Сл. 7

Iz trigonometrijskog obrasca 32a upisujemo u trig. obr. 24b u odgovarajuće stupce: $a_1 = — 1{,}895\,3785$; $b_1 = — 0{,}046\,7285$; $a_2 = + 0{,}046\,6660$, $b_2 = — = — 1{,}895\,3614$, $y_0 = — 43\,000$, $x_0 = + 85\,000$; $y'_0 = + 30\,817{,}91$, $x'_0 = = 99\,016{,}80$ i koordinate u Gaus-Kriger-ovoj projekciji jedne od datih tačaka na primer, Sanad:

$y'_2 = + 31084{,}88$, $x'_2 = + 92\,709{,}20$ a ispod njih upisujemo + 9 i — 1 t. j. odgovarajuća otstupanja $y'_0 — (y'_0)_2$ i $x'_0 — (x'_0)_2$. Dalje upisujemo koordinate u stereogr. projekciji Sanada i tačaka koje treba transformisati. Zatim, prethodno radi kontrole, transformišemo samo koordinate tačke Sanad. Zato najpre obrazujemo razliku $y_{san} — y_0 = — 43\,222{,}81 — (— 43\,000) = — 222{,}81$ i nju množimo sa a_1 i a_2.

Rezultate $a_1 (y_{Sanad} — y_0) = + 422{,}31$ i $a_2 (y_{Sanad} — y_0) = — 10{,}40$ upisujemo u odgovarajuće stupce.

Isto tako obrazujemo razliku $x_{Sanad} — x_0 = + 88322{,}43 — 85\,000 = + = + 3322{,}43$ i množimo je sa b_1 i sa b_2. Proizvode $b_1 (x_{Sanad} — x_0) = — = — 155{,}25$ i $b_2 (x_{Sanad} — x_0) = — 6297{,}21$ upisujemo u odnosni stubac.

Dalje računamo $y'_{Sanad} = y'_0 + a_1 (y_{Sanad} — y_0) + b_1 (x_{Sanad} — x_0) = = + 30\,817{,}91 + 422{,}31 — 155{,}25 = + 31\,084{,}97$ u $x'_{Sanad} = x'_0 + a_2$

$(y_{Sanad} - y_0) + b_2 (x_{Sanad} - x_0 = + 99\,016{,}80 - 10{,}40 - 6297{,}21 = +$ $+ 92\,709{,}19$. Ako saberemo (algebarski) vrednosti + 31 084,88 + 0,09 koje smo pre uneli u trig. obraz., dobićemo + 31 084,97 t. j. vrednost y'_{Sanad} koju smo dobili transformacijom. Isto tako + 92 709,20 — 1 = + 92 709,20 = x'_{Sanad} Ovo nam je kontrola da su podaci a_1, a_2, b_1, b_2 y_0, y'_0 i x'_0 uvedeni dobro. Tek nakon ove kontrole smemo vršiti transformaciju koordinata ostalih tačaka u masi. Ako raspolažemo duplom mašinom, to stavljamo u mašinu vrednosti a_1 i a_2 i množimo ih sa razlikama $(y - y_0)$. Dobijamo jednovremeno dva proizvoda $a_1 (y_n - y_0)$ i $a_2 (y_n - y_0)$. Isto tako stavimo u mašinu vrednosti b_1 i b_2 i množimo ih razlikama $(x_n - x_0)$.Dobijamo proizvode $b_1 (x_n - x_0$ i $b_2 (x_n - x_0)$. Zatim opet po formulama (40) računamo y_n i x_n za odgovarajuće tačke.

Na primer: $y'_{667} = + 30\,817{,}91 + 482{,}87 - 152{,}15 = + 31\,148{,}63$

$x'_{667} = + 99\,016{,}80 - 11{,}89 - 6171{,}49 = + 92\,833{,}42$

Radi kontrole bolje je vršiti transformaciju koordinata u dve ruke.

Na kraju navešćemo slučajeve, gde je afina transformacija koordinata bila upotrebljena i računanja vršena u trig. obrascima br. 32a i 24b.

I. U trig. obr. 32 vrši se transformacija koordinata u istoj Gaus-Krig. projekciji iz jednog koordinatnog sistema u susedni. Na primjer, iz koordinatnog sistema br. 6 u koordinatni sistem br. 7. Transformmacija se vrši pomoću tačnih formula, koje garantuju tačnost do 1 cm.

Transformacija koordinata svake tačke bilo 2 reda bilo 4, vrši se posebno i za to je potrebno cca 1½ časa rada. U rejonu Apatin-Senta-Lug svojedobno su bile transformisane koordinate niza tačaka po trig. obr. 32, dakle strogom metodom (cca 20 trig. tačaka iz koor. sistema Br. 6 u koor. sistem br. 7). Dakle u ovom slučaju možemo smatrati identičnost tačaka u oba sistema apsolutnom. Uzimajući strane četvorougla do 8 km i određujući koeficijente a_1, a_2, b_1 i b_2 u trig. obr. 32a a onda transformišući u trig. obr. 24 b tačke koje leže unutra u uzetom četvorouglu, dobili smo vrednosti koordinata koje su imale maksimalno odstupanje ± 3,5 cm (ako uporedimo sa vrednostima koordinata dobivenima po trig. obr. 32). To nam služi kao potvrda da u idealnom slučaju t. j. ako imamo date tačke četvorougla identične u jednom i u drugom sistemu, to možemo dobiti koeficijente za transformaciju koji garantuju tačnost ± 5 cm (za strane četvorougla do 8 km). Vidimo dakle, u slučaju potrebe transformacije koordinata kao u spomenutom slučaju, da možemo transformisati po 32 obr. (stroga metoda) samo tačke četvorouglova a ostale transformujemo afinom transformacijom.

II. Pretpostavimo da su se u nekoj trig. mreži promenile koordinate dve-tri tačke prvog reda (recimo usled preračunavanja). Usled toga potrebno je preračunati i niz tačaka II reda a ponegde i trećeg reda. Ovo preračunavanje, i to tačku po tačku, iziskuje mnogo vremena a unapred ne može se znati, kako će se promeniti koordinate ostalih tačaka, t. j. to se nezna dok se računanje ne dovede do kraja. U tom slučaju afina transformacija koordinata (trig. orb. 32a i 24b) daje tako reći odmah pregledno podatke o promenama koordinata.

III. Date su koordinate četiri tačke u stereografskoj i Gaus-Krigerovoj projekciji. Potrebno je izračunati A_5 u stereografskoj.

Tačka A_5 bila je najpre izračunata po trig. obr. 33 u stereografskoj projekciji. Za to bilo je potrebno mnogo vremena (računanje nagiba po 8 orijentacija u trig. obr. 5 četiri stanice; računanje popravaka za sfernosti u ster.

GLAVNA GEODETSKA UPRAVA
PRI VLADI F.N.R.J.

TRANSFORMACIJA KOORDINATA

$y'_n = y'_0 + a_1(y_n - y_0) + b_1(x_n - x_0)$ $\quad a_1 = -1{,}895\,3784 \quad b_1 = -0{,}046\,7285$

$x'_n = x'_0 + a_2(y_n - y_0) + b_2(x_n - x_0)$ $\quad a_2 = +0{,}046\,6660 \quad b_2 = -1{,}895\,3614$

Темељни лист	Број тачке	Координатни систем Стереографски ±	y_0 / y_n	±	x_0 / x_n	±	y_0' / $a_1(y_n-y_0)$ / $b_1(x_n-x_0)$	±	x_0' / $a_2(y_n-y_0)$ / $b_2(x_n-x_0)$	Координатни систем Гаус-Кригеров 7 зона ±	y_n'	±	x_n'
		−	43 000	+	85 000	+	30 817 91	+	99 016 80				
	Δ Санад									+	31 084 88	+	92 709 20
						+	422 31	−	10 40		+ 9		−1
XI-55	Δ Санад	−	43 222 81	+	88 322 43	−	155 25	−	6 297 21	+	31 084 97	+	92 709 19
						+	482 87	−	11 89				
	Δ 667	−	43 254 76	+	88 256 10	−	152 15	−	6 171 49	+	31 148 63	+	92 833 42
						+	1 849 85	−	45 55				
	Δ 32	−	43 975 98	+	88 013 03	−	140 79	−	5 710 78	+	32 526 97	+	93 260 47

projekciji i samo računanje po 33. Zatim koordinate A_5 u stereografskoj projekciji dobijene od afine transformacije. Razlika između koordinata izračunatih po strogoj metodi u afinom transformacijom iznosila je po $y_{-ocu} + 5$ cm, a po x_{-ocu} — 5 cm.

IV. Slučaj. Pri transformaciji koordinata u području Banata imali smo osnovnu mrežu trig. tačaka sa koordinatama u stereogr. projekciji i u Gaus-Krigerovoj. Ali, bilo je potrebno utvrditi identitet tih tačaka i to tačku po tačku. To nam je uspelo uraditi dosta brzo na taj način što smo uzimali 3 trigonomet. tačke čiji identitet je već bio utvrđen i dodavali četvrtu tačku, čiji je identitet trebalo utvrditi. Imajući 4 tačke — četvorougao — računali smo pomoću njega (trig. obr. 32a) koeficijente a_1, a_2, b_1 i b_2 i dalje aritmetičke sredine za y'_0 i x'_0. Kako smo već napomenuli, ako odstupanja y'_0 — (y'_0) ili y'_0 — (y'_0) a isto tako i x'_0 — $(x'_0)_1$ i x'_0 — $(x'_0)_2$ ne prelaze 10 cm, to možemo smatrati da je za odnosnu trig. tačku utvrđena identičnost u dovoljnoj meri. Sem toga i podaci koje smo dobili u našem računanju mogu se upotrebiti pri transformaciji koordinata za celo područje našeg četvorougla. Ako je to odstupanje veće od 10 cm, to je indentitet naše tačke sumnjiv. Ako je odstupanje oko 15—20 cm, tada treba upotrebiti ispitivanje, uzimajući 3 druge identične tačke pa opet uvrstiti našu trigon. tačku da se obrazuje četvorougao. Ako je pak to odstupanje grubo znači da tačka nije identična.

V. slučaj: Za izradu karata 1 : 25 000 na osnovu planova 1 : 2 500 u području gde se dodiruju 6 i 7 zona potrebno je bilo imati u 7 zoni koordinate decimetarske mreže listova 6 zone i obrnuto. Radi toga bile su izračunate po trig. obr. 29 koordinate u 6 i 7 zoni četiri tačke, čije su koordinate date; na primer:

1) $\varphi_1 = 45^0\,30'$, $L_1 = 19^0\,25'$; 2) $\varphi_2 = 45^0\,35'$, $L_2 = 19^0\,25'$;
3) $\varphi_3 = 45^0\,35'$, $L_3 = 19^0\,30'$ i $\varphi_4 = 45^0\,30'$, $L_4 = 19^0\,30'$.

Na taj način dobivamo četverougao a u okviru njega možemo afinom transformacijom dobiti potrebne podatke.

LITERATURA

N. A. Glagolev: Načertateljnaja geometrija, Moskva 1946 g.
S. S. Bjušgens: Analitičeskaja geometrija, Moskva 1946 g.
A. K. Rudaev: Zbornik zadač po načertat. geometriji.
Emil Adamik: Transformacija koordinata, Geodetski list — Zagreb br. 2 i 3 1947 g.
Živančević i Berković: Transformacija koordinata, Geometarski glasnik Beograd, br. 4 1938 g.